HAL open science

Propriétés de maximalité concernant une représentation définie par Lusztig

Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Propriétés de maximalité concernant une représentation définie par Lusztig . 2017. hal-01578517

HAL Id: hal-01578517

https://hal.science/hal-01578517v1

Preprint submitted on 29 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propriétés de maximalité concernant une représentation définie par Lusztig

J.-L. Waldspurger

29 août 2017

Introduction

Soit $N \geq 1$ un entier. On note $\mathcal{P}(2N)$ l'ensemble des partitions de $2N$, c'est-à-dire celui des suites d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r \geq 0)$ telles que $S(\lambda) = 2N$, où $S(\lambda) = \lambda_1 + ... + \lambda_r$. Deux suites sont identifiées si elles ne diffèrent que par des termes nuls. Pour une telle partition et pour un entier $i \geq 1$, on note $mult_\lambda(i)$ le nombre d'indices j tels que $\lambda_j = i$. Notons $\mathcal{P}^{symp}(2N)$ le sous-ensemble des partitions symplectiques, c'est-à-dire celles telles que pour tout entier $i \geq 1$ impair, $mult_\lambda(i)$ est pair. Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2N)$, notons $Jord^{bp}(\lambda)$ l'ensemble des entiers $i \geq 2$ pairs tels que $mult_\lambda(i) \neq 0$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ l'ensemble des couples (λ, ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2N)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord^{bp}(\lambda)}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons W_n le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_n ou C_n, avec la convention $W_0 = \{1\}$. Notons $\mathcal{W}_N$ l'ensemble des couples (k, ρ) où k est un entier tel que $k \geq 0$ et $k(k+1) \leq 2N$ et ρ est une représentation irréductible de $W_{N-k(k+1)/2}$. La correspondance de Springer généralisée, définie par Lusztig, est une bijection $(\lambda, \epsilon) \mapsto (k(\lambda, \epsilon), \rho(\lambda, \epsilon))$ de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ sur $\mathcal{W}_N$.

Il est bien connu que $\mathcal{P}^{symp}(2N)$ paramètre les orbites unipotentes dans le groupe symplectique $Sp(2N; \mathbb{C})$. L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ paramètre les couples $(C, \mathcal{E})$ formés d'une orbite unipotente C et d'un système local $Sp(2N; \mathbb{C})$-équivariant irréductible sur C. On note $(C_{\lambda,\epsilon}, \mathcal{E}_{\lambda,\epsilon})$ le couple paramétré par $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Pour un tel couple $(C', \mathcal{E}')$, on définit le prolongement d'intersection $IC(\bar{C}', \mathcal{E}')$, qui est supporté par la fermeture $\bar{C}'$ de C', et ses faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^m IC(\bar{C}', \mathcal{E}')$. Lusztig a montré que ces derniers sont nuls si m est impair. Si C est une autre orbite unipotente, la restriction de $\mathcal{H}^{2m} IC(\bar{C}', \mathcal{E}')$ à C est somme directe de systèmes locaux $Sp(2N; \mathbb{C})$-équivariants irréductibles. Si $\mathcal{E}$ est un tel système local sur C, on note $\mathfrak{mult}(C, \mathcal{E}; C', \mathcal{E}')$ la multiplicité avec laquelle intervient $\mathcal{E}$ dans la restriction à C de $\oplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^{2m} IC(\bar{C}', \mathcal{E}')$. Soient (λ, ϵ) et (λ', ϵ') les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ paramétrant respectivement $(C, \mathcal{E})$ et $(C', \mathcal{E}')$. On pose $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') = \mathfrak{mult}(C, \mathcal{E}; C', \mathcal{E}')$. Supposons que cette multiplicité soit non nulle. Il est clair qu'alors $\lambda \leq \lambda'$ pour l'ordre usuel des partitions. Lusztig a prouvé que $k(\lambda, \epsilon) = k(\lambda', \epsilon')$.

Partons maintenant de $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Posons pour simplifier $k = k(\lambda, \epsilon)$. On définit la représentation $\underline{\rho}(\lambda, \epsilon)$ de $W_{N-k(k+1)/2}$ par

$$\underline{\rho}(\lambda, \epsilon) = \oplus_{(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)} \mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') \rho(\lambda', \epsilon').$$

Les coefficients $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon')$ interviennent de façon essentielle dans de nombreux travaux concernant les groupes réductifs finis, la première occurence étant peut-être [1] theorem 24.4. Ce qui nous concerne plus directement est que la représentation $\underline{\rho}(\lambda, \epsilon)$

contrôle les restrictions aux sous-groupes parahoriques des représentations de réduction unipotente des groupes p-adiques (voir [2] et [5] proposition 5.2). Or on sait peu de choses sur cette représentation. Il nous semble qu'en général, outre ce que l'on a déjà dit ci-dessus ($\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;\lambda',\epsilon')\neq 0$ entraîne $k(\lambda',\epsilon')=k(\lambda,\epsilon)$), on ne connaît que la propriété de minimalité

$\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;\lambda',\epsilon')\neq 0$ entraîne $\lambda'>\lambda$ ou $(\lambda',\epsilon')=(\lambda,\epsilon)$; dans ce dernier cas $\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;\lambda,\epsilon)=1$.

Le but de l'article est de démontrer que, sous une hypothèse de parité sur λ, la représentation $\underline{\rho}(\lambda,\epsilon)$ possède aussi une propriété de maximalité. Précisément, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème. *Soit $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Supposons que λ n'a que des termes pairs. Alors il existe un unique élément $(\lambda^{max},\epsilon^{max})\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;\lambda^{max},\epsilon^{max})=1$;

(ii) pour tout élément $(\lambda',\epsilon')\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ tel que $\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;\lambda',\epsilon')\neq 0$, on a $\lambda'<\lambda^{max}$ ou $(\lambda',\epsilon')=(\lambda^{max},\epsilon^{max})$.

En fait, notre méthode permet une certaine latitude sur l'ordre choisi pour comparer les partitions, ou plus exactement les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, notons simplement sgn le caractère signature de W_n. Pour $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$, notons $({}^s\lambda,{}^s\epsilon)$ l'élément de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ tel que $k({}^s\lambda,{}^s\epsilon)=k(\lambda,\epsilon)$ et $\rho({}^s\lambda,{}^s\epsilon)=sgn\otimes\rho(\lambda,\epsilon)$ (la notation ne doit pas prêter à confusion : ${}^s\lambda$, resp. ${}^s\epsilon$, ne dépend pas seulement de λ, resp. ϵ, mais du couple (λ,ϵ)). En général, cette opération n'est pas décroissante pour l'ordre usuel des partitions, c'est-à-dire que, pour $(\lambda,\epsilon),(\lambda',\epsilon')\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$, la relation $\lambda\leq\lambda'$ n'entraîne pas ${}^s\lambda'\leq{}^s\lambda$. Toutefois, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème. *Soit $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Supposons que λ n'a que des termes pairs. Alors il existe un unique élément $(\lambda^{min},\epsilon^{min})\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;{}^s\lambda^{min},{}^s\epsilon^{min})=1$;

(ii) pour tout élément $(\lambda',\epsilon')\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ tel que $\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;{}^s\lambda',{}^s\epsilon')\neq 0$, on a $\lambda^{min}<\lambda'$ ou $(\lambda',\epsilon')=(\lambda^{min},\epsilon^{min})$.

De plus, on a $({}^s\lambda^{min},{}^s\epsilon^{min})=(\lambda^{max},\epsilon^{max})$.

Dans un article ultérieur, nous utiliserons ce résultat pour prouver que certaines représentations (très particulières) de groupes p-adiques admettent un front d'onde.

Le couple $(\lambda^{max},\epsilon^{max})$ peut se calculer explicitement. Par contre, nous n'avons pas trouvé de formule "simple" pour calculer le couple $(\lambda^{min},\epsilon^{min})$ (il peut évidemment se calculer à partir de $(\lambda^{max},\epsilon^{max})$ et des formules explicites pour la représentation de Springer généralisée, mais ce calcul n'est pas "simple").

Les preuves des théorèmes sont purement combinatoires. Comme on le sait, les représentations irréductibles d'un groupe W_n sont paramétrés par les couples (α,β) de partitions telles que $S(\alpha)+S(\beta)=n$. Une multiplicité $\mathfrak{mult}(\lambda,\epsilon;\lambda',\epsilon')$ peut se récrire $\mathfrak{mult}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ où (α,β) paramètre $\rho(\lambda,\epsilon)$ et (α',β') paramètre $\rho(\lambda',\epsilon')$. Shoji a développé une théorie des fonctions symétriques associées à des couples de partitions. En particulier, à l'aide d'un couple (α,β) et d'un ordre $<_I$ sur l'ensemble d'indices de ce couple, il définit un polynôme du type polynôme de Kostka. Pour un autre couple (α',β'), on peut définir la "multiplicité" $mult(<_I;\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ de (α',β') dans ce polynôme. Sous certaines hypothèses sur (λ,ϵ) (le couple associé à (α,β)) et pour un ordre $<_I$ bien

choisi, Shoji prouve que $mult(<_I;\alpha,\beta;\alpha',\beta') = \mathfrak{mult}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ pour tout (α',β'). Nous généraliserons un peu ce résultat en 5.2 : il est valable pourvu que λ n'ait que des termes pairs. Les assertions des théorèmes ci-dessus deviennent des assertions concernant les paires (α',β') telles que $mult(<_I;\alpha,\beta;\alpha',\beta')$. Et la définition de ces multiplicités est purement combinatoire.

Dans le premier paragraphe, on considère un couple de partitions (α,β) et un ordre $<_I$ sur l'ensemble d'indices de ce couple. On définit des ensembles $P(\alpha,\beta)$ et $P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$ formés de couples de partitions (ν,μ) déduits de (α,β) par une combinatoire simple. On montre au paragraphe 4 que ces couples sont précisément ceux qui interviennent dans le polynôme de Shoji associé à (α,β) avec des propriétés de maximalité du type de celles intervenant dans les théorèmes ci-dessus. Entre-temps, les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à prouver divers lemmes techniques concernant ces ensembles $P(\alpha,\beta)$ et $P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$. Ils peuvent être négligés en première lecture et même en deuxième. Au paragraphe 5, on étend comme on l'a dit le théorème de Shoji et on en déduit les théorèmes, à l'aide des résultats de maximalité prouvés au paragraphe 4. La description explicite du couple $(\lambda^{max},\epsilon^{max})$ est donnée au paragraphe 6.

1 Définitions

1.1 Ensembles finis à multiplicités

Soit $n\in\mathbb{N}$. Considérons l'ensemble des suites $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ où les λ_j sont des nombres réels. Disons que deux telles suites sont équivalentes si et seulement si elles diffèrent par une permutation des indices. Nous appellerons une classe d'équivalence un ensemble à multiplicités de nombres réels, à n éléments. Pour une telle suite λ et pour $i\in\mathbb{R}$, on note $mult_\lambda(i)$ le nombre d'indices j tels que $\lambda_j=i$. Notons $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des suites $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ où les λ_j sont des nombres réels tels que $\lambda_1\geq\lambda_2...\geq\lambda_n$. Pour tout ensemble à multiplicités de nombres réels, à n éléments, qui est donc une classe d'équivalence de suites, il existe une unique suite qui appartient à la fois à cette classe et à $\mathcal{R}_n$. Ainsi, l'ensemble des ensembles à multiplicités de nombres réels, à n éléments, s'identifie à $\mathcal{R}_n$. Pour $\lambda\in\mathcal{R}_n$ et pour $k\in\{0,...,n\}$, on pose $S_k(\lambda)=\sum_{j=1,...,k}\lambda_j$. On pose simplement $S(\lambda)=S_n(\lambda)$. On munit $\mathcal{R}_n$ de l'ordre usuel : $\lambda\leq\lambda'$ si et seulement si $S_k(\lambda)\leq S_k(\lambda')$ pour tout $k=1,...,n$. Pour $\lambda,\lambda'\in\mathcal{R}_n$, on note $\lambda+\lambda'$ la suite $(\lambda_1+\lambda'_1,\lambda_2+\lambda'_2,...,\lambda_n+\lambda'_n)$. Elle appartient à $\mathcal{R}_n$. Pour $\lambda\in\mathcal{R}_n$ et $\lambda'\in\mathcal{R}_{n'}$, on note $\lambda\sqcup\lambda'$ l'élement de $\mathcal{R}_{n+n'}$ équivalent à $(\lambda_1,...,\lambda_n,\lambda'_1,...,\lambda'_{n'})$. On vérifie que

(1) soient $\lambda,\lambda'\in\mathcal{P}_n$ et $\mu,\mu'\in\mathcal{P}_m$; supposons $\lambda\leq\lambda'$ et $\mu\leq\mu'$; alors $\lambda\sqcup\mu\leq\lambda'\sqcup\mu'$ et on a $\lambda\sqcup\mu=\lambda'\sqcup\mu'$ si et seulement si $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'$.

Dans le cas particulier $n=0$, on note $\emptyset$ l'unique élément de $\mathcal{R}_0$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ où $\alpha_j\in\mathbb{N}$ pour tout j et où $\alpha_1\geq...\geq\alpha_n\geq 0$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{R}_n$. On utilisera parfois la notation $\alpha=(0^{n_0},1^{n_1},...)$ où $n_i=mult_\alpha(i)$.

1.2 L'ensemble $P(\alpha,\beta)$

Soient $n,m\in\mathbb{N}$. Posons $I=(\{1,...,n\}\times\{0\})\cup(\{1,...,m\}\times\{1\})$. On fixe un ordre total $<_I$ sur I tel que, pour $i,j\in\{1,...,n\}$, on ait $(i,0)<_I(j,0)\iff i<j$ et, pour

$i, j \in \{1, ..., m\}$, $(i, 1) <_I (j, 1) \iff i < j$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$, on va définir un sous-ensemble fini $P(\alpha, \beta) \subset \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$. Cette construction se fait par récurrence sur $n + m$.

Si $m = n = 0$, on a $\alpha = \beta = \emptyset$, $(\emptyset, \emptyset)$ est l'unique élément de $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_0$ et on pose $P(\emptyset, \emptyset) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

Supposons $n + m \geq 1$. On considère les deux constructions suivantes.

(a) supposons $n \geq 1$. On pose $a_1 = 1$. On note b_1 le plus petit élément de $\{1, ..., m\}$ tel que $(1, 0) <_I (b_1, 1)$, s'il en existe, puis a_2 le plus petit élément de $\{1, ..., n\}$ tel que $(b_1, 1) <_I (a_2, 0)$ s'il en existe, puis b_2 le plus petit élément de $\{1, ..., m\}$ tel que $(a_2, 0) <_I (b_2, 1)$ s'il en existe etc... On arrête le procédé quand il n'y a plus d'élément vérifiant l'inégalité requise. On pose $\nu_1 = \alpha_{a_1} + \beta_{b_1} + \alpha_{a_2} + \beta_{b_2} + ...$ On note $i_1 < ... < i_{n'}$ les éléments de $\{1, ..., n\}$ qui ne font pas partie du sous-ensemble $\{a_1, a_2, ...\}$. On note $j_1 < ... < j_{m'}$ les éléments de $\{1, ..., m\}$ qui ne font pas partie du sous-ensemble $\{b_1, b_2, ...\}$. On identifie l'ensemble $I' = (\{1, ..., n'\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m'\} \times \{0\})$ à un sous-ensemble de I en identifiant $(k, 0) \in I'$ à $(i_k, 0) \in I$ et $(k, 1) \in I'$ à $(j_k, 1) \in I$. On munit I' de l'ordre $<_{I'}$ induit par ce plongement et par l'ordre $<_I$ sur I. On définit $\alpha' = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ...) \in \mathcal{P}_{n'}$ et $\beta' = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ...) \in \mathcal{P}_{m'}$. Par récurrence, l'ensemble $P(\alpha', \beta')$ est défini. On note $P^a(\alpha, \beta)$ l'ensemble des couples $(\nu = \{\nu_1\} \sqcup \nu' \sqcup \{0^{n-n'-1}\}, \mu = \mu' \sqcup \{0^{m-m'}\})$ pour $(\nu', \mu') \in P(\alpha', \beta')$.

(b) Supposons $m \geq 1$. On construit un ensemble $P^b(\alpha, \beta)$ en inversant les rôles de α et β : on pose $b_1 = 1$. On note a_1 le plus petit élément de $\{1, ..., n\}$ tel que $(1, 1) < (a_1, 0)$ etc... On pose $\mu_1 = \beta_{b_1} + \alpha_{a_1} + \beta_{b_2}...$, on définit les partitions (α', β'). On note $P^b(\alpha, \beta)$ l'ensemble des couples $(\nu = \nu' \sqcup \{0^{n-n'}\}, \mu = \{\mu_1\} \sqcup \mu' \sqcup \{0^{m-m'-1}\})$ pour $(\nu', \mu') \in P(\alpha', \beta')$.

On a supposé $n + m \geq 1$. Si $m = 0$, on pose $P(\alpha, \beta) = P^a(\alpha, \beta)$. Si $n = 0$, on pose $P(\alpha, \beta) = P^b(\alpha, \beta)$. Si $n, m \geq 1$, on note $P(\alpha, \beta)$ la réunion de $P^a(\alpha, \beta)$ et $P^b(\alpha, \beta)$.

On a

(1) si $n = 0$ ou $m = 0$, $P(\alpha, \beta) = \{(\alpha, \beta)\}$;

(2) $S(\nu) + S(\mu) = S(\alpha) + S(\beta)$ pour tout $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$.

Considérons des ensembles d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{n'} \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_{m'} \leq m$, posons $\alpha' = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ...) \in \mathcal{P}_{n'}$ et $\beta' = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ...) \in \mathcal{P}_{m'}$. Comme dans la construction ci-dessus, identifions l'ensemble d'indices $I' = (\{1, ..., n'\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m'\} \times \{0\})$ à un sous-ensemble de I. Supposons $n' \geq 1$ et considérons des éléments $(\nu, \mu) \in P^a(\alpha, \beta)$ et $(\nu', \mu') \in P(\alpha', \beta')$. Alors

(3) on a $\nu'_1 \leq \nu_1$.

Preuve de (3). Comme on l'a dit, on a $\nu_1 = \alpha_1 + \beta_{b_1} + \alpha_{a_2}....$ La construction entraîne que ν'_1 est de la forme $\alpha_{a'_1} + \beta_{b'_1} + \alpha_{a'_2}...$ où $a'_1 \geq 1$, b'_1 est un élément de $\{1, ..., m\}$ tel que $(a'_1, 0) <_I (b'_1, 1)$, a'_2 est un élément de $\{1, ..., n\}$ tel que $(b'_1, 1) <_I (a'_2, 0)$ etc...Par récurrence, on voit que si b'_1 existe, b_1 aussi et $b_1 \leq b'_1$, que si a'_2 existe, a_2 aussi et $a_2 \leq a'_2$ etc... L'élément $\nu'_1 = \alpha_{a'_1} + \beta_{b'_1} + \alpha_{a'_2}...$ est alors inférieur ou égal à ν_1. $\square$

En particulier, dans la construction (a), ν_1 est bien le plus grand élément de la suite ν. Il y a évidemment des propriétés similaires en échangeant les rôles de α et β : dans la construction (b), μ_1 est bien le plus grand élément de la suite μ.

Supposons $n, m \geq 1$. Le procédé (a) crée des suites $a_1 = 1$, a_2,..., b_1, b_2, ... un élément $\nu_1 = \alpha_1 + \beta_{b_1} + \alpha_{a_2} + ...$ et des partitions (α', β'). Le procédé (b) crée des objets que nous notons en les soulignant : des suites $\underline{b}_1 = 1$, $\underline{b}_2$...,$\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$,... un élément $\underline{\mu}_1 = \beta_1 + \alpha_{\underline{a}_1} + \beta_{\underline{b}_2} + ...$ et des partitions $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$. Supposons que $(1, 0) <_I (1, 1)$. On voit que $b_1 = 1$, puis, par

récurrence, $\underline{a}_1 = a_2$, $\underline{b}_2 = b_2$, $\underline{a}_2 = a_3$... D'où $\nu_1 = \alpha_1 + \underline{\mu}_1$, $\beta' = \underline{\beta'}$ et $\underline{\alpha'} = \{\alpha_1\} \sqcup \alpha'$. Il y a un résultat similaire si $(1,1) <_I (1,0)$. En résumé

(4) si $(1,0) <_I (1,1)$, on a $\nu_1 = \alpha_1 + \underline{\mu}_1$, $\underline{\alpha'} = \{\alpha_1\} \sqcup \alpha'$ et $\beta' = \underline{\beta'}$; si $(1,1) <_I (1,0)$, on a $\underline{\mu}_1 = \beta_1 + \nu_1$, $\alpha' = \underline{\alpha'}$ et $\beta' = \{\beta_1\} \sqcup \underline{\beta'}$.

Considérons les cas particuliers suivants :

(5) on suppose que $\beta = \{0^m\}$ et que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $(1,1) <_I (i,0)$; ou bien on suppose que $\alpha = \{0^n\}$ et que $\beta_i = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., m\}$ tel que $(1,0) <_I (i,1)$; dans les deux cas $P(\alpha, \beta) = \{(\alpha, \beta)\}$.

Cela se prouve par récurrence sur $n + m$.

Remarque. Un élément de $P(\alpha, \beta)$ est obtenu en appliquant une suite de procédés (a) ou (b). Mais cette suite n'est pas toujours unique. Par exemple, supposons $n = 1$, $m = 2$, $(1,0) <_I (1,1) <_I (2,1)$ et supposons $\beta_1 = \beta_2$. Alors le couple $(\{\alpha_1 + \beta_1\}, \{\beta_2, 0\})$ appartient à $P(\alpha, \beta)$. Il peut être obtenu par application des procédés (a) puis (b) ou par application des procédés (b) puis (a).

1.3 L'ensemble $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. Considérons des réels A, B et un réel $s > 0$. Soit $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$. On définit $P_{A,B;s}(\alpha, \beta) \subset P(\alpha, \beta)$ de la façon suivante.

Si $n = m = 0$, ou plus généralement si $n = 0$ ou $m = 0$, $P_{A,B;s}(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta) = \{(\alpha, \beta)\}$.

Supposons $n \geq 1$, $m \geq 1$. On reprend la même construction que dans le paragraphe précédent. On autorise cette fois le procédé (a) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée

$(1,0) <_I (1,1)$ et $\alpha_1 + A \geq B$ ou $(1,1) <_I (1,0)$ et $\beta_1 + B \leq A$;

Dans ce cas, on définit $P^a_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ comme l'ensemble des couples $(\nu = \{\nu_1\} \sqcup \nu' \sqcup \{0^{n-n'-1}\}, \mu = \mu' \sqcup \{0^{m-m'}\})$ pour $(\nu', \mu') \in P_{A-s,B;s}(\alpha', \beta')$.

On autorise le procédé (b) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée

$(1,0) <_I (1,1)$ et $\alpha_1 + A \leq B$ ou $(1,1) <_I (1,0)$ et $\beta_1 + B \geq A$.

Dans ce cas, on définit $P^b_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ comme l'ensemble des couples $(\nu = \nu' \sqcup \{0^{n-n'}\}, \mu = \{\mu_1\} \sqcup \mu' \sqcup \{0^{m-m'-1}\})$, pour $(\nu', \mu') \in P_{A,B-s;s}(\alpha', \beta')$.

Si un seul procédé est autorisé, disons celui de type (a), on pose $P_{A,B;s}(\alpha, \beta) = P^a_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Si les deux procédés sont autorisés, on pose $P_{A,B;s}(\alpha, \beta) = P^a_{A,B;s}(\alpha, \beta) \cup P^b_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Au moins un des procédés est loisible donc l'ensemble $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ est non vide. Il peut avoir plusieurs éléments puisque les procédés (a) et (b) peuvent être tous deux autorisés. On peut toutefois définir un élément canonique "de type (a)" en modifiant la construction ci-dessus de la façon suivante : on n'autorise le procédé (b) que si le procédé (a) n'est pas autorisé. Dans l'un ou l'autre des procédés, on choisit pour (ν', μ') l'élément canonique "de type (a)" relatif à (α', β'). On définit de la même façon un élément canonique "de type (b)".

Soient $N, M \in \mathbb{N}$. Supposons $N \geq n$, $M \geq m$, $A \geq s(N-1)$, $B \geq s(M-1)$. Appelons $(N, M; s)$-symbole un couple $\Lambda = (\Lambda^a, \Lambda^b) \in \mathcal{R}_N \times \mathcal{R}_M$ tel que

$\Lambda^a_j \geq 0$ et $\Lambda^b_j \geq 0$ pour tout j ;

$\Lambda^a_j \geq \Lambda^a_{j+1} + s$ pour $j = 1, ..., N-1$, $\Lambda^b_j \geq \Lambda^b_{j+1} + s$ pour $i = 1, ...M-1$.

On définit l'élément $p\Lambda \in \mathcal{R}_{N+M}$ par $p\Lambda = \Lambda^a \sqcup \Lambda^b$.

Pour $R, R' \in \mathbb{R}$ tels que $R \in R' + s\mathbb{N}$, on pose $[R, R']_s = \{R, R-s, R-2s, ..., R'\}$. Par convention, on pose aussi $[R, R+s]_s = \emptyset$. Pour $\nu \in \mathcal{P}_n$, $\mu \in \mathcal{P}_m$, on définit le $(N, M; s)$-symbole

$$\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = ((\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s, (\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B, B+s-sM]_s).$$

Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$, considérons un élément $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. D'après la définition de ce terme, on peut trouver un entier $r \geq 0$, des suites de partitions $(\alpha^i, \beta^i)_{i=1,...,r+1}$, $(\nu^i, \mu^i)_{i=1,...,r+1}$, des suites de réels $(A_i)_{i=1,...,r+1}$, $(B_i)_{i=1,...,r+1}$ et d'entiers $(N_i)_{i=1,...,r+1}$, $(M_i)_{i=1,...,r+1}$, vérifiant les propriétés suivantes :

$(\alpha^1, \beta^1) = (\alpha, \beta)$, $(\nu^1, \mu^1) = (\nu, \mu)$, $A_1 = A$, $B_1 = B$;

en notant n_i et m_i les entiers tels que $\alpha^i \in \mathcal{P}_{n_i}$ et $\beta^i \in \mathcal{P}_{m_i}$, on a $n_i + m_i \geq 1$ si $i \leq r$ et $n_{r+1} = m_{r+1} = 0$;

pour $i = 1, ..., r+1$, (ν^i, μ^i) appartient à $P_{A_i,B_i;s}(\alpha^i, \beta^i)$;

pour $i = 1, ..., r$, si (ν^i, μ^i) est issu du procédé (a), ce procédé crée l'élément ν^i_1 et les partitions $(\alpha^{i+1}, \beta^{i+1})$; on pose $A_{i+1} = A_i - s$, $B_{i+1} = B_i$, $N_{i+1} = N_i - 1$, $M_{i+1} = M_i$; on a $(\nu^i, \mu^i) = (\{\nu^i_1\} \sqcup \nu^{i+1} \sqcup \{0^{n_i-1-n_{i+1}}\}, \mu^{i+1} \sqcup \{0^{m_i-m_{i+1}}\})$; si (ν^i, μ^i) est issu du procédé (b), ce procédé crée l'élément μ^i_1 et les partitions $(\alpha^{i+1}, \beta^{i+1})$; on pose $A_{i+1} = A_i$, $B_{i+1} = B_i - s$, $N_{i+1} = N_i$ et $M_{i+1} = M_i - 1$; on a $(\nu^i, \mu^i) = (\nu^{i+1} \sqcup \{0^{n_i-n_{i+1}}\}, \{\mu^i_1\} \sqcup \mu^{i+1} \sqcup \{0^{m_i-1-m_{i+1}}\})$.

Comme on l'a remarqué dans le paragraphe précédent, de telles suites ne sont pas forcément uniques mais fixons-les. Pour $i = 1, ..., r$, on a

$$p\Lambda^{N_i,M_i}_{A_i,B_i;s}(\nu^i, \mu^i) = \{x_i\} \sqcup p\Lambda^{N_{i+1},M_{i+1}}_{A_{i+1},B_{i+1};s}(\nu^{i+1}, \mu^{i+1}),$$

où $x_i = \nu^i_1 + A_i$ si (ν^i, μ^i) est issu du procédé (a) et $x_i = \mu^i + B_i$ si (ν^i, μ^i) est issu du procédé (b). On a aussi

$$p\Lambda^{N_{r+1},M_{r+1}}_{A_{r+1},B_{r+1};s}(\nu^{r+1}, \mu^{r+1}) = [A_{r+1}, A+s-sN]_s \sqcup [B_{r+1}, B+s-sM]_s.$$

Notons h le plus petit entier $i \in \{1, ..., r\}$ tel que $inf(n_{i+1}, m_{i+1}) = 0$. Pour $i = 1, ..., h$, posons $\lambda_i = x_i$, où x_i est défini comme ci-dessus. Posons

$$p\Lambda^{N_{h+1},M_{h+1}}_{A_{h+1},B_{h+1};s}(\nu^{h+1}, \mu^{h+1}) = (\lambda_{h+1}, ..., \lambda_{N+M}).$$

Montrons que

(1) on a l'égalité

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = (\lambda_1, ..., \lambda_{N+M}).$$

Remarque. Ce qui précède montre que les termes du membre de gauche sont bien $\lambda_1, ..., \lambda_{N+M}$. L'assertion est que ces termes sont en ordre décroissant.

Par définition, les termes sont en ordre décroissant au-delà du rang $h+1$. Par récurrence, il suffit donc de prouver que, si $n, m \geq 1$, on a $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Par symétrie, on ne perd rien à supposer que (ν, μ) est issu du procédé (a). Donc $\lambda_1 = \nu_1 + A$. On a alors l'une des possibilités suivantes

(2) $r = 1$ et $\lambda_2 = A_2 = A - s$;

(3) $r = 1$ et $\lambda_2 = B_2 = B$;

(4) $r \geq 2$, (ν^2, μ^2) est construit à l'aide du procédé (a) et $\lambda_2 = \nu^2_1 + A_2 = \nu^2_1 + A - s$;

(5) $r \geq 2$, (ν^2, μ^2) est construit à l'aide du procédé (b) et $\lambda_2 = \mu^2_1 + B_2 = \mu^2_1 + B$.

Dans le cas (2), l'inégalité $\lambda_1 > \lambda_2$ est immédiate. Dans le cas (4), elle résulte de 1.2(3). Notons $\underline{\mu}_1$ le terme issu du procédé (b) appliqué à (α, β). Dans le cas (5), on a $\mu_1^2 \leq \underline{\mu}_1$ d'après l'assertion symétrique de 1.2(3). Dans les cas (3) et (5), on a donc $\lambda_2 \leq \underline{\mu}_1 + B$. Supposons $(1,0) <_I (1,1)$. Alors, d'après 1.2(4), on a $\nu_1 = \alpha_1 + \underline{\mu}_1$. Puisque le procédé (a) est loisible pour construire (ν, μ), on a $\alpha_1 + A \geq B$. Alors

$$\lambda_2 \leq \underline{\mu}_1 + B \leq \alpha_1 + \underline{\mu}_1 + A = \nu_1 + A = \lambda_1.$$

Supposons maintenant $(1,1) <_I (1,0)$. Alors, d'après 1.2(4), on a $\nu_1 = \underline{\mu}_1 - \beta_1$. Puisque le procédé (a) est loisible pour construire (ν, μ), on a $\beta_1 + B \leq A$. Alors

$$\lambda_2 \leq \underline{\mu}_1 + B \leq \underline{\mu}_1 - \beta_1 + A = \nu_1 + A = \lambda_1.$$

Cela prouve (1).

Supposons que (ν, μ) soit l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. On peut alors choisir de façon canonique les suites $(\alpha^i, \beta^i)_{i=1,...,r+1}$ etc.. : pour $i = 1, ..., r$, si (ν^i, μ^i) peut être construit à l'aide de chacun des procédés (a) ou (b), on choisit le procédé (b). On a alors les inégalités plus précises suivantes :

(6) soit $i \in \{1, ..., h\}$; supposons que (ν^i, μ^i) soit construit à l'aide du procédé (a) ; alors $\lambda_i > \lambda_{i+1}$.

Comme dans la preuve ci-dessus, on peut supposer $i = 1$. Par définition des suites canoniques, puisque (ν, μ) est construit à l'aide du procédé (a), c'est que le procédé (b) est exclu. On a donc les inégalités strictes $\alpha_1 + A > B$ si $(1,0) <_I (1,1)$ et $\beta_1 + B < A$ si $(1,1) <_I (1,0)$. En glissant ces inégalités strictes dans la preuve ci-dessus, on obtient (6).

Dans la suite de l'article, on considère des données $n, m, N, M \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{R}$ et un réel $s > 0$ vérifiant les hypothèses ci-dessus. C'est-à-dire que l'on suppose fixé un ordre $<_I$ sur l'ensemble d'indices $I = (\{1, ..., n\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m\} \times \{1\})$ comme en 1.2 ; on suppose $N \geq n$, $M \geq m$, $A \geq s(N-1)$ et $B \geq s(M-1)$. Le nombre s ne changera pas. Par contre, on raisonnera souvent par récurrence sur n et m et on s'autorisera à faire varier N, M, A et B. Les réels A et B sont presque toujours positifs ou nuls. Par exemple, A ne peut être strictement négatif que si $N = 0$ donc $n = 0$ mais, dans ce cas, A n'interviendra pas réellement dans les constructions.

1.4 Définition de $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]$

Lemme. *Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$.*

(i) Pour $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$ et $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$, on a $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$.

(ii) Pour $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$ et $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$, on a $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ si et seulement si $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$.

Preuve. L'assertion "si" de (ii) résulte trivialement de (i). On va donc démontrer cette assertion (i) ainsi que l'assertion "seulement si" de (ii).

On raisonne par récurrence sur $n + m$. Si $n + m = 0$, plus généralement si $n = 0$ ou $m = 0$, $P_{A,B}(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta) = \{(\alpha, \beta)\}$ et les assertions sont triviales. Supposons $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Les éléments (ν, μ) et $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ sont construits selon des procédés (a) ou (b). Supposons d'abord qu'ils soient construits par le même procédé, disons par le

procédé (a). Celui-ci construit un terme ν_1 et des partitions $\alpha' \in \mathcal{P}_{n'}$, $\beta' \in \mathcal{P}_{m'}$. On a $\nu = \{\nu_1\} \sqcup \nu' \sqcup \{0\}^{n-n'-1}$ et $\mu = \mu' \sqcup \{0\}^{m-m'}$ pour un élément $(\nu', \mu') \in P(\alpha', \beta')$. On en déduit facilement l'égalité

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = \{\nu_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu', \mu').$$

De même

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) = \{\nu_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\mu}'),$$

où $(\boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\mu}')$ est un élément de $P_{A-s,B;s}(\alpha', \beta')$. Alors l'inégalité $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ équivaut à l'inégalité $p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu', \mu') \leq p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\mu}')$ qui est connue par récurrence. La première inégalité est une égalité si et seulement s'il en est de même pour la seconde. Pour celle-ci, l'égalité entraîne par récurrence que $(\nu', \mu') \in P_{A-s,B;s}(\alpha', \beta')$. Mais alors, par construction, on a $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$.

Supposons maintenant que (ν, μ) et $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ soient construits selon des procédés différents. On ne perd rien à supposer $(1, 0) <_I (1, 1)$. Supposons d'abord que $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ soit construit à l'aide du procédé (a) et que (ν, μ) le soit selon le procédé (b). Le procédé (a) définit un élément que l'on note ici $\boldsymbol{\nu}_1$ et un couple que l'on note $(\alpha^1, \beta^1) \in \mathcal{P}_{n_1} \times \mathcal{P}_{m_1}$. Le procédé (b) définit un terme μ_1 et un couple $(\underline{\alpha}^1, \underline{\beta}^1)$. D'après 1.2(4), l'hypothèse $(1, 0) <_I (1, 1)$ entraîne que $\boldsymbol{\nu}_1 = \alpha_1 + \mu_1$, $\underline{\alpha}^1 = \{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1$, $\underline{\beta}^1 = \beta^1$. Puis

$$(1) \qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) = \{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1),$$

$$(2) \qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = \{\mu_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\nu^1, \mu^1),$$

pour des couples $(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1) \in P_{A-s,B;s}(\alpha^1, \beta^1)$ et $(\nu^1, \mu^1) \in P(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$.

Supposons d'abord $m_1 = 0$. Dans ce cas, on a $(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1) = (\alpha^1, \beta^1 = \emptyset)$ et $(\nu^1, \mu^1) = (\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1 = \emptyset)$. On trouve plus explicitement

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) = \{\alpha_1 + \mu_1 + A, \alpha^1_1 + A - s, ..., \alpha^1_{n_1} + A - sn_1, A - sn_1 - s, ..., A + s - sN\}$$
$$\sqcup\{B, B - s, ..., B + s - sM\},$$
$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = (\alpha_1 + A, \alpha^1_1 + A - s, ..., \alpha^1_{n_1} + A - sn_1, A - sn_1 - s, ..., A + s - sN\}$$
$$\sqcup\{\mu_1 + B, B - s, ..., B + s - sM\}.$$

D'après la remarque 1.1(1), il suffit de prouver que $\{\alpha_1 + A, \mu_1 + B\} \leq \{\alpha_1 + \mu_1 + A, B\}$. Or les hypothèses que $(1, 0) <_I (1, 1)$ et que (a) est autorisé pour construire un élément de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ entraînent que $\alpha_1 + A \geq B$, ce qui entraîne l'inégalité cherchée. On voit aussi que l'on ne peut avoir l'égalité $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) = p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu)$ que si $\mu_1 = 0$ ou $\alpha_1 + A = B$. Dans le premier cas, on voit que $(\nu, \mu) = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ donc $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Dans le deuxième cas, le procédé (b) est permis pour construire l'ensemble $P^b_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ et (ν, μ) appartient à cet ensemble.

Supposons maintenant $m_1 \geq 1$. Introduisons un couple $(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1) \in P_{A,B-s;s}(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$ et notons $I_1 = (\{1, ..., n_1 + 1\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m_1\} \times \{1\})$ l'ensemble d'indices intervenant, qui est muni d'un ordre $< I_1$ par une injection $I_1 \to I$. Puisque $(1, 0) \in I_1$ s'identifie à $(1, 0) \in I$ qui est le plus petit élément de I, il reste le plus petit élément de I_1. Comme on l'a dit ci-dessus, nos hypothèses entraînent $\alpha_1 + A \geq B$, a fortiori $\alpha_1 + A > B - s$. Donc $(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1)$ est construit par le procédé (a). Ce procédé construit des éléments, notons-les $a'_1 = 1$, a'_2,..., b'_1, b'_2... un élément $\underline{\nu}_1 = \alpha_1 + \beta^1_{b'_1} + \alpha^1_{a'_2 - 1} + ...$ (il y a

un décalage sur les indices de α^1 car le i-ième terme de α^1 est le $(i+1)$-ième terme de $\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1)$, puis un couple $(\alpha^2, \beta^2) \in \mathcal{P}_{n_2} \times \mathcal{P}_{m_2}$. Notons en passant que, puisque $(1,0)$ est le plus petit élément de I_1, on a $b'_1 = 1$. On a $(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1) = (\underline{\nu}_1 \sqcup \nu^2, \mu^2)$, pour un couple $(\nu^2, \mu^2) \in P_{A-s,B-s;s}(\alpha^2, \beta^2)$. On a

$$p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1) = \{\underline{\nu}_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2, \mu^2).$$

De plus, l'hypothèse de récurrence entraîne que $p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\nu^1, \mu^1) \leq p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1)$. Avec (2), on obtient

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq \{\mu_1 + B\} \sqcup \{\underline{\nu}_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2, \mu^2).$$

Posons $\mu'_1 = \beta^1_{b'_1} + \alpha^1_{a'_2-1} + \ldots$. On a donc $\underline{\nu}_1 = \alpha_1 + \mu'_1$. D'après 1.2(3), on a $\mu_1 \geq \mu'_1$. En utilisant l'inégalité $\alpha_1 + A \geq B$, on voit que $\{\mu_1 + B\} \sqcup \{\underline{\nu}_1 + A\} \leq \{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup \{\mu'_1 + B\}$. Donc

$$(3) \qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq \{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup \{\mu'_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2, \mu^2).$$

On a vu ci-dessus que $b'_1 = 1$. Mais alors μ'_1 est le terme issu du procédé (b) appliqué à (α^1, β^1) et (α^2, β^2) est la partition qui se déduit du même procédé. Ce procédé est loisible pour construire l'ensemble $P^b(\alpha^1, \beta^1)$ puisqu'on a supposé $m_1 \geq 1$. Donc $(\nu^2, \{\mu'_1\} \sqcup \mu^2)$ est un élément de $P(\alpha^1, \beta^1)$ et on a

$$p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu^2, \{\mu'_1\} \sqcup \mu^2) = \{\mu'_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2, \mu^2).$$

Par récurrence, on a

$$p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu^2, \{\mu'_1\} \sqcup \mu^2) \leq p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1)$$

et, avec (3), on obtient

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B}(\nu, \mu) \leq \{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1).$$

En comparant avec (1), on obtient l'inégalité cherchée $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$.

Supposons que $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$. Alors toutes les inégalités ci-dessus doivent être des égalités. D'abord $p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\nu^1, \mu^1) = p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1)$. Par récurrence, cela entraîne que $(\nu^1, \mu^1) \in P_{A,B-s;s}(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$. Puisque le couple $(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1)$ était un élément quelconque de cet ensemble, on peut supposer qu'il est égal à (ν^1, μ^1). Ensuite $\{\mu_1 + B\} \sqcup \{\underline{\nu}_1 + A\} = \{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup \{\mu'_1 + B\}$. Cela entraîne que $\alpha_1 + A = B$ ou que $\mu'_1 = \mu_1$. Dans le premier cas, le procédé (b) est permis pour définir l'ensemble $P^b_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Le couple (ν, μ) est construit à l'aide de ce procédé et de l'élément $(\nu^1, \mu^1) \in P_{A,B-s;s}(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$. Donc $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Supposons maintenant $\mu'_1 = \mu_1$. On doit aussi avoir l'égalité $p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu^2, \{\mu'_1\} \sqcup \mu^2) = p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1)$, ce qui entraîne par récurrence que $(\nu^2, \{\mu'_1\} \sqcup \mu^2) \in P_{A-s,B;s}(\alpha^1, \beta^1)$. L'élément de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ construit à l'aide du procédé (a) et de ce couple est

$$(\{\alpha_1 + \mu_1\} \sqcup \nu^2, \{\mu'_1\} \sqcup \mu^2).$$

Le couple (ν, μ) est $(\{\alpha_1 + \mu'_1\} \sqcup \nu^2, \{\mu_1\} \sqcup \mu^2)$. Puisque $\mu'_1 = \mu_1$, ces deux couples sont égaux et (ν, μ) appartient à $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$.

On suppose maintenant que (ν,μ) est construit à l'aide du procédé (a) et que $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})$ l'est à l'aide du procédé (b) (on suppose toujours $(1,0)<_I(1,1)$). On reprend le raisonnement en échangeant les rôles de (ν,μ) et $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})$. Les égalités (1) et (2) sont inversées, c'est-à-dire que l'on a

$$(4)\qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})=\{\mu_1+B\}\sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\boldsymbol{\nu}^1,\boldsymbol{\mu}^1),$$

$$(5)\qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B}(\nu,\mu)=\{\alpha_1+\mu_1+A\}\sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu^1,\mu^1),$$

pour des couples $(\boldsymbol{\nu}^1,\boldsymbol{\mu}^1)\in P_{A,B-s;s}(\{\alpha_1\}\sqcup\alpha^1,\beta^1)$ et $(\nu^1,\mu^1)\in P(\alpha^1,\beta^1)$.

Supposons d'abord $m_1=0$. Dans ce cas , on a $(\boldsymbol{\nu}^1,\boldsymbol{\mu}^1)=(\{\alpha_1\}\sqcup\alpha^1,\beta^1=\emptyset)$ et $(\nu^1,\mu^1)=(\alpha^1,\beta^1=\emptyset)$. On trouve plus explicitement

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})=\{\mu_1+B\}\sqcup\{\alpha_1+A,\alpha^1_1+A-s,...,\alpha^1_{n_1}+A-sn_1,A-sn_1-s,...,A+s-sN\}$$
$$\sqcup\{B-s,...,B+s-sM\},$$
$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)=(\alpha_1+\mu_1+A,\alpha^1_1+A-s,...,\alpha^1_{n_1}+A-sn_1,A-sn_1-s,...,A+s-sN\})$$
$$\sqcup\{B,B-s,...,B+s-sM\}.$$

D'après la remarque 1.1(1), il suffit de prouver que $\{\alpha_1+\mu_1+A,B\}\leq\{\alpha_1+A,\mu_1+B\}$. Or les hypothèses que $(1,0)<_I(1,1)$ et que (b) est autorisé pour construire des éléments de $P^b_{A,B;s}(\alpha,\beta)$ entraînent que $\alpha_1+A\leq B$, d'où l'inégalité cherchée. On voit aussi que l'on ne peut avoir l'égalité $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})=p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)$ que si $\mu_1=0$ ou $\alpha_1+A=B$. Dans le premier cas, on voit que $(\nu,\mu)=(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})$ donc $(\nu,\mu)\in P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$. Dans le deuxième cas, le procédé (a) est permis pour construire l'ensemble $P^a_{A,B;s}(\alpha,\beta)$ et (ν,μ) appartient à cet ensemble.

Supposons $m_1\geq 1$. Introduisons un couple $(\underline{\nu}^1,\underline{\mu}^1)\in P_{A-s,B}(\alpha^1,\beta^1)$. Montrons que ce couple est obtenu par le procédé (b). C'est évident si $n_1=0$ puisqu'alors seul ce procédé est autorisé. Supposons $n_1\geq 1$. On note $I_1=(\{1,...,n_1\}\times\{0\})\cup(\{1,...,m_1\}\times\{1\})$ l'ensemble d'indices intervenant. Contrairement à ce qui se passait plus haut, l'élément $(1,0)$ de I_1 ne s'identifie plus à $(1,0)\in I$. Pour l'ordre sur I_1, on ne sait pas quel est le plus grand des éléments $(1,0)$ et $(1,1)$. Supposons que $(1,0)<_{I_1}(1,1)$. Comme on l'a dit ci-dessus, nos hypothèses entraînent $\alpha_1+A\leq B$. Puisque α^1 est une partition extraite de α, on a $\alpha^1_1\leq\alpha_1$, a fortiori $\alpha^1_1+A-s<B$ et cela impose le procédé (b). Supposons maintenant que $(1,1)<_{I_1}(1,0)$. L'inégalité $\alpha_1+A\leq B$ entraîne $A\leq B$, a fortiori $\beta^1_1+B>A-s$. Cela impose encore le procédé (b), ce qui démontre l'assertion. Le procédé (b) construit des éléments, notons-les $b'_1=1$, b'_2... a'_1, a'_2,... un élément $\underline{\mu}_1=\beta^1_{b'_1}+\alpha^1_{a'_1}+...$, puis un couple $(\alpha^2,\beta^2)\in\mathcal{P}_{n_2}\times\mathcal{P}_{m_2}$. On a $(\underline{\nu}^1,\underline{\mu}^1)=(\nu^2,\{\underline{\mu}_1\}\sqcup\mu^2)$, pour un couple $(\nu^2,\mu^2)\in P_{A-s,B-s;s}(\alpha^2,\beta^2)$. On a

$$p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\underline{\nu}^1,\underline{\mu}^1)=\{\underline{\mu}_1+B\}\sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2,\mu^2).$$

De plus, l'hypothèse de récurrence entraîne que $p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu^1,\mu^1)\leq p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\underline{\nu}^1,\underline{\mu}^1)$. Avec (5), on obtient

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)\leq\{\alpha_1+\mu_1+A\}\sqcup\{\underline{\mu}_1+B\}\sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2,\mu^2).$$

D'après 1.2(3), on a $\underline{\mu}_1\leq\mu_1$. En utilisant l'inégalité $\alpha_1+A\leq B$, on voit que $\{\alpha_1+\mu_1+A\}\sqcup\{\underline{\mu}_1+B\}\leq\{\alpha_1+\underline{\mu}_1+A\}\sqcup\{\mu_1+B\}$. Donc

$$(6)\qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)\leq\{\mu_1+B\}\sqcup\{\alpha_1+\underline{\mu}_1+A\}\sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2,\mu^2).$$

Considérons le couple $(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$. Cette fois, l'ordre sur l'ensemble d'indices $\mathbf{I}_1 = (\{1, ..., n_1+1\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m_1\} \times \{1\})$ est tel que $(1, 0) <_{\mathbf{I}_1} (1, 1)$. On voit que le procédé (a) crée l'élément $\alpha_1 + \underline{\mu}_1$ et les partitions (α^2, μ^2). Donc le couple $(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2)$ appartient à $P(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$. On a

$$p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2) = \{\alpha_1 + \underline{\mu}_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu^2, \mu^2).$$

D'où, avec (6),

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq \{\mu_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2).$$

Puisque $(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2)$ appartient à $P(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$, on sait par récurrence que $p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2) \leq p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1)$. Alors

$$p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq \{\mu_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1).$$

En comparant avec (4), on obtient l'inégalité cherchée $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) \leq p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$.

Supposons que $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$. Alors toutes les inégalités ci-dessus doivent être des égalités. D'abord $p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu^1, \mu^1) = p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1)$. Cela entraîne par récurrence que $(\nu^1, \mu^1) \in P_{A-s,B;s}(\alpha^1, \beta^1)$. Comme plus haut, on peut alors supposer $(\underline{\nu}^1, \underline{\mu}^1) = (\nu^1, \mu^1)$. Ensuite $\{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup \{\underline{\mu}_1 + B\} = \{\alpha_1 + \underline{\mu}_1 + A\} \sqcup \{\mu_1 + B\}$. Cela entraîne que $\alpha_1 + A = B$ ou que $\underline{\mu}_1 = \mu_1$. Dans le premier cas, le procédé (a) est permis pour construire l'ensemble $P^a_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ et (ν, μ) est issu de ce procédé et du couple $(\nu^1, \mu^1) \in P_{A-s,B;s}(\alpha^1, \beta^1)$. Donc $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Supposons $\underline{\mu}_1 = \mu_1$. On doit encore avoir $p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2) = p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\mu}^1)$. Par récurrence, cela entraîne que $(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \mu^2) \in P_{A,B-s;s}(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha^1, \beta^1)$. L'élément de $P^b_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ issu du procédé (b) et de ce couple est

$$(\{\alpha_1 + \underline{\mu}_1\} \sqcup \nu^2, \{\mu_1\} \sqcup \Lambda^2).$$

Le couple (ν, μ) est

$$(\{\alpha_1 + \mu_1\} \sqcup \nu^2, \{\underline{\mu}_1\} \sqcup \mu^2).$$

L'égalité $\underline{\mu}_1 = \mu_1$ entraîne que ces deux couples sont égaux, donc $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Cela achève la démonstration. □

Le lemme autorise la définition suivante.

Définition. *Pour $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$, on note $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]$ la partition $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu)$ pour un élément quelconque $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$.*

Remarque. Il résulte de 1.2(1) que, si $n = 0$ ou $m = 0$, on a simplement $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta] = p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\alpha, \beta)$.

2 Quelques propriétés des ensembles $P(\alpha, \beta)$

2.1 La partition α^-

Pour $n \geq 1$ et pour $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{R}_n$, on définit l'élément $\lambda^- \in \mathcal{R}_{n-1}$ par $\lambda^- = (\lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$. On suppose $n \geq 1$ et $(1,0) <_I (1,1)$ si $m \geq 1$. On plonge l'ensemble d'indices $I^- = (\{1,...,n-1\} \times \{0\}) \cup (\{1,...,m\} \times \{1\})$ dans I en envoyant $(i,0) \in I^-$ sur $(i+1,0) \in I$. On munit I^- de l'ordre $<_{I^-}$ induit par ce plongement et l'ordre $<_I$ sur I. On utilise cet ordre pour construire les objets relatifs à (α^-, β).

On utilisera plusieurs fois les propriétés suivantes, qui se démontrent simplement en appliquant les définitions. On suppose $m \geq 1$. Appliquons à (α, β) le procédé (a). Il construit un élément ν_1 et des partitions (α', β'). Alors

(1) le procédé (b) appliqué à (α^-, β) construit l'élément $\underline{\mu}_1 = \nu_1 - \alpha_1$ et les mêmes partitions (α', β') ;

(2) si $(1,0) <_{I^-} (1,1)$, ce qui équivaut à $(2,0) <_I (1,1)$, le procédé (a) appliqué à (α^-, β) construit l'élément $\underline{\nu}_1 = \nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2$ et les partitions (α'^-, β') ;

(3) si $(1,1) <_{I^-} (1,0)$, ce qui équivaut à $(1,1) <_I (2,0)$, le procédé (a) appliqué à (α^-, β) construit l'élément $\underline{\nu}_1 = \nu_1 - \alpha_1 - \beta_1$ et les partitions $(\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta')$.

Appliquons à (α, β) le procédé (b). Il construit un élément μ_1 et des partitions (α', β'). Alors

(4) le procédé (b) appliqué à (α^-, β) construit le même élément μ_1 et les partitions (α'^-, β').

Supposons $\alpha_1 + A \leq B$, auquel cas le procédé (b) est autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Considérons de plus des réels A', B' tels que $A \geq A'$ et $B' \geq B$. Alors

(5) le procédé (b) est autorisé pour construire les éléments de $P_{A',B';s}(\alpha^-, \beta)$.

En effet, si $(1,0) <_{I^-} (1,1)$, on doit voir que $\alpha_1^- + A' \leq B'$. Mais $\alpha_1^- + A' = \alpha_2 + A' \leq \alpha_1 + A \leq B \leq B'$. Si $(1,1) <_{I^-} (1,0)$, on doit voir que $\beta_1 + B' \geq A'$. Mais $\beta_1 + B' \geq B' \geq B \geq \alpha_1 + A \geq A \geq A'$.

2.2 L'ensemble $P^{b[c]}(\alpha, \beta)$

Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$ et soit $c \in \mathbb{N}$. On définit un sous-ensemble $P^{b[c]}(\alpha, \beta)$ de la façon suivante. Si $m = 0$, on pose $P^{b[c]}(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta)$. Supposons $m \geq 1$. Si $c = 0$, on pose $P^{b[0]}(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta)$. Supposons $c \geq 1$. Le procédé (b) construit un terme μ_1 et des partitions $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_{n'} \times \mathcal{P}_{m'}$. Alors $P^{b[c]}(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des couples $(\nu' \sqcup \{0^{n-n'}\}; \{\mu_1\} \sqcup \mu' \sqcup \{0^{m-1-m'}\})$, pour $(\nu', \mu') \in P^{b[c-1]}(\alpha', \beta')$.

Montrons que

(1) pour $c, c' \geq m$, on a $P^{b[c]}(\alpha, \beta) = P^{b[c']}(\alpha, \beta)$.

Si $m = 0$, les deux ensembles sont égaux à $P(\alpha, \beta)$. Si $m \geq 1$, donc aussi $c, c' \geq 1$, on a $m' < m$ dans la construction ci-dessus et la propriété résulte par récurrence de l'égalité $P^{b[c-1]}(\alpha', \beta') = P^{b[c'-1]}(\alpha', \beta')$.

Supposons $m \geq 1$, considérons un couple $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$ et un entier $c \in \{1,...,m\}$. Pour tout $d \in \{1,...,c\}$, on suppose donnés des réels $A(d) \geq sN - s$, $B(d) \geq sM - s$. On considère la propriété

(2) $S_d((\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(d), B(d) + s - sM]_s) = S_d(p^{N,M}_{A(d),B(d);s}[\alpha, \beta])$ pour tout $d \in \{1,...,c\}$.

Lemme. *Supposons (2) vérifiée. Alors (ν, μ) appartient à $P^{b[c]}(\alpha, \beta)$.*

Preuve. Supposons d'abord $c = 1$ et posons pour simplifier $A = A(1)$, $B = B(1)$. Notons (χ, ξ) l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Montrons tout d'abord

que

(3) cet élément est construit à l'aide du procédé (b) et on a $\mu_1 = \xi_1$.

Si $n = 0$, le procédé (b) est le seul permis et on a $\mu_1 = \beta_1 = \xi_1$. Supposons $n \geq 1$. Supposons que $(1,0) <_I (1,1)$ et $\alpha_1 + A > B$, ou que $(1,1) <_I (1,0)$ et $\beta_1 + B < A$. Alors (χ, ξ) est construit à l'aide du procédé (a). Celui-ci crée l'élément χ_1 et on a $S_1(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]) = \chi_1 + A$, cf. 1.3(1). Par l'hypothèse (2), ceci est égal à $\mu_1 + B$. Puisque $(\nu,\mu) \in P(\alpha,\beta)$, les relations 1.2(3) et 1.2(4) montrent que

si $(1,0) <_I (1,1)$, $\mu_1 \leq \chi_1 - \alpha_1$;

si $(1,1) <_I (1,0)$, $\mu_1 \leq \chi_1 + \beta_1$.

Dans le premier cas, on a $\chi_1 + A = \mu_1 + B \leq \chi_1 - \alpha_1 + B$, c'est-à-dire $\alpha_1 + A \leq B$ contrairement à l'hypothèse. Dans le deuxième, on a $\chi_1 + A = \mu_1 + B \leq \chi_1 + \beta_1 + B$, c'est-à-dire $\beta_1 + B \geq A$ contrairement à l'hypothèse. Ces contradictions prouvent que, si $(1,0) <_I (1,1)$, on a $\alpha_1 + A \leq B$, et que, si $(1,1) <_I (1,0)$, on a $\beta_1 + B \geq A$. Alors (χ,ξ) est construit à l'aide du procédé (b) d'après la définition de cet élément canonique. Cela démontre la première assertion de (3). On a donc $S_1(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]) = \xi_1 + B$ d'après 1.3(1). Par hypothèse, ceci est égal à $\mu_1 + B$, d'où $\xi_1 = \mu_1$. Cela prouve (3).

On va définir un entier $r \geq 1$ des couples de partitions $(\alpha^i, \beta^i) \in \mathcal{P}_{n_i} \times \mathcal{P}_{m_i}$ et $(\nu^i, \mu^i) \in P(\alpha^i, \beta^i)$ pour $i = 1, ..., r$. On pose $\alpha^1 = \alpha$, $\beta^1 = \beta$, $\nu^1 = \nu$, $\mu^1 = \mu$. Supposons construits ces objets jusqu'au rang i. Si $m_i = 0$ ou si $m_i > 0$ et (ν^i, μ^i) appartient à $P^b(\alpha^i, \beta^i)$, on pose $r = i$ et le procédé s'arrête. Si $m_i > 0$ et (ν^i, μ^i) n'appartient pas à $P^b(\alpha^i, \beta^i)$, alors $n_i > 0$ et (ν^i, μ^i) appartient à $P^a(\alpha^i, \beta^i)$. Ce procédé crée le terme ν^i_1 et un couple de partitions $(\alpha^{i+1}, \beta^{i+1})$. On a une égalité $\nu^i = \{\nu^i_1\} \sqcup \nu^{i+1} \sqcup \{0^{n_i - 1 - n_{i+1}}\}$, $\mu^i = \mu^{i+1} \sqcup \{0^{m_i - m_{i+1}}\}$, pour un couple $(\nu^{i+1}, \mu^{i+1}) \in P(\alpha^{i+1}, \beta^{i+1})$. Cela définit nos suites. On pose $I_i = (\{1, ..., n_i\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m_i\} \times \{1\})$. Comme en 1.2, I_{i+1} se plonge dans I_i. Par récurrence, I_i se plonge dans $I_1 = I$ et hérite d'un ordre $<_{I_i}$.

On va prouver

(4) $r = 1$.

On voit par récurrence que

pour $i = 1, ..., r$, $\nu_i = \nu^i_1$;

si $m_r > 0$, $\mu_1 = \mu^i_1$ pour $i = 1, ..., r$;

si $m_r = 0$, $\mu_1 = \mu^i_1 = 0$ pour $i = 1, ..., r-1$;

pour $i = 1, ..., r$, $\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)^a = \{\nu_1 + A, ..., \nu_{i-1} + A + 2s - si\} \sqcup \Lambda^{N+1-i,M}_{A+s-si,B}(\nu^i, \mu^i)^a$ et $\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)^b = \Lambda^{N+1-i,M}_{A+s-si,B}(\nu^i, \mu^i)^b$, où par exemple $\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)^a$ et $\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)^b$ sont les deux composantes du $(N, M; s)$-symbole $\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)$.

Supposons d'abord $m_r = 0$. Alors, comme on vient de le dire, $\mu_1 = 0$. D'après (3), on a $\xi_1 = 0$. Par construction, $\xi_1 = \beta_1 + \alpha_{a_1} + \beta_{b_2} + ...$ Donc tous ces termes sont nuls. Rappelons que a_2 est le plus petit entier i tel que $(1,1) <_I (i,0)$ si un tel entier existe. Cela entraîne $\beta = \{0^m\}$ et, si un terme α_i est non nul, on a $(i,0) <_I (1,1)$. D'après 1.2(5), $P(\alpha,\beta)$ est réduit à un seul élément, à savoir (α,β). Donc $(\nu,\mu) = (\chi,\xi)$ et (3) entraîne que (ν,μ) est construit à l'aide du procédé (b). En vertu de notre hypothèse $m > 0$, cela entraîne par définition de r que $r = 1$, mais alors les hypothèses $m_r = 0$ et $m > 0$ sont contradictoires. Supposons maintenant $m_r > 0$. Alors (ν^r, μ^r) est construit par le procédé (b) par définition de r. Celui-ci crée l'élément $\mu^r_1 = \mu_1$ et des partitions $(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$. On a $\nu^r = \nu^{r+1} \sqcup \{0^{n_r - n_{r+1}}\}$ et $\mu^r = \{\mu_1\} \sqcup \mu^{r+1} \sqcup \{0^{m_r - 1 - m_{r+1}}\}$, pour un couple $(\nu^{r+1}, \mu^{r+1}) \in P(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$. Supposons que $r \geq 2$ et supposons d'abord $(1,0) <_{I_{r-1}} (1,1)$. Alors $\nu_{r-1} = \nu^{r-1}_1 = \alpha^{r-1}_1 + \beta^{r-1}_1 + \alpha^{r-1}_{a_2} + ...$ D'après 1.2(3), on a $\mu_1 = \mu^r_1 \leq \beta^{r-1}_1 + \alpha^{r-1}_{a_2} + ... \leq \xi_1$. Les deux termes extrêmes étant égaux par (3), ces

inégalités sont des égalités. Donc $\nu_{r-1} = \alpha_1^{r-1} + \mu_1$. Le procédé (b) appliqué à $(\alpha^{r-1}, \beta^{r-1})$ crée l'élément μ_1 et le couple de partitions $(\{\alpha_1^{r-1}\} \sqcup \alpha^r, \beta^r)$. Pour l'ensemble d'indices de ce couple $(1,0)$ reste l'élément minimal. Le procédé (a) appliqué à ce couple crée donc l'élément $\alpha_1 + \mu_1^r = \alpha_1 + \mu_1$ et le couple de partitions $(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$. Il en résulte que $(\{\alpha_1 + \mu_1\} \sqcup \nu^{r+1} \sqcup \{0^{n_r - n_{r+1}}\}, \mu^{r+1} \sqcup \{0^{m_r - m_{r+1}}\})$ appartient à $P(\{\alpha_1^{r-1}\} \sqcup \alpha^r, \beta^r)$. L'élément de $P(\alpha^{r-1}, \beta^{r-1})$ qui s'en déduit par le procédé (b) est

$$(\{\alpha_1 + \mu_1\} \sqcup \nu^{r+1} \sqcup \{0^{n_{r-1}-1-n_{r+1}}\}, \{\mu_1\} \sqcup \mu^{r+1} \sqcup \{0^{m_{r-1}-1-m_{r+1}}\})$$

$$= (\{\alpha_1 + \mu_1\} \sqcup \nu^r \sqcup \{0^{n_{r-1}-1-n_r}\}, \mu^r \sqcup \{0^{m_{r-1}-m_r}\}) = (\nu^{r-1}, \mu^{r-1}).$$

Cela montre que (ν^{r-1}, μ^{r-1}) est obtenu par le procédé (b), ce qui contredit la définition de r. Supposons maintenant que $(1,1) <_{I_{r-1}} (1,0)$. Le procédé (b) appliqué à $(\alpha^{r-1}, \beta^{r-1})$ crée l'élément $\beta_1^{r-1} + \nu_1^r$ d'après 1.2(4). Comme ci-dessus, on a

$$\mu_1 = \mu_1^r \leq \beta_1^{r-1} + \nu_1^r \leq \xi_1,$$

d'où l'égalité de ces termes. Donc $\nu_1^r = \mu_1 - \beta_1^{r-1}$. Nécessairement, le premier terme de β^r est β_1^{r-1} (précisément, l'élément $(1,1)$ de l'ensemble d'indices I_r de (α^r, β^r) s'identifie au même élément $(1,1) \in I_{r-1}$) . Le procédé (b) appliqué à $(\alpha^{r-1}, \beta^{r-1})$ crée le couple de partitions $(\alpha^r, (\beta^r)^-)$. Supposons $n_r > 0$. Alors le procédé (a) appliqué à $(\alpha^r, (\beta^r)^-)$ crée l'élément $\mu_1^r - \beta_1^r = \mu_1 - \beta_1^{r-1}$ et le même couple de partitions $(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$. L'élément $(\{\mu_1 - \beta_1^{r-1}\} \sqcup \nu^{r+1} \sqcup \{0^{n_r-1-n_{r+1}}\}, \mu^{r+1} \sqcup \{0^{m_r-1-m_{r+1}}\})$ appartient à $P(\alpha^r, (\beta^r)^-)$ et l'élément de $P(\alpha^{r-1}, \beta^{r-1})$ qui s'en déduit par le procédé (b) est

$$(\{\mu_1 - \beta_1^{r-1}\} \sqcup \nu^{r+1} \sqcup \{0^{n_{r-1}-1-n_{r+1}}\}, \{\mu_1\} \sqcup \mu^{r+1} \sqcup \{0^{m_r-1-m_{r+1}}\})$$

$$= (\{\mu_1 - \beta_1^{r-1}\} \sqcup \nu^r \sqcup \{0^{n_{r-1}-1-n_r}\}, \mu^r \sqcup \{0^{m_{r-1}-m_r}\}) = (\nu^{r-1}, \mu^{r-1}).$$

Cela montre que (ν^{r-1}, μ^{r-1}) est obtenu par le procédé (b), ce qui contredit la définition de r. Il reste le cas où $n_r = 0$. On a alors $\mu_1^r = \beta_1^r$. L'égalité

$$\mu_1^r = \beta_1^{r-1} + \alpha_1^{r-1} + \beta_{b_2}^{r-1} + ...$$

entraîne que $\beta_1^r = \beta_1^{r-1}$, $\alpha_1^{r-1} = \beta_{b_2}^{r-1} = ... = 0$. Autrement dit $\alpha^{r-1} = \{0^{n_{r-1}}\}$ et les termes β_i^{r-1} ne sont non nuls que si $(i,1) <_{I_{r-1}} (1,0)$. D'après 1.2(5), il n'y a qu'un seul élément dans $P(\alpha^{r-1}, \beta^{r-1})$, qui peut être obtenu par le procédé (b) puisque $m_{r-1} > 0$. Cela contredit encore la définition de r. Cela prouve (4).

D'après l'hypothèse $m > 0$, l'égalité $r = 1$ entraîne que (ν, μ) est construit à l'aide du procédé (b). Cela démontre le lemme dans le cas $c = 1$.

Supposons maintenant $c > 1$. L'hypothèse (2) pour c est plus forte que celle pour $c - 1$. En raisonnant par récurrence, on sait que (ν, μ) appartient à $P^{b[c-1]}(\alpha, \beta)$. On pose $(\alpha^1, \beta^1) = (\alpha, \beta)$, $(\nu^1, \mu^1) = (\nu, \mu)$ et on définit maintenant un entier t et, pour $i = 1, ..., t$, des couples (α^i, β^i) et $(\nu^i, \beta^i) \in P(\alpha^i, \beta^i)$ de la façon suivante. Si (ν^i, μ^i) ne peut pas être construit par le procédé (b), on pose $t = i$ et la construction s'arrête. Si (ν^i, μ^i) est construit par le procédé (b), ce procédé crée un terme μ_1^i et des partitions $(\alpha^{i+1}, \beta^{i+1})$. On a $\nu^i = \nu^{i+1} \sqcup \{0^{n_i - n_{i+1}}\}$ et $\mu^i = \{\mu_1^i\} \sqcup \mu^{i+1} \sqcup \{0^{m_i - 1 - m_{i+1}}\}$ pour un couple $(\nu^{i+1}, \mu^{i+1}) \in P(\alpha^{i+1}, \beta^{i+1})$. On voit que $\mu_1^i = \mu_i$ (sauf éventuellement si $m_t = 0$ auquel cas μ_1^t n'existe pas ; dans ce cas, on a $\mu_t = 0$). La condition $(\nu, \mu) \in P^{b[c-1]}(\alpha, \beta)$ signifie que $t \geq c$ ou que $t < c$ et $m_t = 0$. Supposons d'abord $t < c$ et $m_t = 0$. Dans ce cas, on a $(\nu^t, \mu^t) \in P^{b[c']}(\alpha^t, \beta^t)$ pour tout $c' \in \mathbb{N}$. En particulier $(\nu^t, \mu^t) \in P^{b[c+1-t]}(\alpha^t, \beta^t)$.

Alors par récurrence, $(\nu^i, \mu^i) \in P^{b[c+1-i]}(\alpha^i, \beta^i)$, d'où $(\nu, \mu) \in P^{b[c]}(\alpha, \beta)$. Remarquons que ce raisonnement vaut aussi si $t = c$ et $m_t = 0$. Supposons maintenant $t \geq c$. Si $t \geq c+1$, alors $(\nu, \mu) \in P^{b[c]}(\alpha, \beta)$ comme on le voulait. On suppose $t = c$. Comme on vient de le dire, on peut aussi supposer $m_t > 0$. On pose pour simplifier $A = A(c)$, $B = B(c)$. Notons (χ, ξ) l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B}(\alpha, \beta)$. On applique la même construction en remplaçant (ν, μ) par (χ, ξ). On note T l'entier similaire à t et $(\underline{\alpha}^i, \underline{\beta}^i)$ et (χ^i, ξ^i) les analogues de (α^i, β^i) et (ν^i, μ^i). Evidemment, pour $i \leq inf(t, T)$, les couples de partitions (α^i, β^i) et $(\underline{\alpha}^i, \underline{\beta}^i)$ sont les mêmes. Les termes $\xi_i = \xi_1^i$ et $\mu_i = \mu_1^i$ sont aussi les mêmes pour $i = 1, ...inf(t, T) - 1$. Montrons que

(5) on a $T \geq t$.

Supposons $T < t$. On a $m_T > 0$ puisqu'on a supposé $m_t > 0$. Par définition de T, (χ^T, ξ^T) est construit à l'aide du procédé (a). En particulier $n_T > 0$. Supposons $(1, 0) <_{I_T} (1, 1)$. Puisque (χ, ξ) est l'élément canonique de type (b), et que ce procédé n'est pas utilisé, on a $\alpha_1^T + A > B + s - sT$. Puisque les partitions (α^i, β^i) pour $i = T+1, ..., t$ se déduisent de (α^T, β^T) par applications successives de procédés (b), le terme α_1^T se conserve, c'est-à-dire $\alpha_1^t = \alpha_1^T$ et $(1, 0)$ est encore le plus grand terme de l'ensemble d'indices du couple (α^t, β^t). Par définition de t, (ν^t, μ^t) est construit à l'aide du procédé (a). Ce procédé crée le terme ν_1 et des partitions $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$. On a $\nu^t = \{\nu_1\} \sqcup \nu^{t+1} \sqcup \{0^{n_t - 1 - n_{t+1}}\}$ et $\mu^t = \mu^{t+1}$ pour un couple $(\nu^{t+1}, \mu^{t+1}) \in P(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$. En particulier, le terme μ_t de notre partition μ de départ est égal à μ_1^{t+1} ou est nul si $m_{t+1} = 0$. Toujours en appliquant 1.2(3) et 1.2(4), on a $\mu_t \leq \nu_1 - \alpha_1^t$. Avec l'inégalité $\alpha_1^T + A > B + s - sT$, on en déduit $\nu_1 + A > \mu_t + B + s - st$. Mais alors

$$(6) \qquad \nu_1 + A + S_{t-1}(\{\mu_1 + B, ..., \mu_{t-1} + B + 2s - st\}) > S_t(\{\mu_1 + B, ..., \mu_t + B + s - st\}).$$

Le membre de gauche est inférieur ou égal à $S_t(p\Lambda_{A,B;s}^{N,M}(\nu, \mu))$. D'après le lemme 1.4, c'est inférieur ou égal à $S_t(p_{A,B;s}^{N,M}[\alpha, \beta])$. Or, puisque $c = t$, l'hypothèse (2) nous dit que ce dernier terme est égal au membre de droite de (6). Cela contredit cette inégalité (6) qui est stricte. Supposons maintenant $(1, 1) <_{I_T} (1, 0)$. Puisque (χ, ξ) est l'élément canonique de type (b), et que ce procédé n'est pas utilisé pour construire (χ^T, ξ^T), on a $\beta_1^T + B + s - sT < A$, a fortiori $\beta_1^t + B + s - st < A$. Par définition de t, (ν^t, μ^t) est construit à l'aide du procédé (a). Si $(1, 0) <_{I_t} (1, 1)$, on voit comme ci-dessus que $\mu_t \leq \nu_1 - \alpha_1^t$. Si au contraire $(1, 1) <_{I_t} (1, 0)$, un calcul similaire montre que $\mu_t \leq \nu_1 + \beta_1^t$. En tout cas, $\nu_1 + A > \mu_t + B + s - st$. On obtient une contradiction comme ci-dessus. Cela prouve (5).

Puisqu'on a supposé $t = c$, (5) et 1.3(1) entraînent que les $c - 1$ plus grands termes de $p\Lambda_{A,B;s}^{N,M}[\alpha, \beta]$ sont $\mu_1 + B$,...,$\mu_{c-1} + B + 2s - cs$ et

$$S_c(p\Lambda_{A,B;s}^{N,M}[\alpha, \beta]) = S_{c-1}(\{\mu_1 + B, ..., \mu_{c-1} + B + 2s - cs\}) + S_1(p\Lambda_{A,B+s-cs;s}^{N,M+1-c}[\alpha^c, \beta^c]).$$

On a aussi

$$S_c(\{\mu_1 + B, ..., \mu_c + B + s - cs\}) = S_{c-1}(\{\mu_1 + B, ..., \mu_{c-1} + B + 2s - cs\}) + S_1(\{\mu_1^c + B + s - cs\}).$$

D'après (2), on a donc

$$S_1(\{\mu_1^c + B + s - cs\}) = S_1(p\Lambda_{A,B+s-cs;s}^{N,M+1-c}[\alpha^c, \beta^c]).$$

Mais alors les couples (α^c, β^c) et (ν^c, μ^c) satisfont les hypothèses de l'énoncé pour le nouvel entier $c = 1$. Ce cas a déjà été traité : cela entraîne que $(\nu^c, \mu^c) \in P^b(\alpha^c, \beta^c)$. Cela contredit la définition de t et l'égalité $t = c$. Cette contradiction achève la démonstration. $\square$

2.3 Relation entre $P(\alpha,\beta)$ et $P(\alpha^-,\beta)$

Supposons $n \geq 1$, soit $x \in \mathbb{N}$ et soit $c \in \mathbb{N}$ avec $c \geq 1$. Soit $(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^m$. On définit $(\nu,\mu) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$ par :

si $c \leq m$, $\nu_1 = x + \underline{\mu}_c$, $\nu_i = \underline{\nu}_{i-1}$ pour $i = 2,...,n$, $\mu_j = \underline{\mu}_j$ pour $j = 1,...,c-1$, $\mu_j = \underline{\mu}_{j+1}$ pour $j = c,...,m-1$, $\mu_m = 0$;

si $c \geq m+1$, $\nu_1 = x$, $\nu_i = \underline{\nu}_{i-1}$ pour $i = 2,...,n$, $\mu_j = \underline{\mu}_j$ pour $j = 1,...,m$.

On définit note $\iota_{c,x} : \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$ l'application qui, à $(\underline{\nu},\underline{\mu})$, associe (ν,μ). Remarquons que $\iota_{c,x} = \iota_{c',x}$ pour $c,c' \geq m+1$.

Soit maintenant $(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$ et supposons $(1,0) <_I (1,1)$.

Lemme. *(i) Pour tout $(\nu,\mu) \in P(\alpha,\beta)$, il existe $(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in P(\alpha^-,\beta)$ et $c \in \{1,...,m+1\}$ de sorte que $(\nu,\mu) = \iota_{c,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu})$.*

(ii) Soit $c \in \mathbb{N}$ avec $c \geq 1$ et soit $(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in P^{b[c]}(\alpha^-,\beta)$. Alors $\iota_{c,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu})$ appartient à $P(\alpha,\beta)$.

Preuve de (i). Si $m = 0$, les ensembles $P(\alpha,\beta)$ et $P(\alpha^-,\beta)$ sont réduits à l'élément $(\alpha,\emptyset)$, resp. $(\alpha^-,\emptyset)$ et on a $\iota_{1,\alpha_1}(\alpha^-,\emptyset) = (\alpha,\emptyset)$.

On suppose désormais $m > 0$ et on raisonne par récurrence sur $n+m$. Soit $(\nu,\mu) \in P(\alpha,\beta)$. Supposons que cet élément soit construit à l'aide du procédé (a). Ce procédé crée un élément ν_1 et des partitions (α',β'). On a $\nu = \{\nu_1\} \sqcup \nu' \sqcup \{0^{n'-n-1}\}$, $\mu = \mu' \sqcup \{0^{m'-m}\}$ pour un couple $(\nu',\mu') \in P(\alpha',\beta')$. Puisque $m \geq 1$, on peut appliquer le procédé (b) pour construire les éléments de $P^b(\alpha^-,\beta)$. D'après 2.1(1), ce procédé crée un élément $\underline{\mu}_1 = \nu_1 - \alpha_1$ et les mêmes partitions (α',β'). En conséquence, le couple $(\underline{\nu},\underline{\mu}) = (\nu' \sqcup \{0^{n-1-n'}\}, \{\mu_1\} \sqcup \mu' \sqcup \{0^{m-1-m'}\})$ appartient à $P(\alpha^-,\beta)$. On vérifie que $(\nu,\mu) = \iota_{1,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu})$, ce qui conclut.

Supposons au contraire que (ν,μ) soit construit à l'aide du procédé (b). Ce procédé crée un élément μ_1 et des partitions (α',β'). L'hypothèse $(1,0) <_I (1,1)$ implique que le plus grand terme de α' est α_1 (ou plus précisément, que le terme $(1,0)$ de l'ensemble d'indices I' associé à (α',β') s'identifie à $(1,0) \in I$). On a $\nu = \nu' \sqcup \{0^{n-n'}\}$, $\mu = \{\mu_1\} \sqcup \mu' \sqcup \{0^{m-m'-1}\}$, pour un couple $(\nu',\mu') \in P(\alpha',\beta')$. Par hypothèse de récurrence, il existe $c \in \{1,...,m'+1\}$ et $(\underline{\nu}',\underline{\mu}') \in P(\alpha'^-,\beta')$ de sorte que $(\nu',\mu') = \iota_{c,\alpha_1}(\underline{\nu}',\underline{\mu}')$. On peut appliquer le procédé (b) pour construire les éléments de $P^b(\alpha^-,\beta)$. D'après 2.1(4), ce procédé crée le même élément μ_1 et les partitions (α'^-,β'). En conséquence, le couple $(\underline{\nu},\underline{\mu}) = ((\underline{\nu}' \sqcup \{0^{n-n'}\}, \{\mu_1\} \sqcup \underline{\mu}' \sqcup \{0^{m-m'-1}\})$ appartient à $P(\alpha^-,\beta)$. Mais on voit que $(\alpha,\beta) = \iota_{c+1,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu})$ et on a $c+1 \leq m+1$ puisque $m' < m$. Cela achève la preuve de (i).

Preuve de (ii). Le cas $m = 0$ se traite comme ci-dessus. On suppose $m > 0$. Le procédé (b) est loisible pour définir l'ensemble $P^b(\alpha^-,\beta)$. Ce procédé crée un élément μ_1 et des partitions $(\alpha',\beta') \in \mathcal{P}_{n'} \times \mathcal{P}_{m'}$. Par définition de l'ensemble $P^{b[c]}(\alpha^-,\beta)$, on a $\underline{\nu} = \nu' \sqcup \{0^{n-1-n'}\}$, $\underline{\mu} = \{\mu_1\} \sqcup \mu' \sqcup \{0^{m-1-m'}\}$ pour un élément $(\nu',\mu') \in P^{b[c-1]}(\alpha',\beta')$. Supposons d'abord $c = 1$. Parce que $(1,0) <_I (1,1)$ et d'après 2.1(1), le procédé (a) appliqué à (α,β) crée l'élément $\nu_1 = \alpha_1 + \mu_1$ et les mêmes partitions (α',β'). Alors le couple $(\nu_1 \sqcup \nu' \sqcup \{0^{n-1-n'}\}, \mu')$ appartient à $P(\alpha,\beta)$. Or ce couple est égal à $\iota_{1,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu})$. Supposons maintenant $c \geq 2$. Toujours parce que $(1,0) <_I (1,1)$ et d'après 2.1(4), le procédé (b) appliqué à (α,β) crée le même élément μ_1 et le couple de partitions $(\alpha'',\beta'') = (\{\alpha_1\} \sqcup \alpha', \beta')$. On a $\alpha' = \alpha''^-$. 0n applique le lemme par récurrence : l'élément $(\underline{\nu}'',\underline{\mu}'') = \iota_{c-1,\alpha_1}(\nu',\mu')$ appartient à $P(\alpha'',\beta'')$. Alors, par le procédé (b), le couple

$(\nu,\mu) = (\underline{\nu}'' \sqcup \{0^{n-n''}\}, \{\mu_1\} \sqcup \underline{\mu}'' \sqcup \{0^{m-1-m''}\})$ appartient à $P(\alpha,\beta)$. On vérifie que les couples (ν,μ) et $\iota_{c,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu})$ sont tous deux égaux à

$(\{\alpha_1+\mu'_{c-1},\nu'_1,...,\nu'_{n'},0,...,0\},\{\mu_1,\mu'_1,...,\mu'_{c-2},\mu'_c,...,\mu'_{m'},0...,0\})$ si $c \leq m'+1$,

$(\{\alpha_1,\nu'_1,...,\nu'_{n'},0,...,0\},\{\mu_1,\mu'_1,...,\mu'_{m'},0...,0\})$ si $c > m'+1$.

Donc $\iota_{c,\alpha_1}(\underline{\nu},\underline{\mu}) = (\nu,\mu)$ appartient à $P(\alpha,\beta)$. Cela achève la démonstration. □

2.4 Nombres d'éléments "de type b"

Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$, $\beta \in \mathcal{P}_m$. Introduisons l'élément canonique de type (b) $(\nu,\mu) \in P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$. Soit $k \in \{1,...,N+M\}$. Il existe des entiers $a,b \in \mathbb{N}$ tels que $a+b=k$, de sorte que l'ensemble des k plus grands éléments de $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta] = p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)$ soient la réunion de celui des a plus grands termes de $(\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s$ et de celui des b plus grands termes de $(\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B, B+s-sM]_s$. Les entiers a et b ne sont pas complètement déterminés car les deux partitions intervenant peuvent avoir des termes communs : si le a-ième terme de la première est égal au $(b+1)$-ième terme de la seconde, le couple $(a-1,b+1)$ convient lui-aussi. On choisit a et b de sorte que b soit le plus grand possible. On note alors $b^{N,M}_{A,B;s}(\alpha,\beta;k) = b$.

Lemme. *(i) Il existe un entier $e \in \mathbb{N}$ tel que $b^{N,M}_{A,B+es/2;s}(\alpha,\beta;k) = inf(k,M)$ pour tout $k = 1,...N+M$.*

(ii) On a

$$b^{N,M}_{A,B;s}(\alpha,\beta;k) \leq b^{N,M}_{A,B+s/2;s}(\alpha,\beta;k) \leq b^{N,M}_{A,B;s}(\alpha,\beta;k)+1$$

pour tout $k = 1,...,N+M$.

Preuve. Les termes des éléments de $P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$ sont des sommes de termes de α et de termes de β. Ils restent donc dans un ensemble fini d'entiers indépendant de A et B. Notons c le plus grand élément de cet ensemble. Choisissons e tel que $B+es/2+s-sM > c+A$. Pour l'élément canonique de type (b) $(\nu,\mu) \in P_{A,B+es/2;s}(\alpha,\beta)$, il est clair que les termes de $(\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B+es/2, B+es/2+s-sM]_2$ sont tous strictement supérieurs aux termes de $(\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_2$. Alors e vérifie la propriété (i).

Fixons $k \in \{1,...,N+M\}$. On pose $b = b^{N,M}_{A,B;s}(\alpha,\beta;k)$, $\underline{b} = b^{N,M}_{A,B+s/2;s}(\alpha,\beta;k)$, $a = k-b$, $\underline{a} = k-\underline{b}$. L'assertion (ii) est évidente si $N=0$ (on a $b=\underline{b}=k$) ou $M=0$ (on a $b=\underline{b}=0$). On suppose $N,M \geq 1$.

Supposons d'abord $n=0$ ou $m=0$. On a $(\nu,\mu) = (\alpha,\beta)$. Pour simplifier, posons $\alpha_i = 0$ pour $i = n+1,...,N$ et $\beta_i = 0$ pour $i = m+1,...,M$. Les entiers a et b sont caractérisés par les propriétés

$0 \leq a \leq N$, $0 \leq b \leq M$, $a+b=k$;

(1) les termes $\beta_1+B, \beta_2+B-s, ..., \beta_b+B+s-sb$ sont supérieurs ou égaux à $\alpha_{a+1}+A-sa, ..., \alpha_N+A+s-sN$ ainsi qu'à $\beta_{b+1}+B-sb, ..., \beta_M+B+s-sM$;

(2) les termes $\alpha_1+A, \alpha_2+A-s, ..., \alpha_a+A+s-sa$ sont strictement supérieurs à $\alpha_{a+1}+A-sa, ..., \alpha_N+A+s-sN$ ainsi qu'à $\beta_{b+1}+B-sb, ..., \beta_M+B+s-sM$.

La propriété (1) se conserve quand on remplace B par $B+s/2$. Si la propriété (2) se conserve également, on a $\underline{b}=b$ et $\underline{a}=a$. Supposons que la propriété (2) ne se conserve pas. Cela entraîne $a \geq 1$, $b < M$ et $\alpha_a+A+s-sa \leq \beta_{b+1}+B+s/2-sb$. Mais alors

les termes $\beta_1+B+s/2, \beta_2+B-s/2, ..., \beta_{b+1}+B+s/2-sb$ sont supérieurs ou égaux à $\alpha_a+A-sa, ..., \alpha_N+A+s-sN$ ainsi qu'à $\beta_{b+2}+B-s/2-sb, ..., \beta_M+B+3s/2-sM$;

les termes $\alpha_1 + A, \alpha_2 + A - s, ..., \alpha_{a-1} + A + 2s - sa$ sont strictement supérieurs à $\alpha_a + A + s - sa, ..., \alpha_N + A + s - sN$ ainsi qu'à $\beta_{b+2} + B - s/2 - sb, ..., \beta_M + B + 3s/2 - sM$.

D'où $\underline{b} = b + 1$ et $\underline{a} = a - 1$.

On suppose maintenant $n, m \geq 1$. Introduisons les éléments canoniques de type (b) $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ et $(\underline{\nu}, \underline{\mu}) \in P_{A,B+s/2;s}(\alpha, \beta)$. On utilise les notations habituelles pour (ν, μ) et les mêmes notations soulignées pour $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$. Supposons d'abord que les éléments (ν, μ) et $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$ soient construits à l'aide du même précédé, par exemple le procédé (b). Ce procédé crée un terme μ_1 et des partitions (α', β'). On a $(\nu, \mu) = (\nu', \{\mu_1\} \sqcup \mu')$ où (ν', μ') est l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B-s;s}(\alpha', \beta')$ et $(\underline{\nu}, \underline{\mu}) = (\underline{\nu}', \{\mu_1\} \sqcup \underline{\mu}')$ où $(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$ est l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B-s/2;s}(\alpha', \beta')$. D'où $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = \{\mu_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s;s}(\nu', \mu')$ et $p\Lambda^{N,M}_{A,B+s/2;s}(\underline{\nu}, \underline{\mu}) = \{\mu_1 + B + s/2\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s/2;s}(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$. Si $k = 1$, on voit que $b = \underline{b} = 1$. Si $k \geq 2$, on voit que $b = 1 + b^{N,M}_{A,B-s;s}(\alpha', \beta'; k-1)$, $\underline{b} = 1 + b^{N,M-1}_{A,B-s/2;s}(\alpha', \beta'; k-1)$. L'assertion à prouver s'ensuit par récurrence.

On suppose maintenant que les éléments (ν, μ) et $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$ soient construits à l'aide de procédés différents. Supposons d'abord $(1, 0) <_I (1, 1)$. Si (ν, μ) est construit à l'aide du procédé (b), on a $\alpha_1 + A \leq B$. Mais alors $\alpha_1 + A < B + s/2$ et $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$ est aussi construit à l'aide du procédé (b), contrairement à l'hypothèse. Donc (ν, μ) est construit à l'aide du procédé (a). On a donc $\alpha_1 + A > B$ (si on a égalité, la construction de l'élément canonique de type (b) privilégie le procédé (b)). L'élément $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$ est construit à l'aide du procédé (b) donc $\alpha_1 + A \leq B + s/2$. Le procédé (a) construit un élément ν_1 et des partitions (α', β'). Puisque $(1, 0) <_I (1, 1)$, le procédé (b) construit d'après 1.2(4) l'élément $\underline{\mu}_1 = \nu_1 - \alpha_1$ et les partitions $(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha', \beta')$. On obtient $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = \{\nu_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu', \mu')$ où (ν', μ') est l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B;s}(\alpha', \beta')$et $p\Lambda^{N,M}_{A,B+s/2;s}(\underline{\nu}, \underline{\mu}) = \{\underline{\mu}_1 + B + s/2\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s/2;s}(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$ où $(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$ est l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B-s/2;s}(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha', \beta')$. Si $k = 1$, on voit que $b = 0$ et $\underline{b} = 1$. Supposons $k \geq 2$. Supposons d'abord $n', m' \geq 1$. L'élément $(1, 0)$ reste le plus petit élément de l'ensemble d'indices de $(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha', \beta')$. L'inégalité $\alpha_1 + A > B$ entraîne $\alpha_1 + A > B - s/2$. Donc l'élément $(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$ est construit à l'aide du procédé (a). Ce procédé crée un terme $\underline{\nu}_1$ et des partitions (α'', β''). On obtient

$$(3) \qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B+s/2;s}(\underline{\nu}, \underline{\mu}) = \{\underline{\mu}_1 + B + s/2\} \sqcup \{\underline{\nu}_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s/2;s}(\underline{\nu}'', \underline{\mu}''),$$

où $(\underline{\nu}'', \underline{\mu}'')$ est l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B-s/2;s}(\alpha'', \beta'')$. Considérons l'ensemble d'indices I' relatif au couple (α', β'). Si $(1, 0) <_{I'} (1, 1)$, l'égalité $\alpha_1 + A \leq B + s/2$ entraîne $\alpha'_1 + A - s < B$ et (ν', μ') est construit à l'aide du procédé de type (b). Si $(1, 1) <_{I'} (1, 0)$, la même inégalité entraîne $\beta'_1 + B > A - s$ et la même conclusion. D'après 2.1(1), ce procédé (b) crée l'élément $\mu_1 = \underline{\nu}_1 - \alpha_1$ et les mêmes partitions (α'', β''). On obtient

$$(4) \qquad p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = \{\nu_1 + A\} \sqcup \{\mu_1 + B\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\nu'', \mu''),$$

où (ν'', μ'') est l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B-s}(\alpha'', \beta'')$. Remarquons que les termes de (3) et (4) sont en ordre décroissant, au sens renforcé qui intervient dans la définition de b et $\underline{b}$: par exemple, dans (3), on a $\underline{\mu}_1 + B + s/2 \geq \underline{\nu}_1 + A$ et $\underline{\nu}_1 + A$ est strictement supérieur aux termes suivants, ainsi qu'il résulte de 1.3(6).

On a supposé $n', m' \geq 1$. Supposons maintenant $n' = 0$ ou $m' = 0$ et montrons que l'on a encore l'égalité (3). L'hypothèse $n' \geq 1$ n'a pas servi pour obtenir (3). Si $m' = 0$, seul le procédé (a) est autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B-s/2}(\{\alpha_1\} \sqcup \alpha', \beta')$.

Cela conduit à l'égalité (3) où on a simplement $\underline{\nu}_1 = \alpha_1$ et $\underline{\mu}'' = \emptyset$. Le plus grand terme de $p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B-s/2;s}(\underline{\nu}'', \underline{\mu}'')$ est soit $\underline{\nu}''_1 + A - s$ (avec la convention $\underline{\nu}''_1 = 0$ si $n'' = 0$) soit $B - s/2$. Ces termes sont strictement inférieurs à $\alpha_1 + A$ en vertu de l'inégalité $\alpha_1 + A > B$ et parce que $\underline{\nu}''_1$ est ici soit nul, soit un terme de la partition α'. Notons que, si $n' = 0$ ou $m' = 0$, on a $\alpha'' = \alpha'$ et β'' est égal soit à $\beta' = \emptyset$ si $m' = 0$, soit à β' privé de son plus grand terme β'_1 si $m' \geq 1$. Tournons-nous vers l'égalité (4). La partition $p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\alpha', \beta')$ est alors $\{\alpha'_1 + A - s, ..., \alpha'_{N-1} + A + s - sN\} \sqcup \{\beta'_1 + B, ..., \beta'_M + B + s - sM\}$ avec la convention $\alpha'_i = 0$ si $i \geq n' + 1$ et $\beta'_i = 0$ si $i \geq m' + 1$. Le plus grand terme de cette partition est $\beta'_1 + B$ en vertu de l'inégalité $\alpha_1 + A \leq B + s/2$ qui implique $\alpha'_1 + A - s < B$. On obtient l'égalité (4) où $\mu_1 = \beta'_1$ et où (α'', β'') est le couple décrit ci-dessus.

On suppose maintenant $(1, 1) <_I (1, 0)$. Si (ν, μ) est construit à l'aide du procédé (b), on a $\beta_1 + B \geq A$ mais alors $\beta_1 + B + s/2 > A$ et $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$ est construit à l'aide du procédé (b) contrairement à l'hypothèse. Donc (ν, μ) est construit à l'aide du procédé (a). On a donc $\beta_1 + B < A$ (si on a égalité, la construction de l'élément canonique de type (b) privilégie le procédé (b)). L'élément $(\underline{\nu}, \underline{\mu})$ est construit à l'aide du procédé (b) donc $\beta_1 + B + s/2 \geq A$. Le procédé (b) construit un élément $\underline{\mu}_1$ et des partitions (α', β'). D'après 1.2(4), le procédé (a) construit un élément $\nu_1 = \underline{\mu}_1 - \beta_1$ et les partitions $(\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta')$. On obtient $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = \{\nu_1 + A\} \sqcup p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu', \mu')$ où (ν', μ') est l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B;s}(\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta')$et $p\Lambda^{N,M}_{A,B+s/2;s}(\underline{\nu}, \underline{\mu}) = \{\underline{\mu}_1 + B + s/2\} \sqcup p\Lambda^{N,M-1}_{A,B-s/2;s}(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$ où $(\underline{\nu}', \underline{\mu}')$ est l'élément canonique de type (b) de $P_{A,B-s/2}(\alpha', \beta')$. Si $k = 1$, on voit que $b = 0$ et $\underline{b} = 1$. Supposons $k \geq 2$. Supposons d'abord $n', m' \geq 1$. L'élément $(1, 1)$ reste le plus petit élément de l'ensemble d'indices de $(\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta')$. L'inégalité $\beta_1 + B + s/2 \geq A$ entraîne $\beta_1 + B > A - s$. Donc l'élément (ν', μ') est construit à l'aide du procédé (b). Ce procédé crée un terme μ_1 et des partitions (α'', β''). On obtient l'égalité (4) où (ν'', μ'') est encore l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B-s;s}(\alpha'', \beta'')$. Considérons l'ensemble d'indices I' relatif au couple (α', β'). Si $(1, 0) <_{I'} (1, 1)$, l'égalité $\beta_1 + B < A$ entraîne $\alpha'_1 + A > B - s$ et (ν', μ') est construit à l'aide du procédé de type (a). Si $(1, 1) <_{I'} (1, 0)$, la même égalité entraîne $\beta'_1 + B - s < A$ et la même conclusion. On applique 2.1(1) en échangeant les rôles des deux partitions : le procédé (a) crée l'élément $\underline{\nu}_1 = \mu_1 - \beta_1$ et les mêmes partitions (α'', β''). On obtient l'égalité (3) où $(\underline{\nu}'', \underline{\mu}'')$ est encore l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B-s/2}(\alpha'', \beta'')$. Les termes de (3) et (4) sont encore en ordre décroissant, au sens renforcé qui intervient dans la définition de b et $\underline{b}$. On a supposé $n', m' \geq 1$ mais, comme plus haut, on vérifie que les égalités (3) et (4) et leurs propriétés de décroissance restent vraies si on lève cette hypothèse.

Les égalités (3) et (4) sont donc établies en tout cas (pour $k \geq 2$). Si $k = 2$, on voit que $b = \underline{b} = 1$. Si $k \geq 3$, on a $b = 1 + b^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\alpha'', \beta''; k-2)$ et $\underline{b} = 1 + b^{N-1,M-1}_{A-s,B-s/2}(\alpha'', \beta''; k-2)$. Le résultat cherché s'ensuit par récurrence. $\square$

2.5 Modification de l'ensemble d'indices

Soient $n', m' \in \mathbb{N}$ tels que $n' \leq n$ et $m' \leq m$. On suppose $(n' + 1, 0) >_I (m', 1)$ si $n' < n$ et $m' \geq 1$ et $(m' + 1, 1) >_I (n', 0)$ si $m' < m$ et $n' \geq 1$. Soient $\alpha' \in \mathcal{P}_{n'}$, $\beta' \in \mathcal{P}_{m'}$, posons $\alpha = \alpha' \sqcup \{0^{n-n'}\}$, $\beta = \beta' \sqcup \{0^{m-m'}\}$. L'ensemble d'indices $I' = (\{1, ..., n'\} \times \{0\}) \times (\{1, ..., m'\} \times \{1\})$ est un sous-ensemble de I, on le munit de l'ordre induit. Cela permet de définir les ensembles $P(\alpha', \beta')$ et $P_{A,B;s}(\alpha', \beta')$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a*

$$P(\alpha,\beta)=\{(\nu'\sqcup\{0^{n-n'}\},\mu'\sqcup\{0^{m-m'}\};(\nu',\mu')\in P(\alpha',\beta')\},$$

$$P_{A,B;s}(\alpha,\beta)=\{(\nu'\sqcup\{0^{n-n'}\},\mu'\sqcup\{0^{m-m'}\});(\nu',\mu')\in P_{A,B;s}(\alpha',\beta')\}.$$

Preuve. Si $n=0$ ou $m=0$, on a $P(\alpha,\beta)=P_{A,B;s}(\alpha,\beta)=\{(\alpha,\beta)\}$ et $P(\alpha',\beta')=P_{A,B;s}(\alpha',\beta')=\{(\alpha',\beta')\}$ et le résultat s'ensuit. On suppose $n,m\geq 1$. On raisonne par récurrence sur $n+m-n'-m'$. Supposons que l'on ait traité le cas où cet entier vaut 1, et traitons le cas où il est strictement supérieur à 1. Supposons par exemple $(n,0)<_I(m,1)$. Avec les hypothèses posées avant l'énoncé, cela entraîne $m'<m$. On pose $\beta''=\beta\sqcup\{0^{m-m'-1}\}$. On voit alors que les paires (α',β') et (α,β'') vérifient les mêmes conditions que ci-dessus, m étant remplacé par $m-1$. Et que les paires (α,β'') et (α,β) vérifient aussi ces conditions, (n',m') étant remplacé par $(n,m-1)$. Par récurrence, on peut appliquer le lemme à chacun des deux couples de paires et le résultat s'ensuit. Il nous reste à traiter le cas où $n+m-n'-m'=1$. On ne perd rien à supposer $n'=n$ et $m'=m-1$. Avec les hypothèses posées avant l'énoncé, cela entraîne $(n,0)<_I(m,1)$. Supposons d'abord $m=1$, donc $m'=0$. On a encore $P(\alpha,\beta')=P_{A,B;s}(\alpha,\beta')=\{(\alpha,\beta')\}$. D'après 1.2(5), on a aussi $P(\alpha,\beta)=P_{A,B;s}(\alpha,\beta)=\{(\alpha,\beta)\}$ et le résultat s'ensuit. Supposons maintenant $m\geq 2$. Le procédé (a) appliqué à (α,β') crée un élément $\nu_1=\alpha_1+\beta'_{b_1}+\alpha_{a_2}+...$ et des partitions, notons-les ici $(\underline{\alpha},\underline{\beta}')\in\mathcal{P}_{\underline{n}}\times\mathcal{P}_{\underline{m}'}$. Le terme $(m,1)$ est le plus grand terme de l'ensemble d'indices I. On voit alors que

(1) si le dernier terme de ν_1 est α_{a_t}, le procédé (a) appliqué à (α,β) crée le terme $\alpha_1+\beta'_{b_1}+\alpha_{a_2}+...+\alpha_{a_t}+\beta_m=\nu_1$ (puisque $\beta_m=0$) et les mêmes partitions $(\underline{\alpha},\underline{\beta}')$;

(2) si le dernier terme de ν_1 est β'_{b_t}, le procédé (a) appliqué à (α,β) crée le même terme ν_1 et les partitions $(\underline{\alpha},\underline{\beta}'\sqcup\{0\})$.

Dans le cas (1), on a

$$(3)\qquad P^a(\alpha,\beta')=\{(\nu_1\sqcup\underline{\nu}\sqcup\{0^{n-\underline{n}-1}\},\underline{\mu}'\sqcup\{0^{m'-\underline{m}'}\});(\underline{\nu},\underline{\mu}')\in P(\underline{\alpha},\underline{\beta}')\};$$

$$P^a(\alpha,\beta)=\{(\nu_1\sqcup\underline{\nu}\sqcup\{0^{n-\underline{n}-1}\},\underline{\mu}'\sqcup\{0^{m-\underline{m}'}\});(\underline{\nu},\underline{\mu}')\in P(\underline{\alpha},\underline{\beta}')\}.$$

On en déduit l'analogue de la première égalité de l'énoncé où $P(\alpha,\beta)$ et $P(\alpha,\beta')$ sont remplacés par $P^a(\alpha,\beta)$ et $P^a(\alpha,\beta')$. Dans le cas (2), on a encore (3) et

$$P^a(\alpha,\beta)=\{(\nu_1\sqcup\underline{\nu}\sqcup\{0^{n-\underline{n}-1}\},\underline{\mu}\sqcup\{0^{m-\underline{m}'-1}\});(\underline{\nu},\underline{\mu})\in P(\underline{\alpha},\underline{\beta})\},$$

où $\underline{\beta}=\underline{\beta}'\sqcup\{0\}$. Mais $(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ et $(\underline{\alpha},\underline{\beta}')$ sont dans la même situation que (α,β) et (α,β'). En raisonnant par récurrence sur $n+m$, on peut appliquer l'énoncé pour décrire $P(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ à l'aide de $P(\underline{\alpha},\underline{\beta}')$. Les égalités ci-dessus conduisent alors à l'analogue de la première égalité de l'énoncé où $P(\alpha,\beta)$ et $P(\alpha,\beta')$ sont remplacés par $P^a(\alpha,\beta)$ et $P^a(\alpha,\beta')$. Cette analogue est donc démontrée dans les deux cas (1) et (2). On a raisonné avec le procédé (a). Le même raisonnement s'applique au précédé (b), avec une conclusion similaire. La réunion de ces deux conclusions entraîne la première égalité de l'énoncé. Pour la seconde, le fait que le procédé (a) ou (b) soit autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B;s}(\alpha,\beta')$ ou $P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$ ne dépend que de α_1 et β_1. Ces termes sont les mêmes pous nos deux couples de partitions (rappelons que $n\geq 1$ et $m'=m-1\geq 1$) donc les mêmes procédés sont autorisés pour ces deux couples. Le raisonnement se poursuit alors comme ci-dessus et conduit à la conclusion. $\square$

3 Trois lemmes de majorations

3.1 Premier lemme

On suppose $n \geq 1$ et $(1,0) <_I (1,1)$ si $m \geq 1$. Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$.

Lemme. *Pour tout $k = 1, ..., N+M$, on a l'inégalité*

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]) \leq S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]) \leq S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]) + \alpha_1 + \beta_1,$$

avec la convention $\beta_1 = 0$ si $m = 0$.

Il y a un lemme symétrique en échangeant les rôles de α et β. On doit alors supposer $m \geq 1$ et $(1,1) <_I (1,0)$. On définit la partition β^- et, dans l'énoncé ci-dessus, on remplace le couple (α^-, β) par (α, β^-). La démonstration de ces lemmes sera donnée en 3.3.

3.2 Deuxième lemme

Lemme. *On suppose $N > n$ et $M > m$. Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$. Pour tout $k \in \{1, ..., N+M-1\}$, on a l'inégalité*

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) \leq S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) + sup(\alpha_1 + A - B, 0),$$

avec la convention $\alpha_1 = 0$ si $n = 0$.

Là encore, il y a un symétrique de ce lemme obtenu en échangeant les rôles de α et β et, simultanément, ceux de A et B ainsi que de N et M. La démonstration sera donnée en 3.4.

Pour démontrer ce lemme, le lemme précédent et leurs symétriques, on raisonnne par récurrence sur $n+m$. C'est-à-dire que l'on vérifiera les quatre lemmes dans le cas $n = m = 0$ (en fait dans les cas $n = 0$ ou $m = 0$). Ensuite, on supposera que $n + m \geq 1$ et que les quatre lemmes sont vérifiés pour des couples (n', m') tels que $n' + m' < n + m$. On ne fera les démonstrations que des lemmes énoncés, celles des symétriques étant évidemment analogues. Pour simplifier l'écriture, on adopte dans ces démonstrations la convention suivante : pour une partition, par exemple $\alpha \in \mathcal{P}_n$, on pose $\alpha_i = 0$ pour $i > n$.

3.3 Preuve du lemme 3.1

Si $m = 0$, on a

$$p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]) = \{\alpha_1 + A, ..., \alpha_N + A + s - sN\} \sqcup \{B, ..., B + s - sM\}$$

et

$$p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]) = \{\alpha_2 + A, ..., \alpha_{N+1} + A + s - sN\} \sqcup \{B, ..., B + s - sM\}.$$

La première inégalité de l'énoncé résulte des inégalités $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ pour $i = 1, ..., N$. Pour la seconde, il existe $a \in \{0, ..., N\}$ et $b \in \{0, ..., M\}$ tels que $a + b = k$ et

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]) = S_a(\{\alpha_1 + A, ..., \alpha_N + A + s - sN\}) + S_b(\{B, ..., B + s - sM\}).$$

On a

$$S_a(\{\alpha_1 + A, ..., \alpha_N + A + s - sN\}) = \alpha_1 - \alpha_{a+1} + S_a(\{\alpha_2 + A, ..., \alpha_{N+1} + A + s - sN\}).$$

D'où

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]) \leq \alpha_1 + S_a(\{\alpha_2 + A, ..., \alpha_{N+1} + A + s - sN\}) + S_b(\{B, ..., B + s - sM\})$$

$$\leq \alpha_1 + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]).$$

On suppose $m \geq 1$. Supposons d'abord $\alpha_1 + A \leq B$. Le procédé (b) est autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. D'après 2.1(5), il en est de même pour l'ensemble $P_{A,B;s}(\alpha^-, \beta)$. Le procédé (b) appliqué à α, β construit un terme μ_1 et des partitions $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_{n'} \times \mathcal{P}_{m'}$. D'après 2.1(4), le même procédé appliqué à (α^-, β) construit le même terme μ_1 et le couple de partitions $(\alpha'^-, \beta') \in \mathcal{P}_{n'-1} \times \mathcal{P}_{m'}$. Il y a donc un élément de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ de la forme $(\nu', \{\mu_1\} \sqcup \mu')$ pour un élément $(\nu', \mu') \in P_{A,B-s;s}(\alpha', \beta')$, et un élément de $P_{A,B;s}(\alpha^-, b)$ de la forme $(\nu'', \{\mu_1\} \sqcup \mu'')$ pour un élément $(\nu'', \mu'') \in P_{A,B-s;s}(\alpha'^-, \beta')$. On obtient $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta] = \{\mu_1 + B\} \sqcup p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha', \beta']$ et $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta] = \{\mu_1 + B\} \sqcup p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha'^-, \beta']$. Les inégalités à prouver sont alors claires si $k = 1$. Si $k \geq 2$, on a par récurrence

$$S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha'^-, \beta']) \leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha', \beta']) \leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha'^-, \beta']) + \alpha'_1 + \beta'_1.$$

Les inégalités de l'énoncé s'ensuivent puisque $\alpha'_1 \leq \alpha_1$ et $\beta'_1 \leq \beta_1$.

Supposons maintenant $\alpha_1 + A > B$. On construit un élément de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ par le procédé (a). Celui-ci nous fournit un terme ν_1 et des partitions $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_{n'} \times \mathcal{P}_{m'}$. Un élément de $P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ est de la forme $(\{\nu_1\} \sqcup \nu', \mu')$ pour un élément $(\nu', \mu') \in P_{A-s,B;s}(\alpha', \beta')$ d'où

$$(1) \qquad p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta] = \{\nu_1 + A\} \sqcup p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha', \beta'].$$

Supposons $n = 1$. Alors $\nu_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $\alpha' = \alpha^- = \emptyset$ et $\beta' = \beta^-$. On a $n' = 0$ d'où

$$p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha', \beta'] = [A - s, A + s - sN]_s \sqcup ((\beta^- \sqcup \{0^{M-m+1}\} + [B, B + s - sM]_s).$$

D'où

$$p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta] = \{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\} \sqcup \{\beta_2 + B, \beta_3 + B - s, ..., \beta_{M+1} + B + s - sM\}.$$

On a aussi

$$p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta] = \{A, A - s, ..., A + s - sN\} \sqcup \{\beta_1 + B, \beta_2 + B - s, ..., \beta_M + B + s - sM\}.$$

On peut fixer des entiers $a \in \{0, ..., N\}$ et $b \in \{0, ..., M\}$ tels que $a + b = k$ et

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]) = S_a(\{A, A - s, ..., A + s - sN\}) + S_b(\{\beta_1 + B, \beta_2 + B - s, ..., \beta_M + B + s - sM\}).$$

Supposons d'abord $a \geq 1$. Alors

$$S_b(\{\beta_1 + B, \beta_2 + B - s, ..., \beta_M + B + s - sM\}) =$$

$$S_b(\{\beta_2 + B, \beta_3 + B - s, ..., \beta_{M+1} + B + s - sM\}) + \beta_1 - \beta_{b+1}$$

et

$$S_a(\{A, A - s, ..., A + s - sN\}) + \beta_1 \leq S_a(\{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\}).$$

D'où

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]) \leq S_a(\{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\})$$

$$+S_b(\{\beta_2 + B, \beta_3 + B - s, ..., \beta_{M+1} + B + s - sM\}) \leq S_k[p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]).$$

Supposons maintenant $a = 0$, donc $b = k \geq 1$.Alors

$$S_k(\{\beta_1 + B, \beta_2 + B - s, ..., \beta_M + B + s - sM\}) =$$

$$S_{k-1}(\{\beta_2 + B, \beta_3 + B - s, ..., \beta_{M+1} + B + s - sM\}) + \beta_1 + B + s - sk.$$

D'après l'hypothèse $\alpha_1 + A > B$, on a

$$\beta_1 + B + s - sk < \beta_1 + \alpha_1 + A = S_1(\{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\}).$$

D'où

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]) \leq S_1(\{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\})$$

$$+S_{k-1}(\{\beta_2 + B, \beta_3 + B - s, ..., \beta_{M+1} + B + s - sM\}) \leq S_k[p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]).$$

C'est la première inégalité de l'énoncé. On peut fixer de nouveaux entiers $a \in \{0, ..., N\}$ et $b \in \{0, ..., M\}$ tels que $a + b = k$ et

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]) = S_a(\{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\})$$

$$+S_b(\{\beta_2 + B, \beta_3 + B - s, ..., \beta_{M+1} + B + s - sM\}).$$

Il est clair que

$$S_a(\{\alpha_1 + \beta_1 + A, A - s, ..., A + s - sN\}) \leq \alpha_1 + \beta_1 + S_a(\{A, A - s, ..., A + s - sN\}),$$

tandis que

$$S_b(\{\beta_2+B, \beta_3+B-s, ..., \beta_{M+1}+B+s-sM\}) \leq S_b(\{\beta_1+B, \beta_2+B-s, ..., \beta_M+B+s-sM\}).$$

D'où

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]) \leq \alpha_1 + \beta_1 + S_a(\{A, A - s, ..., A + s - sN\})$$

$$+S_b(\{\beta_1 + B, \beta_2 + B - s, ..., \beta_M + B + s - sM\} \leq \alpha_1 + \beta_1 + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-, \beta]).$$

C'est la seconde inégalité de l'énoncé.

On suppose maintenant $n \geq 2$. Supposons d'abord $(1, 0) <_{I^-} (1, 1)$, c'est-à-dire $(2, 0) <_I (1, 1)$. Cela entraîne que le premier terme de α' est $\alpha_2 = \alpha_1^-$. Supposons $\alpha_1^- + A \geq B$. On construit un élément de $P_{A,B;s}(\alpha^-, \beta)$ par le procédé (a). D'après 2.1(2), ce procédé construit le terme $\nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2$, et les partitions sont (α'^-, β'). Un

élément de $P_{A,B;s}(\alpha^-,\beta)$ est de la forme $(\{\nu_1-\alpha_1+\alpha_2\}\sqcup\nu'',\mu'')$ pour un élément $(\nu'',\mu'')\in P_{A-s,B;s}(\alpha'^-,\beta')$, d'où

$$p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta]=\{\nu_1-\alpha_1+\alpha_2+A\}\sqcup p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta'].$$

En comparant avec (1), les inégalités de l'énoncé s'ensuivent si $k=1$. Supposons $k\geq 2$. Par récurrence, on a

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta'])\leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])\leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta'])+\alpha'_1+\beta'_1.$$

D'où

$$\begin{aligned}S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta])&=\nu_1-\alpha_1+\alpha_2+A+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta'])\\&\leq\nu_1+A+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])=S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).\end{aligned}$$

Et

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])=\nu_1+A+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])\leq\nu_1+A+\alpha'_1+\beta'_1+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta']).$$

On se rappelle que $\alpha'_1=\alpha_2$ et on a $\beta'_1\leq\beta_1$. D'où

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])\leq\nu_1+A+\alpha_2+\beta_1+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta'])$$

$$=\alpha_1+\beta_1+(\nu_1-\alpha_1+\alpha_2+A)+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha'^-,\beta'])=\alpha_1+\beta_1+S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta]).$$

On suppose maintenant $(1,0)<_{I^-}(1,1)$ mais $\alpha_1^-+A<B$. On construit un élément de $P_{A,B;s}(\alpha^-,\beta)$ par le procédé (b). D'après 2.1(1), ce procédé construit l'élément $\mu_1=\nu_1-\alpha_1$ et les mêmes partitions (α',β'). D'où

$$(2)\qquad p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta]=\{\nu_1-\alpha_1+B\}\sqcup p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'].$$

Interrompons notre raisonnement pour considérer le cas où $(1,0)>_{I^-}(1,1)$, c'est-à-dire $(1,1)<_I(2,0)$ et où $\beta_1+B\geq A$. On construit un élément de $P_{A,B}(\alpha^-,\beta)$ par le procédé (b), qui construit encore l'élément $\mu_1=\nu_1-\alpha_1$ et les partitions (α',β'). D'où encore (2). On traite ensemble les deux situations.

Si $k=1$, on doit montrer que $\nu_1-\alpha_1+B\leq\nu_1+A\leq\nu_1-\alpha_1+B+\alpha_1+\beta_1=\nu_1+\beta_1+B$. La première inégalité résulte de $\alpha_1+A>B$. La seconde n'est autre que $A\leq\beta_1+B$. Or dans les deux cas considérés ci-dessus, on a soit directement cette inégalité, soit $\alpha_1^-+A<B$ mais alors $A\leq\alpha_1^-+A<B\leq\beta_1+B$. Cela conclut.

Si $k\geq 2$, le lemme 3.2 appliqué par récurrence nous dit que

$$S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'])\leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])+sup(\alpha'_1+A-B,0).$$

Toujours d'après l'hypothèse $\alpha_1+A>B$ et parce que $\alpha'_1\leq\alpha_1$, on a $sup(\alpha'_1+A-B,0)\leq\alpha_1+A-B$. Alors

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta])=\nu_1-\alpha_1+B+S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'])\leq\nu_1+A+S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])$$

$$=S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Le symétrique du même lemme 3.2 nous dit que

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])\leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'])+sup(\beta'_1+B-A,0).$$

Comme on l'a vu ci-dessus, on a ici $\beta_1 + B - A \geq 0$. On a aussi $\beta'_1 \leq \beta_1$, donc $sup(\beta'_1 + B - A, 0) \leq \beta_1 + B - A$. D'où

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]) = \nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']) \leq \nu_1 + \beta_1 + B + S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'])$$

$$= \alpha_1 + \beta_1 + (\nu_1 - \alpha_1 + B) + S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta']) = \alpha_1 + \beta_1 + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta]).$$

Cela conclut.

Il reste le cas où $(1,1) <_I (2,0)$ mais $\beta_1 + B < A$. On construit un élément de $P_{A,B}(\alpha^-,\beta)$ par le procédé (a). D'après 2.1(3), ce procédé crée l'élément $\nu_1 - \alpha_1 - \beta_1$, les partitions $(\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta')$. On obtient

$$(3) \qquad p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta] = \{\nu_1 - \alpha_1 - \beta_1 + A\} \sqcup p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta'].$$

Si $k = 1$, les inégalités de l'énoncé résultent de cette formule et de (1). Supposons $k \geq 2$. Posons $\alpha^1 = \alpha'$, $\beta^1 =, \{\beta_1\} \sqcup \beta'$,d'où $\beta' = \beta^{1-}$. L'ensemble d'indices $I_1 = (\{1,...,n_1\} \times \{0\}) \cup (\{1,...,m_1\} \times \{1\})$ est par construction plongé dans I et hérite d'un ordre $<_{I_1}$ pour lequel $(1,1) <_{I_1} (1,0)$. On peut donc appliquer le symétrique de notre lemme 3.1 au couple de partitions (α^1, β^1) : on a

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']) \leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta']) \leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']) + \alpha'_1 + \beta_1.$$

Alors

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta]) = \nu_1 - \alpha_1 - \beta_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta'])$$

$$\leq \nu_1 - \alpha_1 + \alpha'_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']) \leq -\alpha_1 + \alpha'_1 + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Puisque $\alpha'_1 \leq \alpha_1$, la première inégalité de l'énoncé s'ensuit. On a aussi

$$S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]) = \nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']) \leq \nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha', \{\beta_1\} \sqcup \beta'])$$

$$= \alpha_1 + \beta_1 + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha^-,\beta]).$$

C'est la deuxième inégalité de l'énoncé, ce qui achève la démonstration. □

3.4 Preuve du lemme 3.2

Supposons $n = 0$ ou $m = 0$. On a

$$p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha,\beta] = \{\alpha_1 + A, ..., \alpha_N + A + s - sN\} \sqcup \{\beta_1 + B - s, ..., \beta_{M-1} + B + s - sM\},$$

$$p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha,\beta] = \{\alpha_1 + A - s, ..., \alpha_{N-1} + A + s - sN\} \sqcup \{\beta_1 + B, ..., \beta_M + B + s - sM\}.$$

Introduisons des entiers $a \in \{0,...,N\}$, $b \in \{0,...,M-1\}$ tels que

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s}[\alpha,\beta]) = S_a(\{\alpha_1+A, ..., \alpha_N+A+s-sN\}) + S_b(\{\beta_1+B-s, ..., \beta_{M-1}+B+s-sM\}).$$

Si $a = 0$, on a $b = k$ et

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s}[\alpha,\beta]) = S_k(\{\beta_1 + B - s, ..., \beta_{M-1} + B + s - sM\})$$

$$= S_k(\{\beta_1 + B, ..., \beta_M + B + s - sM\}) - sk \leq S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Supposons $a \geq 1$. Alors

$$S_a(\{\alpha_1 + A, ..., \alpha_N + A + s - sN\}) = S_a(\{\alpha_1 + A - s, ..., \alpha_{N-1} + A + s - sN\}) + sa$$

$$= S_{a-1}(\{\alpha_1 + A - s, ..., \alpha_{N-1} + A + s - sN\}) + \alpha_a + A,$$

$$S_b(\{\beta_1 + B - s, ..., \beta_{M-1} + B + s - sM\}) = S_b(\{\beta_1 + B, ..., \beta_M + B + s - sM\}) - sb$$

$$= S_{b+1}(\{\beta_1 + B, ..., \beta_M + B + s - sM\}) - \beta_{b+1} - B.$$

D'où

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) = \alpha_a - \beta_{b+1} + A - B + S_{a-1}(\{\alpha_1 + A - s, ..., \alpha_{N-1} + A + s - sN\})$$

$$+S_{b+1}(\{\beta_1 + B, ..., \beta_M + B + s - sM\}) \leq \alpha_1 + A - B + S_k(p^{N-1,M}_{A-2,B}[\alpha, \beta]).$$

On suppose maintenant $n \geq 1$, $m \geq 1$. Supposons que l'une des conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $(1, 0) <_I (1, 1)$ et $\alpha_1 + A - s \geq B$;

(2) $(1, 1) <_I (1, 0)$ et $\beta_1 + B \leq A - s$.

Remarquons que (1) implique $\alpha_1 + A > B - s$ et que (2) implique $\beta_1 + B - s < A$. Alors les éléments de $P_{A,B-s;s}(\alpha, \beta)$ comme de $P_{A-s,B;s}(\alpha, \beta)$ peuvent se construire par le procédé (a). Celui-ci crée un élément ν_1 et des partitions (α', β'). On a

$$p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta] = \{\nu_1 + A\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha', \beta'],$$

$$p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta] = \{\nu_1 + A - s\} \sqcup p^{N-2,M}_{A-2s,B;s}[\alpha', \beta'].$$

Si $k = 1$, on a

$$S_1(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) = S_1(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) + s$$

Mais les hypothèses (1) ou (2) impliquent que $s \leq \alpha_1 + A - B$ et on obtient l'inégalité cherchée. Si $k \geq 2$, on a par récurrence

$$S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha', \beta']) \leq S_{k-1}(p^{N-2,M}_{A-2s,B;s}[\alpha', \beta']) + sup(\alpha'_1 + A - s - B, 0).$$

D'où

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) \leq S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) + s + sup(\alpha'_1 + A - s - B, 0).$$

Comme ci-dessus, nos hypothèses impliquent $s \leq \alpha_1 + A - B$. On a aussi $s + \alpha'_1 + A - s - B \leq \alpha_1 + A - B$. Donc $s + sup(\alpha'_1 + A - s - B, 0) \leq sup(\alpha_1 + A - B, 0)$ et, avec l'inégalité ci-dessus, on obtient celle cherchée.

Supposons que l'une des conditions suivantes soient vérifiées :

(3) $(1, 0) <_I (1, 1)$ et $\alpha_1 + A \leq B - s$;

(4) $(1, 1) <_I (1, 0)$ et $\beta_1 + B - s \geq A$.

Remarquons que (3) implique $\alpha_1 + A - s < B$ et que (4) implique $\beta_1 + B > A - s$. Alors les éléments de $P_{A,B-s;s}(\alpha, \beta)$ comme de $P_{A-s,B;s}(\alpha, \beta)$ peuvent se construire par le procédé (b). Celui-ci crée un élément μ_1 et des partitions (α', β'). On a

$$p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta] = \{\mu_1 + B - s\} \sqcup p^{N,M-2}_{A,B-2s;s}[\alpha', \beta'],$$

$$p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta] = \{\mu_1 + B\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha', \beta'].$$

Si $k = 1$, on a

$$S_1(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) = S_1(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) - s,$$

et, évidemment, $-s < sup(\alpha_1 + A - B, 0)$. Si $k \geq 2$, on a par récurrence

$$S_{k-1}(p^{N,M-2}_{A,B-2s;s}[\alpha', \beta']) \leq S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha', \beta']) + sup(\alpha'_1 + A - B + s, 0).$$

D'où

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) \leq S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) - s + sup(\alpha'_1 + A + s - B, 0).$$

Comme ci-dessus, $-s < sup(\alpha_1 + A - B, 0)$. On a aussi $-s + \alpha'_1 + A + s - B \leq \alpha_1 + A - B$. Donc $-s + sup(\alpha'_1 + A + s - B, 0) \leq sup(\alpha_1 + A - B, 0)$ et, avec l'inégalité ci-dessus, on obtient celle cherchée.

Supposons enfin qu'aucune des relations (1) à (4) ne soit satisfaite. On a alors l'une des possibilités suivantes :

(5) $(1, 0) <_I (1, 1)$ et $B - s < \alpha_1 + A < B + s$;

(6) $(1, 1) <_I (1, 0)$ et $A - s < \beta_1 + B < A + s$.

On voit que les éléments de $P_{A,B-s;s}(\alpha, \beta)$ se construisent à l'aide du procédé (a) tandis que ceux de $P_{A-s,B;s}(\alpha, \beta)$ se construisent à l'aide du procédé (b). Le procédé (a) crée un terme ν_1 et des partitions (α', β'). Le procédé (b) crée un terme μ_1 et des partitions (α'', β''). D'après 1.2(4), sous l'hypothèse (5), on a $\nu_1 = \alpha_1 + \mu_1$, α'' contient le terme α_1 et on a $\alpha' = \alpha''^{-}$ et $\beta' = \beta''$. Alors

$$p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta] = \{\alpha_1 + \mu_1 + A\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;}[\alpha''^{-}, \beta''],$$

$$p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta] = \{\mu_1 + B\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha'', \beta''].$$

D'après 1.2(4), sous l'hypothèse (6), on a $\mu_1 = \beta_1 + \nu_1$, β' contient le terme β_1 et on a $\beta'' = \beta'^{-}$ et $\alpha'' = \alpha'$. Alors,

$$p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta] = \{\nu_1 + A\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha', \beta'],$$

$$p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta] = \{\beta_1 + \nu_1 + B\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha', \beta'^{-}].$$

Si $k = 1$, on a

$$S_1(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) = S_1(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) + \alpha_1 + A - B$$

sous l'hypothèse (5) et

$$S_1(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) = S_1(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]) + A - B - \beta_1$$

sous l'hypothèse (6). Les termes $\alpha_1 + A - B$, resp. $A - B - \beta_1$ sont évidemment inférieurs ou égaux à $sup(\alpha_1 + A - B, 0)$ et on conclut.

Si $k \geq 2$, on voit que, dans le cas (5), les partitions (α'', β'') vérifient les hypothèses du lemme 3.1 tandis que, dans le cas (6), les partitions (α', β') vérifient celles du lemme symétrique. Dans le cas (5), on a donc

$$S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha''^{-}, \beta'']) \leq S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha'', \beta'']),$$

d'où

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha, \beta]) = \alpha_1 + \mu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha''^{-}, \beta''])$$

$$\leq \alpha_1 + A - B + (\mu_1 + B) + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha'', \beta'']) = \alpha_1 + A - B + S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha, \beta]),$$

ce qui entraîne l'inégalité cherchée. Dans le cas (6), on a

$$S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta']) \leq S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta'^-]) + \alpha'_1 + \beta_1.$$

D'où

$$S_k(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha,\beta]) = \nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta']) \leq \nu_1 + A + \alpha'_1 + \beta_1 + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta'^-])$$

$$= \alpha'_1 + A - B + (\beta_1 + \nu_1 + B) + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta'^-]) = \alpha'_1 + A - B + S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Puisque $\alpha'_1 \leq \alpha_1$, on obtient l'inégalité cherchée. □

3.5 Troisième lemme

On suppose $n \geq 1$ et $(1,0) <_I (1,1)$ si $m \geq 1$.

Lemme. *(i) Soit $k \in 1, ..., N+M$. On a l'inégalité*

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) + \alpha_1 + A \leq S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

(ii) Soit $e \in \mathbb{N}$ et $k \in 1, ..., N+M-1$. Posons $b = b^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}(\alpha^-,\beta;k)$. Si $b \geq 1$, on a l'inégalité

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]) + \alpha_1 + A - B - s + bs(1-e/2) \leq S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Si $b = 0$, on a l'inégalité

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]) \leq S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Les deux assertions se traitent par récurrence en reprenant la construction de l'élément canonique de type (b) de $P_{A-s,B;s}(\alpha^-,\beta)$ pour l'assertion (i), de $P_{A-s,B+es/2;s}(\alpha^-,\beta)$ pour l'assertion (ii). La première construction est le cas particulier $e = 0$ de la seconde. On unifie les notations en posant $e = 0$ quand on traite l'assertion (i). On pose aussi dans ce cas $b^- = b^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\alpha^-,\beta;k-1)$. La preuve est séparée en cinq cas traités dans les paragraphes suivants.

3.6 Preuve du lemme 3.5, cas $m = 0$

Supposons $m = 0$. Alors

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = S_{k-1-b^-}((\alpha^- \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A-s, A+s-sN]_s) + S_{b^-}([B, B+s-sM]_s).$$

On a

$$S_{k-1-b^-}((\alpha^- \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A-s, A+s-sN]_s) = S_{k-b^-}((\alpha \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s) - \alpha_1 - A,$$

d'où

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = -\alpha_1 - A + S_{k-b^-}((\alpha \sqcup \{0^{N-n}\})) + [A, A+s-sN]_s) + S_{b^-}([B, B+s-sM]_s)$$

$$\leq -\alpha_1 - A + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Cela prouve (i).

On a aussi

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]) = S_{k-b}((\alpha^- \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A-s, A+s-sN]_s)$$

$$+S_b([B+es/2, B+es/2+s-sM]_s).$$

Si $b=0$, on a évidemment $S_k((\alpha^- \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A-s, A+s-sN]_s) < S_k((\alpha \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s)$, d'où

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]) < S_k((\alpha \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s) \leq S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])$$

et (ii).

Si $b \geq 1$, on a

$$S_b([B+es/2, B+es/2+s-sM]_s) = S_{b-1}([B+es/2, B+es/2+s-sM]_s) + B + es/2 + s - sb$$

$$= S_{b-1}([B, B+s-sM]_2) + B + s + bs(e/2-1),$$

$$S_{k-b}((\alpha^- \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A-s, A+s-sN]_s) = S_{k-b+1}((\alpha \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s) - \alpha_1 - A.$$

D'où

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]) = -\alpha_1 - A + B + s + bs(e/2-1) + S_{k-b+1}((\alpha \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A, A+s-sN]_s)$$

$$+S_{b-1}([B, B+s-sM]_s) \leq -\alpha_1 - A + B + s + bs(e/2-1) + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Cela prouve (ii) dans le cas $m=0$.

3.7 Preuve du lemme 3.5, cas $m \geq 1$, $\alpha_1 + A - B \leq 0$

Supposons $m \geq 1$ et $\alpha_1 + A - B \leq 0$. Dans ce cas, le procédé (b) est autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$. Ce procédé construit un élément μ_1 et des partitions (α',β'). Le premier terme de α' est α_1. On a $p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta] = \{\mu_1 + B\} \sqcup p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta']$. D'après 2.1(5), le procédé (b) est autorisé pour construire des éléments de $P_{A-s,B+es/2}(\alpha^-,\beta)$. D'après 2.1(4), ce procédé construit le même élément μ_1 et les partitions (α'^-,β). D'où

$$(1) \qquad p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta] = \{\mu_1 + B + es/2\} \sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B+se/2-s;s}[\alpha'^-,\beta'].$$

Pour l'assertion (i), on a $e=0$ comme on l'a dit. Si $k=1$, on a $S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = 0$ et $S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]) = \mu_1 + B \geq \alpha_1 + A$ d'après l'hypothèse $\alpha_1 + A - B \leq 0$. Si $k \geq 2$, on a $S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = \mu_1 + B + S_{k-2}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha'^-,\beta'])$ et $S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]) = \mu_1 + B + S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha^-,\beta])$. Puisque le premier terme de α' est α_1, on a par récurrence

$$S_{k-2}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha'^-,\beta']) + \alpha_1 + A \leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha^-,\beta]),$$

d'où (i).

Tournons-nous vers l'assertion (ii). Si $k=1$, la formule (1) montre que $b=1$ et on doit voir que $\mu_1 + B + es/2 + \alpha_1 + A - B - es/2 \leq \mu_1 + B$, ce qui résulte de l'hypothèse

$\alpha_1+A-B\leq 0$. Si $k\geq 2$, la formule (1) montre que $b\geq 1$ et que $b^{N-1,M-1}_{A-s,B+se/2-s;s}(\alpha'^-,\beta')=b-1$. Si $b=1$, on a par récurrence $S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+se/2-s;s}[\alpha'^-,\beta'])\leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'])$ et le calcul est identique au cas $k=1$. Supposons $b\geq 2$. Alors, par récurrence, on a

$$S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+se/2-s;s}[\alpha'^-,\beta'])+\alpha_1+A-B+s(b-1)(1-e/2)\leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta']),$$

d'où

$$\begin{aligned}&S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]+\alpha_1+A-B-s+bs(1-e/2)\\ &=\mu_1+B+es/2+S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+s(e/2-1);s}[\alpha'^-,\beta'])+\alpha_1+A-B-s+bs(1-e/2)\\ &\leq S_{k-1}(p^{N,M-1}_{A,B-s;s}[\alpha',\beta'])+\mu_1+B=S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]),\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

3.8 Preuve du lemme 3.5, cas $m\geq 1$, $\alpha_1+A-B>0$, utilisation du procédé (b) pour (α^-,β)

Supposons $m\geq 1$ et $\alpha_1+A-B>0$. Le procédé (a) appliqué à (α,β) construit un élément $\nu_1=\alpha_1+\beta_1+\alpha_{a_2}+...$ et des partitions (α',β'). On a

$$(1)\qquad p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]=\{\nu_1+A\}\sqcup p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'].$$

Remarquons que cette formule suffit à démontrer l'assertion (i) dans le cas $k=1$ puisqu'alors $S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta])=0$ et $S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])=\nu_1+A\geq\alpha_1+A$.

Supposons que le procédé (b) soit loisible pour construire des éléments de $P_{A-s,B+es/2;s}(\alpha^-,\beta)$. D'après 2.1(1), ce procédé construit l'élément $\mu_1=\nu_1-\alpha_1$ et les mêmes partitions α',β'. On a

$$(2)\qquad p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]=\{\mu_1+B+es/2\}\sqcup p^{N-1,M-1}_{A-s,B+es/2-s;s}[\alpha',\beta'].$$

Pour l'assertion (i), on fait $e=0$. On a déjà traité le cas $k=1$. Si $k\geq 2$, on introduit l'élément canonique de type (b) $(\nu',\mu')\in P_{A-s,B-s;s}(\alpha',\beta')$. La formule (2) montre que $b^-\geq 1$ et $b^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}(\alpha',\beta';k-2)=b^--1$. D'où

$$\begin{aligned}S_{k-2}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta'])&=S_{k-1-b^-}((\nu'\sqcup\{0^{N-n}\})+[A-s,A+s-sN]_s)\\ &+S_{b^--1}((\mu'\sqcup\{0^{M-m}\})+[B-s,B+s-sM]_s).\end{aligned}$$

On a

$$S_{b^--1}((\mu'\sqcup\{0^{M-m}\})+[B-s,B+s-sM]_s)=S_{b^-}((\mu'\sqcup\{0^{M-m}\})+[B,B+s-sM]_s)-\mu'_{b^-}-B,$$

avec la convention $\mu'_{b^-}=0$ si $b^->m-1$. D'où

$$\begin{aligned}S_{k-2}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta'])&\leq S_{k-1-b^-}((\nu'\sqcup\{0^{N-n}\})+[A-s,A+s-sN]_s)\\ +S_{b^-}((\mu'\sqcup\{0^{M-m}\})+[B,B+s-sM]_s)-\mu'_{b^-}-B&\leq S_{k-1}(p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu',\mu'))-B.\end{aligned}$$

Puisque $(\nu',\mu')\in P(\alpha',\beta')$, on a $S_{k-1}(p\Lambda^{N-1,M}_{A-s,B;s}(\nu',\mu'))\leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])$ d'après le lemme 1.4. D'où

$$S_{k-2}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta'])\leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])-B,$$

puis, grâce à (1) et (2),

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = \mu_1 + B + S_{k-2}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B-s;s}[\alpha',\beta']) \le \nu_1 - \alpha_1 + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])$$

$$-\alpha_1 - A + (\nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])) = -\alpha_1 - A + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

C'est l'inégalité cherchée.

Traitons maintenant (ii). D'après (2), on a $b \ge 1$ et $b^{N-1,M-1}_{A-s,B+se/2-s;s}(\alpha',\beta';k-1) = b-1$. Introduisons l'élément canonique de type (b) $(\nu',\mu') \in P_{A-s,B+se/2-s;s}[\alpha',\beta']$. On a

$$S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+se/2-s;s}[\alpha',\beta'])$$

$$= S_{k-b}(\nu' + [A-s, A+s-sN]_s) + S_{b-1}(\mu' + [B+se/2-s, B+s+es/2-sM]_s)$$

$$= S_{k-b}(\nu' + [A-s, A+s-sN]_s) + S_{b-1}(\mu' + [B, B+2s-sM]_s) + s(e/2-1)(b-1)$$

$$\le S_{k-1}(p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B;s}(\nu',\mu')) + s(e/2-1)(b-1).$$

Puisque $(\nu',\mu') \in P(\alpha',\beta')$, on a $p\Lambda^{N-1,M-1}_{A-s,B;s}(\nu',\mu') \le p^{N-1,M-1}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']$, d'où

$$S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+es/2-s;s}[\alpha',\beta']) \le S_{k-1}(p^{N,M}_{A-s,B;s}[\alpha',b']) + s(e/2-1)(b-1),$$

puis

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2}[\alpha^-,\beta]) = \mu_1 + B + es/2 + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+es/2-s;s}[\alpha',\beta'])$$

$$= \nu_1 - \alpha_1 + B + es/2 + S_{k-1}(p^{N-1,M-1}_{A-s,B+es/2-s;s}[\alpha',\beta'])$$

$$\le B + s + s(e/2-1)b - \alpha_1 - A + (\nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']))$$

$$= B + s + s(e/2-1)b - \alpha_1 - A + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

C'est l'inégalité cherchée.

3.9 Preuve du lemme 3.5, cas $m \ge 1$, $\alpha_1 + 1 - B > 0$, utilisation du procédé (a) pour (α^-,β), $(1,0) <_{I^-} (1,1)$

On suppose que $m \ge 1$, $\alpha_1 + A - B > 0$ mais que le procédé (b) n'est pas autorisé pour construire des éléments de $P_{A-s,B+es/2}(\alpha^-,\beta)$. On a $n \ge 2$ sinon seul ce procédé (b) est autorisé. On a encore l'égalité (1) de 3.8. Supposons $(1,0) <_{I^-} (1,1)$, c'est-à-dire $(2,0) <_I (1,1)$. Le premier terme de α' est $\alpha_2 = \alpha_1^-$. Puisque le procédé (b) n'est pas autorisé, on a $\alpha_2 + A - s > B + es/2$. D'après 2.1(2), le procédé (a) construit l'élément $\underline{\nu}_1 = \nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2$ et les partitions (α'^-,β'). On a

$$(1) \qquad p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta] = \{\nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2 + A - s\} \sqcup p^{N-2,M}_{A-2s,B+es/2;s}[\alpha'^-,\beta'].$$

Pour l'assertion (i), on fait $e = 0$. On a déjà traité le cas $k = 1$. Si $k \ge 2$, parce que $\alpha'_1 = \alpha_2$, on a par récurrence

$$S_{k-2}(p^{N-2,M}_{A-2s,B;s}[\alpha'^-,\beta']) \le -\alpha_2 - A + s + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])$$

d'où

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = \nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2 + A - s + S_{k-2}(p^{N-2,M}_{A-2s,B;s}[\alpha'^-,\beta']) \le \nu_1 - \alpha_1 + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])$$

$$= -\alpha_1 - A + (\nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta'])) = -\alpha_1 - A + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]),$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

Traitons (ii). Si $k = 1$, la relation (1) montre que $b = 0$. On a

$$S_1(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2}[\alpha^-,\beta]) = \nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2 + A - s < \nu_1 + A = S_1(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])$$

ce qui est l'inégalité cherchée. Supposons $k \geq 2$. La relation (4) montre que $b = b^{N-2,B}_{A-2s,B+es/2;s}(\alpha'^-,\beta';k-1)$. Si $b = 0$, on a par récurrence

$$S_{k-1}(p^{N-2,M}_{A-2s,B+es/2;s}[\alpha'^-,\beta']) \leq S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']),$$

d'où

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2}[\alpha^-,\beta]) = \nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2 + A - s + S_{k-1}(p^{N-2,M}_{A-2s,B+es/2;s}[\alpha'^-,\beta'])$$

$$< \nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']) = S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])$$

ce qui est l'inégalité cherchée. Si $b > 0$, parce que $\alpha'_1 = \alpha_2$, on a par récurrence

$$S_{k-1}(p^{N-2,M}_{A-2s,B;s}[\alpha'^-,\beta']) \leq -\alpha_2 - A + s + B + s + sb(e/2-1) + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']),$$

d'où

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta]) = \nu_1 - \alpha_1 + \alpha_2 + A - s + S_{k-1}(p^{N-2,M}_{A-2s,B;s}[\alpha'^-,\beta'])$$

$$\leq -\alpha_1 - A + B + s + sb(e/2-1) + (\nu_1 + A + S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha',\beta']))$$

$$= -\alpha_1 - A + B + s + sb(e/2-1) + S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]),$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

3.10 Preuve du lemme 3.5, cas $m \geq 1$, $\alpha_1 + 1 - B > 0$, utilisation du procédé (a) pour (α^-,β), $(1,1) <_{I^-} (1,0)$

Supposons que $m \geq 1$, que $\alpha_1 + 1 - B > 0$ et que le procédé (b) n'est pas autorisé pour construire les éléments de $P_{A-s,B+es/2;s}(\alpha^-,\beta)$. Supposons de plus que $(1,1) <_{I^-} (1,0)$, c'est-à-dire $(1,1) <_I (2,0)$. On a toujours l'égalité (1) de 3.8. Puisque le procédé (b) n'est pas autorisé, on a $\beta_1 + B + es/2 < A - s$. D'après 2.1(3), le procédé (a) construit l'élément $\underline{\nu}_1 = \nu_1 - \alpha_1 - \beta_1$ et les partitions $(\alpha',\{\beta_1\} \sqcup \beta')$. On a

$$(1) \qquad p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta] = \{\nu_1 - \alpha_1 - \beta_1 + A - s\} \sqcup p^{N,M}_{A-2s,B+es/2;s}[\alpha',\{\beta_1\} \sqcup \beta'].$$

Posons $\alpha^1 = \alpha'$, $\beta^1 = \{\beta_1\} \sqcup \beta'$ d'où $\beta' = (\beta^1)^-$. On va définir un entier r, des termes ν_{i+1} pour $i = 1,...,r$ et des partitions $(\alpha^i,\beta^i) \in \mathcal{P}_{n_i} \times \mathcal{P}_{m_i}$ pour $i = 1,...,r+1$, extraites de (α',β'). Les propriétés suivantes seront vérifiées. L'ensemble d'indices $I_i = (\{1,...,n_i\} \times \{0\}) \cup (\{1,...,m_i\} \times \{1\})$ se plonge dans I^- et est donc muni d'un ordre $<_{I_i}$. On a $m_i \geq 1$ et le plongement identifie $(1,1) \in I_i$ à $(1,1) \in I^-$. En particulier, $(1,1)$ est le plus petit terme de I_i. Le premier terme de β^i est β_1. Supposons définie (α^i,β^i), ce qui est le cas pour $i = 1$. Si $n_i = 0$, on pose $r = i - 1$ et on a terminé. Supposons $n_i \geq 1$. Si $\beta_1 + B + es/2 \geq A - s - si$, on pose $r = i - 1$ et on a terminé. Si $\beta_1 + B + es/2 < A - s - si$, on applique le procédé (a) pour construire l'élément canonique de type (b)

de $P_{A-s-si,B+es/2}(\alpha^i,\beta^i)$. On pose $I_i^- = (\{1,...,n_i\}\times\{0\})\cup(\{1,...,m_i-1\}\times\{1\})$. On plonge cet ensemble dans I_i en identifiant $(j,1)\in I_i^-$ à $(j+1,1)\in I_i$, d'où un ordre $<_{I_i^-}$ sur I_i^-. Montrons que l'on peut aussi appliquer le procédé (a) pour construire un élément de $P_{A-si,B;s}(\alpha^i,\beta^{i-})$. Si $(1,0)<_{I_i^-}(1,1)$, on doit montrer que $\alpha^i+A-si\geq B$; si $(1,1)<_{I_i^-}(1,0)$, on doit montrer que $\beta_1^{i-}+B\leq A-si$; dans les deux cas, cela résulte de l'inégalité $\beta_1+B+es/2<A-s-si$. D'après l'assertion symétrique de 2.1(4), le procédé (a) appliqué à (α^i,β^i), resp. (α^i,β^{i-}), construit le même élément que l'on note ν_{i+1} et des partitions $(\alpha^{i+1},\beta^{i+1})$, resp. $(\alpha^{i+1},\beta^{i+1,-})$. A ce point, on obtient les égalités

$$p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]=\{\nu_1+A,\nu_2+A-s,...,\nu_{r+1}+A-sr\}\sqcup p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}],$$

$$(2)\qquad p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta]$$

$$=\{\nu_1-\alpha_1-\beta_1+A-s,\nu_2+A-2s,...,\nu_{r+1}+A-sr-s\}\sqcup p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}].$$

Par définition de r, on a soit $n_{r+1}=0$, soit $\beta_1+B+es/2\geq A-2s-sr$. Dans ce dernier cas, on a aussi $\beta_1+B+es/2<A-s-sr$: si $r=0$, cela résulte de l'hypothèse $\beta_1+B+es/2<A-s$; si $r>0$ cela résulte de ce que la construction ne s'est pas arrêtée en $r-1$. On pose $\nu=(\nu_1,...,\nu_{r+1})$.

Supposons d'abord $k\leq r+1$. Pour l'assertion (i), on a déjà traité le cas $k=1$, cf. 3.8. Si $k\geq 2$, on a

$$S_{k-1}(p^{N-1,M}_{A-s,B;s}[\alpha^-,\beta])=S_{k-1}(\nu)-\alpha_1-\beta_1+S_{k-1}([A-s,A+s-sk]_s)$$

$$\leq S_k(\nu)-\alpha_1-A+S_k([A,A+s-sk]_s)=S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])-\alpha_1-A.$$

Pour (ii), (2) entraîne que $b=0$ et on a

$$S_k(p^{N-1,M}_{A-s,B+es/2;s}[\alpha^-,\beta])=S_k(\nu)-\alpha_1-\beta_1+S_k([A-s,A-sk]_s$$

$$=S_k(\nu)-\alpha_1-\beta_1-sk+S_k([A,A+s-sk]_s)<S_k(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]).$$

Supposons $k>r+1$ et posons $h=k-r-1$. On voit que, pour prouver (i), il suffit de prouver que

$$(3)\qquad S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}])+A-\beta_1-sr-s\leq S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}]).$$

Dans le cas de l'assertion (ii), on voit que $b=b^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}(\alpha^{r+1},\beta^{r+1};h)$. Il suffit de prouver :

dans le cas $b=0$,

$$(4)\qquad S_h(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}])-\alpha_1-\beta_1-sr-s<S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}]);$$

dans le cas $b\geq 1$,

$$(5)\qquad S_h(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}])-\beta_1+A-B-sr-2s+sb(1-e/2)$$

$$\leq S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}]).$$

Supposons d'abord $n_{r+1}=0$. Posons par convention $\beta_i^{r+1}=0$ si $i\geq m_{r+1}+1$. Rappelons que $\beta_1^{r+1}=\beta_1$. Alors

$$p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}]=[A-sr-2s,A+s-sN]_s$$

$$\sqcup\{\beta_1+B+es/2,\beta_2^{r+1}+B+es/2-s,...,\beta_M^{r+1}+B+es/2+s-sM\},$$

et

$$p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}]=[A-sr-s,A+s-sN]_s\sqcup\{\beta_2^{r+1}+B,\beta_2^{r+1}+B-s,...,\beta_{M+1}^{r+1}+B+s-sM\}.$$

Traitons (3). On a $b^-=b^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}(\alpha^{r+1},\beta^{r+1};h-1)$ d'après (2). D'où

$$S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}])=S_{h-1-b^-}([A-sr-2s,A+s-sN]_s)$$

$$+S_{b^-}(\{\beta_1+B,\beta_2^{r+1}+B-s,...,\beta_M^{r+1}+B+s-sM\}).$$

On a

$$S_{h-1-b^-}([A-sr-2s,A+s-sN]_s)=S_{h-b^-}([A-sr-s,A+s-sN]_s)-A+sr+s,$$

$$S_{b^-}(\{\beta_1+B,\beta_2^{r+1}+B-s,...,\beta_M^{r+1}+B+s-sM\})=$$

$$S_{b^-}(\{\beta_2^{r+1}+B,\beta_3^{r+1}+B-s,...,\beta_{M+1}^{r+1}+B+s-sM\})+\beta_1-\beta_{b^-+1}^{r+1}.$$

Enfin

$$S_{h-b^-}([A-sr-s,A+s-sN]_s)+S_{b^-}(\{\beta_2^{r+1}+B,\beta_3^{r+1}+B-s,...,\beta_{M+1}^{r+1}+B+s-sM\})\leq$$

$$S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}]).$$

En mettant bout-à-bout ces relations, on obtient (3).

Traitons (4). Puisque $b=0$ pour cette assertion, on a

$$S_h(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}])=S_h([A-sr-2s,A+s-sN]_s)$$

$$=S_h([A-sr-s,A+s-sN]_s)-sh\leq S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}])-sh,$$

et (4) s'en déduit.

Traitons (5). On a

$$S_h(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1}])=S_{h-b}([A-sr-2s,A+s-sN]_s)$$

$$+S_b(\{\beta_1+B+es/2,\beta_2^{r+1}+B+es/2-s,...,\beta_M^{r+1}+B+es/2+s-sM\}).$$

Puisque $b\geq 1$, on a

$$S_b(\{\beta_1+B+es/2,\beta_2^{r+1}+B+es/2-s,...,\beta_M^{r+1}+B+es/2+s-sM\})=$$

$$S_{b-1}(\{\beta_2^{r+1}+B,\beta_3^{r+1}+B-s,...,\beta_{M+1}^{r+1}+B+s-sM\})+\beta_1+B+s-sb+ebs/2.$$

et

$$S_{h-b}([A-sr-2s,A+s-sN]_s)=S_{h-b+1}([A-sr-s,A+s-sN]_s)-A+sr+s.$$

On a aussi

$$S_{b-1}(\{\beta_2^{r+1}+B,\beta_3^{r+1}+B-s,...,\beta_{M+1}^{r+1}+B+s-sM\})+S_{h-b+1}([A-sr-s,A+s-sN]_s)\leq$$

$$S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1},\beta^{r+1,-}]),$$

et (5) se déduit de ces relations.

Supposons enfin $n_{r+1} \geq 1$ donc $A - 2s - sr \leq \beta_1 + B + es/2 < A - s - sr$ ainsi qu'on l'a dit plus haut. La première inégalité entraîne que le procédé (b) s'applique pour construire l'élément canonique de type (b) de $P_{A-2s-sr,B+es/2;s}(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$. On obtient un terme μ_1 et des partitions (α'', β''). Montrons que l'élément canonique de type (b) de $P_{A-sr-s,B;s}(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1,-})$ se construit à l'aide du procédé (a). Si $m_{r+1} = 1$, c'est le seul procédé autorisé. Si $m_{r+1} \geq 2$ et $(1,0) <_{I^-_{r+1}} (1,1)$, on a $\alpha_1^{r+1} + A - s - sr > B$ parce que $B \leq \beta_1 + B + es/2 < A - s - sr$. Si $(1,1) <_{I^-_{r+1}} (1,0)$, on a $\beta_2^{r+1} + B \leq \beta_1 + B \leq \beta_1 + B + es/2 < A - s - sr$. D'après l'assertion symétrique de 2.1(1), ce procédé (a) construit l'élément $\nu_{r+2} = \mu_1 - \beta_1$ et les partitions (α'', β'').On obtient

$$(6) \qquad p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1}] = \{\mu_1 + B + es/2\} \sqcup p^{N-r-2,M-1}_{A-sr-2s,B+es/2-s;s}[\alpha'', \beta'']$$

$$(7) \qquad p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1,-}] = \{\mu_1 - \beta_1 + A - sr - s\} \sqcup p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta''].$$

Traitons (3). Si $h = 1$, on a

$$S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1}]) = 0$$

et

$$S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1,-}]) = \mu_1 - \beta_1 + A - sr - s \geq -\beta_1 + A - sr - s,$$

d'où l'inégalité cherchée. Si $h \geq 2$, on introduit l'élément canonique de type (b) $(\nu'', \mu'') \in P_{A-sr-2s,B-s;s}(\alpha'', \beta'')$. On a

$$S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1}]) = \mu_1 + B + S_{h-1-b^-}((\nu'' \sqcup \{0^{N-r-2-n''}\}) + [A - sr - 2s, A + s - sN]_s)$$

$$+ S_{b^- - 1}((\mu'' \sqcup \{0^{M-1-m''}\}) + [B - s, B + s - sM]_s).$$

On a

$$S_{b^- - 1}((\mu'' \sqcup \{0^{M-1-m''}\}) + [B - s, B + s - sM]_s) = S_{b^-}((\mu'' \sqcup \{0^{M-m''}\}) + [B, B + s - sM]_s) - B - \mu''_{b^-},$$

avec toujours la convention $\mu''_i = 0$ si $i \geq m'' + 1$. On a aussi

$$S_{h-1-b^-}((\nu'' \sqcup \{0^{N-r-2-n''}\}) + [A - sr - 2s, A + s - sN]_s) + S_{b^-}((\mu'' \sqcup \{0^{M-m''}\}) + [B, B + s - sM]_s)$$

$$\leq S_{h-1}(p\Lambda^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}(\nu'', \mu'')) \leq S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta'']),$$

puisque $(\nu'', \mu'') \in P(\alpha'', \beta'')$. D'où

$$S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1}]) \leq \mu_1 - \mu''_{b^-} + S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta'']) \leq$$

$$-A + \beta_1 + sr + s + (\mu_1 - \beta_1 + A - sr - s) + S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta'']) =$$

$$-A + \beta_1 + sr + s + S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1,-}]).$$

La relation (3) en résulte.

La relation (6) entraîne que $b \geq 1$ et il reste seulement à prouver (5). On voit aussi que $b^{N-r-2,M-1}_{A-sr-2s,B-s;s}(\alpha'', \beta''; h - 1) = b - 1$. Si $h = 1$, on a $b = 1$. D'après (6) et (7), on a

$$S_h(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1}]) = \mu_1 + B + es/2,$$

$$S_h(p^{N-r-1,M-1}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1,-}]) = \mu_1 - \beta_1 + A - sr - s,$$

et un calcul simple conduit à (5). Supposons $h \geq 2$. Introduisons l'élément canonique de type (b) (ν'', μ'') dans $P_{A-sr-2s,B+es/2-s;s}(\alpha'', \beta'')$. Puisque $b^{N-r-2,M-1}_{A-sr-2s,B-s;s}(\alpha'', \beta''; h-1) = b-1$, on a

$$S_{h-1}(p^{N-r-2,M-1}_{A-sr-2s,B+es/2-s}[\alpha'', \beta'']) = S_{h-b}((\nu'' \sqcup \{0^{N-r-2-n''}\}) + [A-sr-2s, A+s-sN]_s)$$

$$+S_{b-1}((\mu'' \sqcup \{0^{M-1-m''}\}) + [B+es/2-s, B+es/2+s-sM]_s),$$

et

$$S_{b-1}((\mu'' \sqcup \{0^{M-1-m''}\}) + [B+es/2-s, B+es/2+s-sM]_s) =$$
$$S_{b-1}((\mu'' \sqcup \{0^{M-1-m''}\}) + [B, B+s-sM]_s) + s(b-1)(e/2-1).$$

D'où

$$S_{h-1}(p^{N-r-2,M-1}_{A-sr-2s,B+es/2-s}[\alpha'', \beta'']) \leq S_{h-1}(p\Lambda^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}(\nu'', \mu'')) + s(b-1)(e/2-1).$$

Parce que (ν'', μ'') appartient à $P(\alpha'', \beta'')$, on a

$$S_{h-1}(p\Lambda^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}(\nu'', \mu'')) \leq S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta'']).$$

D'où

$$S_h(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B+es/2;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1}]) = \mu_1 + B + es/2 + S_{h-1}(p^{N-r-2,M-1}_{A-sr-2s,B+es/2-s;s}[\alpha'', \beta''])$$

$$\leq \mu_1 + B + es/2 + s(b-1)(e/2-1) + S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta''])$$

$$= \beta_1 - A + B + sr + 2s + sb(e/2-1) + (\mu_1 - \beta_1 + A - sr - s) + S_{h-1}(p^{N-r-2,M}_{A-sr-2s,B;s}[\alpha'', \beta''])$$

$$= \beta_1 - A + B + sr + 2s + sb(e/2-1) + S_h(p^{N-r-1,M}_{A-sr-s,B;s}[\alpha^{r+1}, \beta^{r+1,-}]).$$

C'est la relation (5). Cela achève la démonstration. □

4 Multiplicités

4.1 Définition et énoncé de la proposition principale

Soient $\alpha \in \mathcal{P}_n$ et $\beta \in \mathcal{P}_m$. Rappelons que $I = (\{1, ..., n\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m\} \times \{1\})$ est muni d'un ordre $<_I$. Soit J l'ensemble des couples $((i, e), (j, f)) \in I$ tels que $(i, e) <_I (j, f)$ et $e \neq f$. Posons $X = \mathbb{N}^J$. Un élément de X s'écrit $x = (x_{(i,e),(j,f)})_{((i,e),(j,f)) \in J}$, avec des $x_{(i,e),(j,f)} \in \mathbb{N}$. Pour $x \in X$, on définit un couple $(\alpha[x], \beta[x]) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$ par

$$\alpha[x]_i = \alpha_i + (\sum_{j \in \{1,...,m\}, (i,0) <_I (j,1)} x_{(i,0),(j,1)}) - (\sum_{j \in \{1,...,m\}, (j,1) <_I (i,0)} x_{(j,1),(i,0)}),$$

$$\beta[x]_j = \beta_j + (\sum_{i \in \{1,...n\}, (j,1) <_I (i,0)} x_{(j,1),(i,0)}) - (\sum_{i \in \{1,...n\}, (i,0) <_I (j,1)} x_{(i,0),(j,1)}).$$

Pour $(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$, notons $X(\alpha, \beta; \nu, \mu)$ l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que $\alpha[x] = \nu$ et $\beta[x] = \mu$.

Remarques. (1) On a $S(\alpha[x]) + S(\beta[x]) = S(\alpha) + S(\beta)$ pour tout $x \in X$. On peut donc se limiter aux (ν, μ) tels que $S(\nu) + S(\mu) = S(\alpha) + S(\beta)$.

(2) L'ensemble $X(\alpha,\beta;\nu,\mu)$ est fini. En effet, identifions l'ensemble d'indices I à $\{1,...,n+m\}$ de façon croissante. Nos couples (α,β) et $(\alpha[x],\beta[x])$ deviennent des éléments de $\mathbb{Z}^{n+m}$. L'ensemble X devient un ensemble d'éléments $(x_{k,l})_{(k,l)}$ où (k,l) parcourt un sous-ensemble Σ de celui des couples tels que $k,l\in\{1,...,n+m\}$ et $k<l$. Pour $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_{n+m})\in\mathbb{Z}^{n+m}$, posons $<\gamma,\delta>=\sum_{i=1,...,n+m}(n+m+1-i)\gamma_i$. En particulier, pour $x\in X$, $<x,\delta>=\sum_{(k,l)\in\Sigma}(l-k)x_{k,l}$. Tous les coefficients sont positifs donc, pour un entier $c\in\mathbb{Z}$ quelconque, il n'y a qu'un nombre fini de $x\in X$ tels que $<x,\delta>=c$. Or un élément de $X(\alpha,\beta;\nu,\mu)$ doit vérifier $<x,\delta>=<(\nu,\mu),\delta>-<(\alpha,\beta),\delta>$.

On note $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_m$ les groupes de permutations de $\{1,...,n\}$ et $\{1,...,m\}$. On note sgn leur caractère signature usuel. Pour $\nu\in\mathbb{Z}^n$ et $w\in\mathfrak{S}_n$, on définit ν^w et $\nu[w]$ par $\nu_i^w=\nu_{wi}$ et $\nu[w]_i=\nu_{wi}+i-wi$. On définit de même μ^v et $\mu[v]$ pour $\mu\in\mathbb{Z}^m$ et $v\in\mathfrak{S}_m$.

Soient $(\nu,\mu)\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_m$. On suppose $S(\nu)+S(\mu)=S(\alpha)+S(\beta)$. On pose

$$mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)=\sum_{w\in\mathfrak{S}_n,v\in\mathfrak{S}_m}sgn(w)sgn(v)|X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])|.$$

On a $mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)\in\mathbb{Z}$.

Proposition. *Soient $(\nu,\mu)\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_m$. On suppose $S(\nu)+S(\mu)=S(\alpha)+S(\beta)$.*

(i) Supposons $mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)\neq 0$. Alors $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)\leq p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]$.

(ii) Supposons $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)=p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]$. Alors $mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)\neq 0$ si et seulement si $(\nu,\mu)\in P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$.

(iii) Supposons $(\nu,\mu)\in P_{A,B;s}(\alpha,\beta)$. Alors $mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)=1$.

4.2 Début de la preuve de la proposition

Preuve. On raisonne par récurrence sur $n+m$, tout étant trivial si $n+m=0$. Plus généralement, tout est trivial si $n=0$ ou $m=0$ (car $X=\emptyset$). On suppose donc $n\geq 1$ et $m\geq 1$ et on fixe $(\nu,\mu)\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_m$ avec $S(\nu)+S(\mu)=S(\alpha)+S(\beta)$. On ne perd rien à supposer $(1,0)<_I(1,1)$. On décompose

$$(1)\qquad mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)=\sum_{k=1,...,n}mult_k(\alpha,\beta;\nu,\mu),$$

où

$$mult_k(\alpha,\beta;\nu,\mu)=\sum_{w\in\mathfrak{S}_n,w1=k,v\in\mathfrak{S}_m}sgn(w)sgn(v)|X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])|.$$

On fixe $k\in\{1,...,n\}$. On identifie $\mathfrak{S}_{n-1}$ à l'ensemble des $w\in\mathfrak{S}_n$ tels que $w1=k$: un élément $w'\in\mathfrak{S}_{n-1}$ s'identifie à w tel que $w1=k$, $wi=w'(i-1)$ si $i=2...,n$ et $w'(i-1)<k$, $wi=w'(i-1)+1$ si $i=2,...,n$ et $w'(i-1)\geq k$. Ainsi, on a $sgn(w)=(-1)^{k+1}sgn(w')$. On note J' le sous-ensemble des $((i,e),(j,f))\in J$ tels que $(i,e)\neq(1,0)$ et J'' le complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $((1,0),(j,1))$, pour $j\in\{1,...,m\}$. L'ensemble X se décompose conformément en $X_{J'}\times X_{J''}$ et on peut identifier $X_{J''}$ à $\mathbb{N}^m$. On écrit tout élément de X sous la forme $(x',(x_j)_{j=1,...m})$ avec $x'\in X_{J'}$. Comme en 2.1, introduisons la partition $\alpha^-=(\alpha_2,...,\alpha_n)$ et l'ordre $<_{I^-}$ sur l'ensemble d'indices $I^-=(\{1,...,n-1\}\times\{0\})\cup(\{1,...,m\}\times\{1\})$. Pour $x'\in X_{J'}$, on

définit $(\alpha^-[x'],\beta[x'])$ de même que l'on a défini $(\alpha[x],\beta[x])$. Pour $x=(x',(x_j)_{j=1,...,m})$, on calcule

$$\alpha[x]_1=\alpha_1+\sum_{j=1,...,m}x_j;$$

pour $i=2,...,n$ et $j=1,...,m$,

$$\alpha[x]_i=\alpha'^-[x']_{i-1},$$

$$\beta[x]_j=\beta[x']_j-x_j.$$

Fixons $w'\in\mathfrak{S}_{n-1}$, soit $w\in\mathfrak{S}_n$ l'élément associé et décrivons l'ensemble $X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])$. Un élément $(x',(x_j)_{j=1,...m})\in X$ appartient à cet ensemble si et seulement si on a les égalités suivantes

(2) $\alpha_1+\sum_{j=1,...,m}x_j=\nu_k+1-k$;

(3) $\alpha^-[x']_{i-1}=\nu_{wi}-wi+i$ pour $i=2,...,n$;

(4) $\beta[x']-x_j=\mu_{vj}-vj+j$ pour $j=1,...,m$.

La relation (3) se décompose en $\alpha^-[x']_{i-1}=\nu_{w'(i-1)}-w'(i-1)+i$ si $w'(i-1)<k$ et $\alpha^-[x']_{i-1}=\nu_{w'(i-1)+1}-w'(i-1)+i-1$ si $w'(i-1)\geq k$. Définissons $\nu'\in\mathcal{P}_{n-1}$ par $\nu'_i=\nu_i+1$ si $i<k$ et $\nu'_i=\nu_{i+1}$ si $i\geq k$. La relation (3) équivaut à

(5) $\alpha^-[x']_i=\nu'_{w'i}-w'i+i$ pour tout $i\in\{1,...,n-1\}$.

Pour tout élément $y=(y_1,...,y_m)\in\mathbb{Z}^m$, notons $stab(y)$ le groupe des $u\in\mathfrak{S}_m$ tels que $y^u=y$. Notons $(\mathbb{Z}^m)^+$ l'ensemble des y tels que $y_1\geq y_2...\geq y_m$. Tout élément $y\in\mathbb{Z}^m$ s'écrit $y=z^u$ pour un unique $z\in(\mathbb{Z}^m)^+$ et un $u\in\mathfrak{S}_m$ dont la classe dans $stab(z)\backslash\mathfrak{S}_m$ est uniquement déterminée. On décompose $X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])$ en réunion

$$\sqcup_{z,u}X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v];z,u),$$

où z parcourt $(\mathbb{Z}^m)^+$ et u parcourt $stab(z)\backslash\mathfrak{S}_m$ et où $X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v];z,u)$ est le sous-ensemble des $x\in X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])$ tels que

(6) $\beta[x']_j-j=z_{uj}$ pour tout $j=1,...,m$.

L'ensemble $X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v];z,u)$ se décompose en produit d'un sous-ensemble de $X_{J'}$ et d'un sous-ensemble de $X_{J''}$. Le premier est l'ensemble des éléments $x'\in X_{J'}$ vérifiant les relations (5) et (6). Celles-ci ne dépendent que de $\alpha^-,\beta,\nu'[w'],z,u$, notons l'ensemble en question $X_{J'}(\alpha^-,\beta;\nu'[w'];z,u)$. Le deuxième ensemble est celui des $(x_j)_{j=1,...,m}\in X_{J''}$ vérifiant la relation (2) ainsi que

(7) $z_{uj}-x_j=\mu_{vj}-vj$ pour tout $j=1,...,m$.

Remarquons que, si cette dernière relation est vérifiée, on peut remplacer (2) par l'égalité

(8) $\alpha_1+S(z)-S(\mu)+\sum_{j=1,...,m}j=\nu_k+1-k$.

Celle-ci est indépendante des x_j. En conséquence, $X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v];z,u)$ est vide si (8) n'est pas vérifiée. Si elle l'est, le sous-ensemble de $X_{J''}$ est défini par la seule relation (7) et il est loisible de noter $X_{J''}(\mu[v];z,u)$ cet ensemble. Notons $Z(\alpha_1,\nu_k,\mu)$ l'ensemble des $z\in(\mathbb{Z}^m)^+$ vérifiant (8). On obtient

$$X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])=\sqcup_{z,u;z\in Z(\alpha_1,\nu_k,\mu)}X_{J'}(\alpha',\beta;\nu'[w'];z,u)\times X_{J''}(\mu[v];z,u).$$

Puis

$$\sum_{v\in\mathfrak{S}_m}sgn(v)|X(\alpha,\beta;\nu[w],\mu[v])|=\sum_{z\in Z(\alpha_1,\nu_k,\mu),u\in stab(z)\backslash\mathfrak{S}_m}|X_{J'}(\alpha^-,\beta;\nu'[w'];z,u)| \tag{9}$$

$$\sum_{v\in\mathfrak{S}_m} sgn(v)|X_{J''}(\mu[v];z,u)|.$$

Notons $Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$ l'ensemble des partitions $\mu'=(\mu'_1,...,\mu'_m)\in\mathcal{P}_m$ vérifiant

$$(10)\qquad \mu'_1\geq\mu_1\geq\mu'_2\geq\mu_2\geq...\geq\mu'_m\geq\mu_m$$

et

$$(11)\qquad \alpha_1+S(\mu')-S(\mu)=\nu_k+1-k.$$

Pour $\mu'\in Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$, notons $z(\mu')\in\mathbb{Z}^m$ l'élément tel que $z(\mu')_i=\mu'_i-i$. On a $z(\mu')\in Z(\alpha_1,\nu_k,\mu)$ et $stab(z(\mu'))=\{1\}$. Montrons que l'on a

(12) soit $z\in Z(\alpha_1,\nu_k,\mu)$; si $\sum_{v\in\mathfrak{S}_m} sgn(v)|X_{J''}(\mu[v];z,u)|\neq 0$, il existe $\mu'\in Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$ tel que $z=z(\mu')$; inversement, pour $\mu'\in Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$, on a

$$\sum_{v\in\mathfrak{S}_m} sgn(v)|X_{J''}(\mu[v];z(\mu'),u)|=sgn(u).$$

Preuve. La suite $\mu_1-1,\mu_2-2,...$ est strictement décroissante. Puisque $z\in(\mathbb{Z}^m)^+$, il existe d'unique entiers $0\leq l_1\leq l_2\leq...\leq l_m\leq m$ tels que

$$z_1\geq...\geq z_{l_1}\geq\mu_1-1>z_{l_1+1}\geq...\geq z_{l_2}\geq\mu_2-2>z_{l_2+1}\geq...$$

$$\geq z_{l_m}\geq\mu_m-m>z_{l_m+1}\geq...\geq z_m.$$

Soit $v\in\mathfrak{S}_m$. La relation (6) se récrit $x_{uv^{-1}h}=z_{uv^{-1}h}-\mu_h+h$ pour tout $h=1,...,m$. Puisque les x_h sont des entiers positifs ou nuls quelconques, l'ensemble $X_{J''}(\mu[v];z,u)$ a au plus un élément et il en a un si et seulement si $z_{uv^{-1}h}\geq\mu_h-h$ pour tout $h=1,...,m$, ce qui équivaut à

(13) $uv^{-1}h\leq l_h$ pour tout $h=1,...,m$.

Notons V l'ensemble des $v\in\mathfrak{S}_m$ qui vérifient cette condition. On obtient

$$\sum_{v\in\mathfrak{S}_m} sgn(v)|X_{J''}(\mu[v];z,u)|=\sum_{v\in V} sgn(v).$$

Supposons la somme de gauche non nulle. Alors V n'est pas vide. La condition (13) pour $v\in V$ entraîne $uv^{-1}1,...uv^{-1}h\leq l_h$, en particulier $l_m=m$. Introduisons le sous-groupe $\mathfrak{T}$ des éléments de $\mathfrak{S}_m$ qui conservent chacun des intervalles $\{1,...,l_1\}$, $\{l_1+1,...,l_2\}$ .... On voit alors que l'action du groupe $u^{-1}\mathfrak{T}u$ par multiplication à droite sur $\mathfrak{S}_m$ conserve l'ensemble V. En fixant un ensemble $\underline{V}$ de représentants de cette action dans cet ensemble, on obtient

$$\sum_{v\in V} sgn(v)=\sum_{v\in\underline{V}} sgn(v)\sum_{v'\in u^{-1}\mathfrak{T}u} sgn(v').$$

La non-nullité de cette expression entraîne que $\mathfrak{T}=\{1\}$. On en déduit $l_h=h$ pour tout h. On a alors

$$z_1\geq\mu_1-1>z_2\geq\mu_2-2>...>z_m\geq\mu_m-m.$$

En posant $\mu'_i=z_i+i$, on a $\mu'\in Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$ et $z=z(\mu')$. Inversement, si $z=z(\mu')$ pour $\mu'\in Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$, on a $l_h=h$ pour tout h. On voit par récurrence sur h que la condition (13) est vérifiée si et seulement si $uv^{-1}h=h$ pour tout h, autrement dit $u=v$. On a alors $V=\{u\}$ d'où $\sum_{v\in V} sgn(v)=sgn(u)$. Cela démontre (12).

Pour $\mu' \in Q(\alpha_1, \nu_k + 1 - k, \mu)$ l'ensemble $X_{J'}(\alpha^-, \beta; \nu'[w']; z(\mu'), u)$ n'est autre que $X(\alpha^-, \beta; \nu'[w'], \mu'[u])$. L'égalité (9) et la propriété (12) entraînent

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n, w1=k} \sum_{v \in \mathfrak{S}_m} sgn(w)sgn(v)|X(\alpha, \beta; \nu[w], \mu[v])| = (-1)^{k+1} \sum_{\mu' \in Q(\alpha_1, \nu_k+1-k, \mu)} \sum_{w' \in \mathfrak{S}_{n-1}}$$

$$\sum_{v \in \mathfrak{S}_m} sgn(w')sgn(v)|X(\alpha^-, \beta; \nu'[w'], \mu'[v])|.$$

Autrement dit

$$(14) \qquad mult_k(\alpha, \beta; \nu, \mu) = (-1)^{k+1} \sum_{\mu' \in Q(\alpha_1, \nu_k+1-k, \mu)} mult(\alpha^-, \beta; \nu', \mu').$$

4.3 Deuxième étape de la preuve

On suppose donné un entier $k \in \{1, ..., n\}$ et un élément $\mu' \in Q(\alpha_1, \nu_k + 1 - k, \mu)$. On suppose que

(1) $mult(\alpha^-, \beta; \nu', \mu') \neq 0$ ou $(\nu', \mu') \in P(\alpha^-, \beta)$.

Cette hypothèse entraîne

(2) pour tout $c \in \{1, ..., N + M - 1\}$, tous réels $A' \geq sN - 2s$ et $B' \geq sM - s$, on a

$$S_c(p^{N-1,M}_{A',B';s}(\nu', \mu')) \leq S_c(p^{N-1,M}_{A',B';s}[\alpha^-, \beta]).$$

En effet, si $mult(\alpha^-, \beta; \nu', \mu') \neq 0$, c'est le (i) de la proposition que l'on applique par récurrence. Si $(\nu', \mu') \in P(\alpha^-, \beta)$, c'est le lemme 1.4.

Pour tout entier $c \in \{1, ..., N + M\}$, on fixe des réels $A(c) \geq sN - s$, $B(c) \geq sM - s$. On va prouver que

(3) pour tout $c \in \{1, ..., N + M\}$, on a

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu, \mu)) \leq S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha, \beta]).$$

Remarque. L'entier c étant fixé, on pourrait aussi bien simplifier la notation en posant $A = A(c)$ et $B = B(c)$. Mais on reprendra la démonstration qui suit en 4.5 et il nous semble que les preuves de ce paragraphe seront plus claires si nous introduisons dès maintenant les notations qui seront alors nécessaires.

Soit $c \in \{1, ..., N + M\}$. On fixe des entiers $a(c) \in \{0, ..., N\}$, $b(c) \in \{0, ..., M\}$ tels que $a(c) + b(c) = c$ et

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu, \mu)) = S_{a(c)}((\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c), A(c) + s - sN]_s)$$

$$+S_{b(c)}((\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c) + s - sM]_s).$$

Supposons d'abord que $a(c) < k$. On a $\nu_i = \nu'_i - 1$ pour $i = 1, ..., a(c)$, donc $S_{a(c)}((\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c), A(c) + s - sN]_s) = S_a((\nu' \sqcup \{0^{N+1-n}\}) + [A(c), A(c) + 2s - sN]_s) - a(c)$ (la première partition a N termes et la seconde en a $N - 1$ mais on ne considère que les a premiers termes et on $a < k \leq n \leq N$). D'après 4.2(10), on a $S_{b(c)}((\mu \sqcup \{0^{M-m}\} + [B(c), B(c) + s - sM]_s) \leq S_{b(c)}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\} + [B(c), B(c) + s - sM]_s)$ d'où

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu, \mu)) \leq S_{a(c)}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c), A(c) + 2s - sN]_s)$$

$$+S_{b(c)}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c)+s-sM]_s) - a(c)$$
$$\leq S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}(\nu',\mu')) - a(c) \leq S_c(p^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha^-,\beta]) - a(c),$$

la dernière inégalité résultant de (2). On a $S_c(p^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha^-,\beta]) \leq S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha^-,\beta])$: cette inégalité est équivalente à $S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}(\chi,\xi)) \leq S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\chi,\xi))$ où (χ,ξ) est un élément de $P_{A(c),B(c);s}(\alpha^-,\beta)$, et cette dernière inégalité est évidente puisque $p\Lambda^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}(\chi,\xi))$ est extraite de $p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\chi,\xi)$. On applique le lemme 3.1 : $S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha^-,\beta]) \leq S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha,\beta])$ d'où l'inégalité (3).

On suppose maintenant $a(c) \geq k$. On a $\nu_i = \nu'_i - 1$ pour $i = 1,...,k-1$, $\nu_k = k-1+\alpha_1+S(\mu')-S(\mu)$ (d'après 4.2(11)) et $\nu_i = \nu'_{i-1}$ pour $i = k+1,...,n$. C'est-à-dire

$$\nu \sqcup \{0^{N-n}\} = (\nu'_1 - 1, ..., \nu'_{k-1} - 1, k-1+\alpha_1+S(\mu')-S(\mu), \nu'_k, ..., \nu'_{n-1}, 0, ..., 0).$$

D'où
$$S_{a(c)}(\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) = \alpha_1 + S(\mu') - S(\mu) + S_{a(c)-1}(\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}).$$

On a aussi

$$S_{a(c)}([A(c), A(c)+s-sN]_s) = A(c) + S_{a(c)-1}([A(c)-s, A(c)+s-sN]_s).$$

D'où

$$(4) \qquad S_{a(c)}((\nu \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c), A(c)+s-sN]_s) = \alpha_1 + S(\mu') - S(\mu) + A(c)$$
$$+S_{a(c)-1}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c)-s, A(c)+s-sN]_s).$$

Supposons $b(c) \geq m$. Dans ce cas,

$$S_{b(c)}((\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c)+s-sM]_s) = S(\mu) + S_{b(c)}([B(c), B(c)+s-sM]_s)$$
$$= S(\mu) - S(\mu') + S_{b(c)}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c)+s-sM]_s).$$

D'où

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu,\mu)) = \alpha_1 + A(c) + S_{a(c)-1}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A-s, A+s-sN]_s)$$
$$+S_{b(c)}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c)+s-sM]_s)$$
$$\leq \alpha_1 + A(c) + S_{c-1}(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}(\nu',\mu')) \leq \alpha_1 + A(c) + S_{c-1}(p^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}[\alpha^-,\beta]),$$

la dernière inégalité résultant de (2) si $c \geq 2$ et étant triviale si $c = 1$. On applique le lemme 3.5(i) :

$$\alpha_1 + A(c) + S_{c-1}(p^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}[\alpha^-,\beta]) \leq S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha,\beta]),$$

d'où l'inégalité (3).

Supposons maintenant $b(c) < m$. On a donc $b(c) < M$. On a aussi $b(c) < c$ car $c = b(c) + a(c)$ et $a(c) \geq k \geq 1$. Donc $b(c) < inf(c, M)$. On a défini en 2.4 l'entier $b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}(\alpha^-,\beta;c)$. S'il est supérieur ou égal à $b(c)+1$, on pose $e(c) = 0$ et $\underline{b}(c) = b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}(\alpha^-,\beta;c)$. Sinon, le lemme 2.4 entraîne l'existence d'un entier $e \geq 1$ tel que

$b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+es/2;s}(\alpha^-,\beta;c) = b(c)+1$. On fixe cet entier que l'on note $e(c)$ et on pose $\underline{b}(c) = b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}(\alpha^-,\beta;c) = b(c)+1$. On a

$$S_{b(c)}((\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c)+s-sM]_s) = S_{b(c)}(\mu) + S_{b(c)}([B(c), B(c)+s-sM]_s)$$

$$= S_{b(c)}(\mu) + S_{b(c)+1}([B(c), B(c)+s-sM]_s) - B(c) + sb(c)$$

$$= S_{b(c)}(\mu)+S_{b(c)+1}([B(c)+e(c)s/2, B(c)+e(c)s/2+s-sM]_2)-B(c)+sb(c)-(b(c)+1)e(c)s/2$$

$$= S_{b(c)}(\mu)-S_{b(c)+1}(\mu')+S_{b(c)+1}((\mu'\sqcup\{0^{M-m}\})+[B(c)+e(c)s/2, B(c)+e(c)s/2+s-sM]_s)$$

$$-B(c) + sb(c) - (b(c)+1)e(c)s/2.$$

Avec (4), on obtient

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu,\mu)) = \alpha_1 + S(\mu') - S(\mu) + S_{b(c)}(\mu) - S_{b(c)+1}(\mu') + A(c) - B(c) + sb(c)$$

$$-(b(c)+1)e(c)s/2 + S_{a(c)-1}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c)-s, A(c)+s-sN]_s)$$

$$+S_{b(c)+1}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c)+e(c)s/2, B(c)+e(c)s/2+s-sM]_s)$$

$$\leq \alpha_1 + S(\mu') - S(\mu) + S_{b(c)}(\mu) - S_{b(c)+1}(\mu') + A - B + sb(c) - (b(c)+1)e(c)s/2$$

$$+S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}(\nu',\mu')).$$

D'après (2), on a

$$S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}(\nu',\mu')) \leq S_c(p^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}[\alpha^-,\beta]).$$

On a aussi

$$S(\mu')-S(\mu)+S_{b(c)}(\mu)-S_{b(c)+1}(\mu') = -\mu_{b(c)+1}+\mu'_{b(c)+2}-\mu_{b(c)+2}+\mu'_{b(c)+3}...-\mu_{m-1}+\mu'_m-\mu_m.$$

Les sommes $-\mu_{b(c)+1}+\mu'_{b(c)+2}$, $-\mu_{b(c)+2}+\mu'_{b(c)+3}$ ... sont négatives ou nulles d'après 4.2(10) et le dernier terme $-\mu_m$ l'est aussi. D'où

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu,\mu)) \leq \alpha_1+A(c)-B(c)+sb(c)-(b(c)+1)e(c)s/2+S_c(p^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}[\alpha^-,\beta]).$$

On a

$$\alpha_1 + A(c) - B(c) + sb(c) - (b(c)+1)e(c)s/2 \leq \alpha_1 + A(c) - B(c) - s + s\underline{b}(c)(1-e(c)/2).$$

En effet, cela équivaut à $s(\underline{b}(c)-1-b(c)) + s(b(c)+1-\underline{b}(c))e(c)/2 \geq 0$. Le premier terme est positif ou nul par construction et le second est nul (si $e(c) \neq 0$, $\underline{b}(c) = b(c)+1$ par construction). D'où

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c)}(\nu,\mu)) \leq \alpha_1+A(c)-B(c)-s+s\underline{b}(c)(1-e(c)/2)+S_c(p^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}[\alpha^-,\beta]).$$

On a $\underline{b}(c) \geq b(c)+1 \geq 1$. Le lemme 3.5(ii) entraîne alors l'inégalité (3). Cela achève la preuve de cette inégalité.

4.4 Preuve du (i) de la proposition 4.1

Supposons $mult(\alpha,\beta;\nu,\mu)\neq 0$. D'après 4.2(1), on peut fixer $k\in\{1,...,n\}$ tel que $mult_k(\alpha,\beta;\nu,\mu)\neq 0$. D'après 4.2(14), on peut fixer $\mu'\in Q(\alpha_1,\nu_k+1-k,\mu)$ tel que $mult(\alpha^-,\beta;\nu',\mu')\neq 0$. Dans les constructions de 4.3, on prend simplement $A(c)=A$ et $B(c)=B$ pour tout c. Les hypothèses de ce paragraphe étant satisfaites, la relation (3) de ce paragraphe nous dit que

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu))\leq S_c(p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta])$$

pour tout $c\in\{1,...,N+M\}$. Autrement dit $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu,\mu)\leq p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha,\beta]$. C'est l'assertion (i) de la proposition.

4.5 Une nouvelle étape

Comme en 4.3, fixons pour tout $c\in\{1,...,N+M\}$ des réels $A(c)\geq sN-s$, $B(c)\geq sM-s$, $a(c)\in\{0,...,N\}$, $b(c)\in\{0,...M\}$. Disons que ces données satisfont l'hypothèse $(Hyp)(\alpha,\beta;\nu,\mu)$ si les conditions suivantes sont satisfaites

(1) pour tout $c\in\{1,...,N+M\}$, $a(c)+b(c)=c$ et

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu,\mu))=S_{a(c)}((\nu\sqcup\{0^{N-n}\})+[A(c),A(c)+s-sN]_s)$$

$$+S_{b(c)}((\mu\sqcup\{0^{M-m}\})+[B(c),B(c)+s-sM]_s);$$

(2) pour tout $c\in\{1,...,N+M-1\}$, $a(c)\leq a(c+1)\leq a(c)+1$ et $b(c)\leq b(c+1)\leq b(c)+1$;

(3) pour tout $c\in\{1,...,N+M\}$,

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu,\mu))=S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha,\beta]).$$

Supposons ces hypothèses satisfaites. On note c^0 le plus petit entier c tel que $a(c)=1$ et c^1 le plus petit entier c tel que $b(c)=m$ (de tels entiers existent d'après (2)). On a forcément $c^1\geq m$.

Remarque (4) $c^0\neq c^1$.

En effet, si $c^1=1$, on a forcément $m=1$ et $b(1)=1$. Alors $a(1)=1-b(1)=0$ et $1\neq c^0$ puisque $a(c^0)=1$. Si $c^1\geq 2$, on a $b(c^1-1)=m-1$ donc $a(c^1-1)=c^1-1-b(c^1-1)=c^1-b(c^1)=a(c^1)$ ce qui interdit à c^1 d'être le plus petit entier c tel que $a(c)=1$.

On définit un élément $\underline{\mu}\in\mathbb{Z}^m$ par

si $c^0\leq c^1$, $\underline{\mu}_i=\mu_i$ pour $i=1,...,c^0-1$, $\underline{\mu}_{c^0}=\nu_1-\alpha_1$, $\underline{\mu}_i=\mu_{i-1}$ pour $i=c^0+1,...,m$;

si $c^0>c^1$, $\underline{\mu}=\mu$.

On définit des réels $\underline{A}(c)$, $\underline{B}(c)$ et des entiers $\underline{a}(c)$, $\underline{b}(c)$ pour $c\in\{1,...,N+M-1\}$ de la façon suivante. Pour $c=1,...,c^0-1$, on pose $\underline{A}(c)=A(c)$, $\underline{B}(c)=B(c)$, $\underline{a}(c)=a(c)=0$, $\underline{b}(c)=b(c)=c$. Si $c^1<c^0$, on pose $\underline{A}(c)=A(c+1)-s$, $\underline{B}(c)=B(c+1)$, $\underline{a}(c)=a(c+1)-1$ et $\underline{b}(c)=b(c+1)$ pour $c=c^0,...,N+M-1$. Supposons $c^0<c^1$. Soit $c\in\{c^0,...,c^1-1\}$. On pose $\underline{A}(c)=A(c)-s$, $\underline{a}(c)=a(c)-1$ et $\underline{b}(c)=b(c)+1$. Si $b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}(\alpha^-,\beta;c)\geq b(c)+1$, on pose $\underline{B}(c)=B(c)$. Si $b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c);s}(\alpha^-,\beta;c)\leq b(c)$, on choisit un entier $e(c)$ tel que $b^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}(\alpha^-,\beta;c)=b(c)+1$ et on pose $\underline{B}(c)=B(c)+e(c)s/2$. Soit

$c \in \{c^1, ..., N+M-1\}$. On pose $\underline{A}(c) = A(c+1) - s$, $\underline{B}(c) = B(c+1)$, $\underline{a}(c) = a(c+1) - 1$ et $\underline{b}(c) = b(c+1)$.

Il est clair que, pour tout $c \in \{1, ..., N+M-1\}$, on a $\underline{a}(c) \in \{0, ..., N-1\}$, $\underline{b}(c) \in \{0, ..., M\}$ et $\underline{a}(c) + \underline{b}(c) = c$. Montrons que l'on a l'analogue de (2), c'est-à-dire que

(5) si $c \neq N+M-1$, on a $\underline{a}(c) \leq \underline{a}(c+1) \leq \underline{a}(c) + 1$, $\underline{b}(c) \leq \underline{b}(c+1) \leq \underline{b}(c) + 1$.

Il suffit de prouver la première série d'inégalités car la seconde se déduit de la première et de l'égalité $\underline{a}(c) + \underline{b}(c) = c$. Supposons $c^1 < c^0$. En vertu de (2), (5) est clair sauf si $c = c^0 - 1$. Ce cas n'intervient que si $c^0 \neq N+M$. Dans ce cas, on a $\underline{a}(c^0 - 1) = 0$ et $\underline{a}(c^0) = a(c^0 + 1) - 1$. Or

$$0 = a(c^0) - 1 \leq a(c^0 + 1) - 1 \leq a(c^0) = 1$$

d'où l'inégalité cherchée. Supposons $c^0 < c^1$. En vertu de (2), (5) est clair sauf si $c = c^0 - 1$ (ce cas n'intervient que si $c^0 \neq 1$) ou $c = c^1 - 1$ (ce cas n'intervient que si $c^1 \neq N+M$). Si $c^0 \neq 1$, on a $\underline{a}(c^0 - 1) = 0$ et $\underline{a}(c^0) = a(c^0) - 1 = 0$, d'où l'inégalité cherchée. Si $c^1 \neq N+M$, on a $\underline{a}(c^1 - 1) = a(c^1 - 1) - 1$ et $\underline{a}(c^1) = a(c^1 + 1) - 1$. On a $b(c^1 - 1) < b(c^1)$, d'où $a(c^1 - 1) = a(c^1)$ et l'inégalité cherchée se déduit des inégalités $a(c^1) \leq a(c^1 + 1) \leq a(c^1) + 1$. Cela prouve (5).

Lemme. *On suppose satisfaite l'hypothèse $(Hyp)(\alpha, \beta; \nu, \mu)$. Soient $k \in \{1, ..., n\}$ et $\mu' \in \mathcal{P}_m$. Supposons que μ' appartienne à $Q(\alpha_1, \nu_k + 1 - k, \mu)$ et que $mult_k(\alpha^-, \beta; \nu', \mu') \neq 0$ ou que $(\nu', \mu') \in P(\alpha^-, \beta)$. Alors*

(i) $k = 1$;

(ii) $\mu' = \underline{\mu}$ et, si $c^0 < c^1$, $\mu_m = 0$;

(iii) les données $\underline{A}(c)$, $\underline{B}(c)$, $\underline{a}(c)$ et $\underline{b}(c)$ pour $c \in \{1, ..., N+M-1\}$ satisfont l'hypothèse $(Hyp)(\alpha^-, \beta; \nu', \mu')$.

Remarque. Les assertions (i) et (ii) impliquent que, sous les hypothèses de l'énoncé, $\underline{\mu}$ est une partition, qui appartient à $Q(\alpha_1, \nu_1, \mu)$ (en particulier, si $c^1 < c^0$, on a alors $\nu_1 - \alpha_1 = S(\underline{\mu}) - S(\mu) = 0$). On voit alors que $(\nu, \mu) = \iota_{c^0, \alpha_1}(\nu', \underline{\mu})$ avec la notation de 2.3.

Preuve. On reprend la preuve de 4.3 dont les hypothèses sont satisfaites. Pour tout $c \in \{1, ..., N+M\}$, on y a écrit différentes suites d'inégalités dont le premier terme était $S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu, \mu))$ et le dernier $S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha, \beta])$. Maintenant, on sait par (3) que les termes extrêmes sont égaux. Donc toutes les inégalités de ces suites sont des égalités. Supposons que $k > 1$. On prend $c = c^0$. On a alors $a(c^0) = 1 < k$. Mais on a alors prouvé que

$$S_c(p\Lambda^{N,M}_{A(c),B(c);s}(\nu, \mu)) \leq S_c(p^{N,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha, \beta]) - a(c^0),$$

ce qui contredit (3). Cela prouve que $k = 1$. Supposons donc $k = 1$. On veut prouver (ii) et que, pour tout $c \in \{1, ..., N+M-1\}$, on a

$$(6) \qquad S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{\underline{A}(c),\underline{B}(c);s}(\nu', \mu')) = S_{\underline{a}(c)}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [\underline{A}(c), \underline{A}(c) + 2s - sN]_s)$$

$$+ S_{\underline{b}(c)}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [\underline{B}(c), \underline{B}(c) + s - sM]_s);$$

et

$$(7) \qquad S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{\underline{A}(c),\underline{B}(c);s}(\nu', \mu')) = S_c(p^{N-1,M}_{\underline{A}(c),\underline{B}(c);s}[\alpha^-, \beta]).$$

Soit $c \in \{1, ..., c^0 - 1\}$. Alors $a(c) = 0 < k = 1$. On a alors utilisé l'inégalité $S_{b(c)}(\mu \sqcup \{0^{M-m}\}) \leq S_{b(c)}(\mu' \sqcup \{0^{M-m}\})$. Elle devient une égalité. De plus, on a $b(c) = c$. Ces égalités sont vraies pour tout $c < c^0$ donc les termes de $\mu \sqcup \{0^{M-m}\}$ et de $\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}$ coïncident jusqu'à l'ordre $c^0 - 1$. Si $c^1 < c^0$, on a $c^1 = b(c^1) = m$, donc $\mu' = \mu$. On a aussi $\underline{\mu} = \mu$ par définition d'où $\mu' = \underline{\mu}$. Si $c^0 < c^1$, on a $c^0 - 1 = b(c^0 - 1) < m$ et les termes de μ et μ' coïncident jusqu'à l'ordre $c^0 - 1$. On a aussi utilisé les inégalités

$$S_{a(c)}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c), A(c) + 2s - sN]_s) + S_{b(c)}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c), B(c) + s - sM]_s)$$

$$\leq S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}(\nu', \mu')) \leq S_c(p^{N-1,M}_{A(c),B(c);s}[\alpha^-, \beta]).$$

Ces inégalités deviennent des égalités, qui ne sont autres que (6) et (7).

Supposons $c^0 < c^1$ et prenons maintenant $c \in \{c^0, ..., c^1 - 1\}$. On a $a(c) \geq 1 = k$ et $b(c) < m$. On a utilisé les inégalités $\mu_{b(c)+1} \geq \mu'_{b(c)+2}$, $\mu_{b(c)+2} \geq \mu'_{b(c)+3}$,... et $\mu_m \geq 0$. Ces inégalités deviennent des égalités. Donc $\mu_m = 0$. En prenant $c = c^0$, on a $b(c) = b(c^0 - 1) = c^0 - 1$ et on voit que les termes $\mu'_{c^0+1}, ...\mu'_m$ coïncident avec $\mu_{c^0}, ..., \mu_{m-1}$. Puisqu'on a déjà vu que μ' et μ coïncidaient jusqu'à l'ordre $c^0 - 1$, seul le terme μ'_{c^0} reste indéterminé. Mais on a $\mu'_{c^0} = S(\mu') - S(\mu)$ et, d'après l'hypothèse $\mu' \in Q(\alpha_1, \nu_1, \mu)$, cette expression vaut $\nu_1 - \alpha_1$. Cela prouve que $\mu' = \underline{\mu}$, d'où (ii). On a aussi utilisé les inégalités

$$S_{a(c)-1}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c) - s, A(c) + s - sN]_s)$$

$$+S_{b(c)+1}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c) + e(c)s/2, B(c) + e(c)s/2 + s - sM]_s)$$

$$\leq S_c(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}(\nu', \mu')) \leq S_c(p^{N-1,M}_{A(c)-s,B(c)+e(c)s/2;s}[\alpha^-, \beta]).$$

Elles deviennent des égalités qui ne sont autres que (6) et (7).

Prenons maintenant $c \in \{sup(c^0, c^1), ..., N + M - 1\}$. On utilise notre calcul de 4.3 en $c' = c + 1$. On a $a(c') \geq 1 = k$ et $b(c') \geq m$. On a utilisé les inégalités

$$S_{a(c')-1}((\nu' \sqcup \{0^{N-n}\}) + [A(c') - s, A(c') + s - sN]_s) +$$

$$S_{b(c')}((\mu' \sqcup \{0^{M-m}\}) + [B(c'), B(c') + s - sM]_s) \leq S_{c'}(p\Lambda^{N-1,M}_{A(c')-s,B(c');s}(\nu', \mu'))$$

$$\leq S_{c'}(p^{N-1,M}_{A(c')-s,B(c');s}[\alpha^-, \beta]).$$

Elles deviennnent des égalités qui ne sont autres que (6) et (7). Cela achève la démonstration. □

4.6 Avant-dernière étape

On lève pour cette étape les hypothèses $n \geq 1$, $m \geq 1$ et $(1, 0) <_I (1, 1)$ (c'est nécessaire pour raisonner par récurrence dans la preuve du lemme ci-dessous). Soit $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$. Supposons qu'il existe des entiers $A(c)$, $B(c)$, $a(c)$, $b(c)$ pour $c = 1, ..., N + M$, satisfaisant l'hypothèse $(Hyp)(\alpha, \beta; \nu, \mu)$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, les deux conditions* $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) \neq 0$ *et* $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$ *sont équivalentes. Si elles sont vérifiées, on a* $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) = 1$.

Preuve. Si $n = 0$ ou $m = 0$, les deux conditions équivalent à $(\nu, \mu) = (\alpha, \beta)$ et on a bien $mult(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 1$. Supposons $n \geq 1$ et $m \geq 1$. De nouveau, on ne perd rien à supposer $(1, 0) <_I (1, 1)$. D'après 4.2(1) et (14), on a

$$mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) = \sum_{k=1,...,n} \sum_{\mu' \in Q(\alpha_1, \nu_k+1-k, \mu)} (-1)^{k-1} mult(\alpha^-, \beta; \nu', \mu').$$

Le lemme 4.5 entraîne qu'il y a au plus un terme non nul dans cette somme : on a forcément $k = 1$ et $\mu' = \underline{\mu}$ (ce terme ne contribue pas forcément et d'ailleurs, $\underline{\mu}$ n'est pas forcément une partition).

Supposons $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) \neq 0$. Alors il y a au moins un terme qui contribue et on a

$$(1) \qquad mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) = mult(\alpha^-, \beta; \nu', \underline{\mu}).$$

Le lemme 4.5 entraîne aussi que les données $\underline{A}(c)$, $\underline{B}(c)$, $\underline{a}(c)$, $\underline{b}(c)$ pour $c = 1, ..., N+M-1$ vérifient l'hypothèses $(Hyp)(\alpha^-, \beta; \nu', \underline{\mu})$. On applique l'énoncé par récurrence : on a donc $(\nu', \underline{\mu}) \in P(\alpha^-, \beta)$ et $mult(\alpha^-, \beta; \nu', \underline{\mu}) = 1$. Avec (1), on en déduit $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) = 1$. Par définition, on a

pour $c = 1, ..., c^0 - 1$, $\underline{b}(c) = c$;

si $c^0 < c^1$, $\underline{b}(c^0) = b(c^0) + 1 = c^0$;

si $c^1 < c^0$, auquel cas $c^1 = m$, $\underline{b}(c^1) = b(c^1) = m$.

Alors $(Hyp)(\alpha^-, \beta; \nu', \underline{\mu})$ entraîne que $(\nu', \underline{\mu})$ vérifie les hypothèses de 2.2 où $c = c^0$ si $c^0 < c^1$ et $c = m$ si $c^1 < c^0$. En se rappelant que, d'après 2.2(1), on a $P^{b[c]}(\alpha^-, \beta) = P^{b[m]}(\alpha^-, \beta)$ si $c \geq m$, le lemme 2.2 implique en tout cas que $(\nu', \underline{\mu}) \in P^{b[c^0]}(\alpha^-, \beta)$. Le lemme 2.3 implique que $\iota_{c^0,\alpha_1}(\nu', \underline{\mu})$ appartient à $P(\alpha, \beta)$. Or la remarque qui suit le lemme 4.5 dit que $\iota_{c^0,\alpha_1}(\nu', \underline{\mu}) = (\nu, \mu)$. Donc $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$, ce qui démontre un sens de l'équivalence de l'énoncé.

Au lieu de supposer que $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) \neq 0$, on suppose maintenant que $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$. D'après le lemme 2.3, on peut fixer $c \in \{1, ..., m + 1\}$ et $(\nu'', \mu'') \in P(\alpha^-, \beta)$ tel que $(\nu, \mu) = \iota_{c,\alpha_1}(\nu'', \mu'')$. Il résulte de la définition de 2.3 que $\nu'' = \nu'$. On voit aussi que (ν', μ'') appartient à $Q(\alpha_1, \nu_1, \mu)$. Alors le lemme 4.5 entraîne de nouveau que les données $\underline{A}(c)$, $\underline{B}(c)$, $\underline{a}(c)$, $\underline{b}(c)$ pour $c = 1, ..., N+M-1$ vérifient l'hypothèse $(Hyp)(\alpha^-, \beta; \nu', \mu'')$. On applique l'énoncé par récurrence : on a donc $mult(\alpha^-, \beta; \nu', \mu'') = 1$. Comme on l'a vu au début de la preuve, le terme (ν', μ'') est alors l'unique terme contribuant à $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu)$. D'où $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) = 1$, ce qui achève la démonstration. □

4.7 Fin de la preuve de la proposition

On revient aux hypothèses de 4.2. Supposons $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]$. Pour tout $c = 1, ..., N + M$, on pose $A(c) = A$ et $B(c) = B$. Alors l'égalité (3) de 4.5 est satisfaite. On voit que l'on peut trouver des entiers $a(c)$ et $b(c)$ vérifiant (1) et (2) de ce paragraphe (par exemple, on choisit $a(c)$ le plus grand possible pour que (1) soit vérifié ; alors (2) l'est aussi). L'hypothèse $(Hyp)(\alpha, \beta; \nu, \mu)$ est donc vérifiée. Le lemme 4.6 implique que les conditions $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) \neq 0$ et $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$ sont équivalentes. Mais, compte tenu de l'hypothèse $p\Lambda^{N,M}_{A,B;s}(\nu, \mu) = p^{N,M}_{A,B;s}[\alpha, \beta]$, la condition $(\nu, \mu) \in P(\alpha, \beta)$ est équivalente à $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$. Cela prouve le (ii) de la proposition. Pour le (iii), l'hypothèse $(\nu, \mu) \in P_{A,B;s}(\alpha, \beta)$ est plus forte que celle du (ii). Comme on vient de le voir, on peut appliquer le lemme 4.6, qui entraîne $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu) = 1$. Cela achève la preuve de la proposition. □

5 Composantes extrémales d'une représentation construite par Lusztig

5.1 La correspondance de Springer généralisée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n, c'est-à-dire l'ensemble des partitions $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_t)$ telles que $S(\lambda) = n$.

Remarque. On prendra garde de ne pas confondre l'ensemble $\mathcal{P}(n)$ avec l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des paragraphes précédents : pour le premier ensemble, n est la somme des termes de la partition tandis que, pour le second, n est son nombre de termes. D'autre part, il convient ici d'identifier deux partitions ne différant que par des termes nuls : $(\lambda_1, ..., \lambda_t)$ est la même partition que $(\lambda_1, ..., \lambda_t, 0, ..., 0)$.

On note $\mathcal{P}_2(n)$ l'ensemble des couples (α, β) de partitions telles que $S(\alpha) + S(\beta) = n$. On note W_n le groupe de Weyl d'un système de racines de type C_n, avec la convention $W_0 = \{1\}$. On note $W_n^\vee$ l'ensemble des représentations irréductibles de W_n. Il est bien connu que $W_n^\vee$ est paramétré par $\mathcal{P}_2(n)$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n)$, on note $\rho_{\alpha,\beta}$ la représentation de W_n paramétrée par ce couple. En particulier, $\rho_{(n),\emptyset}$ est la représentation triviale et $\rho_{\emptyset,(1^n)}$ est le caractère signature usuel, que l'on note sgn.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}^{symp}(2N)$ l'ensemble des partitions symplectiques de $2N$, c'est-à-dire l'ensemble des partitions $\lambda \in \mathcal{P}(2N)$ telles que $mult_\lambda(i)$ est pair pour tout entier i impair. Pour $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_t) \in \mathcal{P}^{symp}(2N)$, on note $Jord(\lambda)$ l'ensemble des entiers $i \geq 1$ tels que $mult_\lambda(i) > 0$ et $Jord^{bp}(\lambda)$ le sous-ensemble des entiers pairs. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ l'ensemble des couples (λ, ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2N)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord^{bp}(\lambda)}$.

La correspondance de Springer généralisée, définie par Springer et Lusztig, établit une bijection entre $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ et l'ensemble $\bigcup_k W^\vee_{N-k(k+1)/2}$, où k parcourt les éléments de $\mathbb{N}$ tels que $k(k+1) \leq 2N$. Ou encore avec l'ensemble $\bigcup_k \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$. Rappelons la définition de cette bijection. On fixe un entier r assez grand

Remarque. On peut prendre $r = N$ mais il peut être utile de laisser à r une certaine liberté. La construction qui suit ne dépend pas du choix de r.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) \leq 2N$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$. On définit un couple de partitions $(A_{\alpha,\beta}, B_{\alpha,\beta})$ par

si k est pair, $A_{\alpha,\beta} = \alpha + [2r + k, 0]_2$, $B_{\alpha,\beta} = \beta + [2r - 1 - k, 1]_2$;

si k est impair, $A_{\alpha,\beta} = \beta + [2r - 1 - k, 0]_2$, $B_{\alpha,\beta} = \alpha + [2r + k, 1]_2$.

Remarque. Pour définir ces sommes, on complète α et β par suffisamment de 0 pour que α ait $r + [k/2] + 1$ termes et que β ait $r - [(k+1)/2]$ termes, où, pour tout réel x, $[x]$ désigne sa partie entière.

Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Dans la partition $\lambda + [2r - 1, 0]_1$, il y a autant d'entiers pairs que d'impairs. On note les pairs $2z_1 > ... > 2z_r$ et les impairs $2z'_1 + 1 > ... > 2z'_r + 1$. Cela définit des partitions z et z'. On pose $A^\sharp_\lambda = (z' + [r+1, 2]_1) \sqcup \{0\}$, $B^\sharp_\lambda = z + [r, 1]_1$. On calcule facilement

$$(1)(a) \qquad A^\sharp_{\lambda,j} = \begin{cases} \lambda_{2j-1}/2 + 2r + 2 - 2j, & \text{si } \lambda_{2\mathrm{j}-1} \text{ est pair,} \\ (\lambda_{2j} - 1)/2 + 2r + 2 - 2j, & \text{si } \lambda_{2\mathrm{j}} \text{ est impair et } \mathrm{S}_{2\mathrm{j}}(\lambda) \text{ est pair,} \\ (\lambda_{2j-2} + 1)/2 + 2r + 2 - 2j, & \text{si j} \geq 2,\ \lambda_{2\mathrm{j}-2} \text{ est impair et} \\ & S_{2j-2}(\lambda) \text{ est impair,} \end{cases}$$

pour $j = 1, ..., r+1$ et

$$(1)(b) \qquad B^\sharp_{\lambda,j} = \begin{cases} \lambda_{2j}/2 + 2r + 1 - 2j, & \text{si } \lambda_{2\mathrm{j}} \text{ est pair,} \\ (\lambda_{2j-1}+1)/2 + 2r + 1 - 2j, & \text{si } \lambda_{2\mathrm{j}-1} \text{ est impair et } \mathrm{S}_{2\mathrm{j}-1}(\lambda) \text{ est impair,} \\ (\lambda_{2j+1}-1)/2 + 2r + 1 - 2j, & \text{si } \lambda_{2\mathrm{j}+1} \text{ est impair et } \mathrm{S}_{2\mathrm{j}+1}(\lambda) \text{ est pair,} \end{cases}$$

pour $j = 1, ..., r$. On vérifie que les divers cas ci-dessus sont exclusifs l'un de l'autre.

Considérons l'ensemble $(A^\sharp_\lambda \cup B^\sharp_\lambda) - (A^\sharp_\lambda \cap B^\sharp_\lambda)$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers qui interviennent dans $A^\sharp_\lambda$ ou $B^\sharp_\lambda$ mais pas dans les deux. Notons D_λ l'ensemble des sous-ensembles de $(A^\sharp_\lambda \cup B^\sharp_\lambda) - (A^\sharp_\lambda \cap B^\sharp_\lambda)$ formés d'entiers consécutifs, maximaux pour cette propriété, et ne contenant pas 0. On s'aperçoit qu'il y a une bijection croissante $i \mapsto \Delta_i$ de $Jord^{bp}(\lambda)$ sur D_λ. On pose

$$A_{\lambda,\epsilon} = (A^\sharp_\lambda - \bigcup_{i \in Jord^{bp}(\lambda); \epsilon_i = -1} (A^\sharp_\lambda \cap \Delta_i)) \cup (\bigcup_{i \in Jord^{bp}(\lambda); \epsilon_i = -1} (B^\sharp_\lambda \cap \Delta_i)),$$

$$B_{\lambda,\epsilon} = (B^\sharp_\lambda - \bigcup_{i \in Jord^{bp}(\lambda); \epsilon_i = -1} (B^\sharp_\lambda \cap \Delta_i)) \cup (\bigcup_{i \in Jord^{bp}(\lambda); \epsilon_i = -1} (A^\sharp_\lambda \cap \Delta_i)).$$

On montre qu'il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) \leq 2N$ et un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ tels que $(A_{\alpha,\beta}, B_{\alpha,\beta}) = (A_{\lambda,\epsilon}, B_{\lambda,\epsilon})$. La correspondance de Springer généralisée associe à (λ, ϵ) le couple $(k, \rho_{\alpha,\beta})$. On note ce couple $(k(\lambda,\epsilon), \rho(\lambda,\epsilon))$.

L'entier $k(\lambda,\epsilon)$ se calcule facilement. Notons $i_1 > ... > i_m$ les éléments $i \in Jord^{bp}(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit impair. Posons

$$M(\lambda,\epsilon) = \sum_{l=1,...,m; \epsilon_{i_l} = -1} (-1)^l.$$

Alors $k(\lambda,\epsilon) = 2M(\lambda,\epsilon)$ si $M(\lambda,\epsilon) \geq 0$ et $k(\lambda,\epsilon) = -2M(\lambda,\epsilon) - 1$ si $M(\lambda,\epsilon) < 0$.

Considérons le cas particulier où $Jord(\lambda) = Jord^{bp}(\lambda)$, c'est-à-dire que λ n'a que des termes pairs. Ecrivons $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{2r+1})$, avec $\lambda_{2r+1} = 0$. On peut considérer que ϵ est une fonction définie sur l'ensemble d'indices $\{1, ..., 2r+1\}$: si $j \in \{1, ..., 2r+1\}$ est tel que $\lambda_j \neq 0$, on pose $\epsilon(j) = \epsilon_{\lambda_j}$; si $\lambda_j = 0$, on pose $\epsilon(j) = 1$. On prendra garde de distinguer $\epsilon(j)$ où j est un indice et ϵ_i où i est un terme de λ. Avec la recette ci-dessus, on calcule

$$A_{\lambda,\epsilon} = \{\lambda_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r+1, \epsilon(j) = (-1)^{j+1}\},$$

$$B_{\lambda,\epsilon} = \{\lambda_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r+1, \epsilon(j) = (-1)^{j}\}.$$

On constate que $A_{\lambda,\epsilon} \sqcup B_{\lambda,\epsilon}$ est "sans multiplicités", c'est-à-dire que tout entier y intervient avec multiplicité au plus 1. Remarquons qu'avec les mêmes hypothèses, on a

(2) $M(\lambda,\epsilon) = \sum_{j=1,...,2r+1} (-1)^{j+1} \frac{\epsilon(j)-1}{2}$.

Preuve. Soit $i \in Jord^{bp}(\lambda) \sqcup \{0\}$, notons $\{j_i^-, ..., j_i^+\}$ le sous-ensemble des $j \in \{1, ..., 2r+1\}$ tels que $\lambda_j = i$. Pour tous ces j, on a $\epsilon(j) = \epsilon_i$ et la contribution de ces j au membre de droite de (2) est

$$\frac{\epsilon_i - 1}{2} \sum_{j = j_i^-, ..., j_i^+} (-1)^{j+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } j_i^+ - j_i^- \text{ est impair,} \\ \frac{\epsilon_i - 1}{2} (-1)^{j_i^- + 1}, & \text{si } j_i^+ - j_i^- \text{ est pair.} \end{cases}$$

Si $\epsilon_i = 1$, on voit que l'intervalle $\{j_i^-, ..., j_i^+\}$ ne contribue pas au membre de droite de (2). L'entier i ne contribue pas non plus à $M(\lambda, \epsilon)$. Remarquons que cela traite le cas $i = 0$. Supposons $i > 0$. Alors $j^+ - j^- = mult_\lambda(i) - 1$. Si $mult_\lambda(i)$ est pair, ou si $mult_\lambda(i)$ est pair et $\epsilon_i = 1$, l'intervalle $\{j_i^-, ..., j_i^+\}$ ne contribue pas au membre de droite de (1). L'entier i ne contribue pas non plus à $M(\lambda, \epsilon)$. Si $mult_\lambda(i)$ est pair et $\epsilon_i = -1$, on a $i = i_l$ pour un $l \in \{1, ..., m\}$ et on vérifie par récurrence sur l que j_i^- est de la même parité que l. Alors l'intervalle $\{j_i^-, ..., j_i^+\}$ contribue au membre de droite de (2) par $(-1)^l$ et i contribue de la même façon à $M(\lambda, \epsilon)$. Cela prouve (2).

5.2 Un résultat de Shoji

Dans les quatre premiers paragraphes, nous avons défini divers termes dépendant d'un ordre fixé $<_I$ sur un ensemble d'indices I. Pour plus de précision, nous insérerons maintenant cet ordre dans la notation.

Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. On suppose que λ n'a que des termes pairs. Notons $k = k(\lambda, \epsilon)$ et (α, β) l'élément de $\mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ qui correspond à (λ, ϵ) par la correspondance de Springer généralisée. Choisissons un entier r assez grand, posons $n = r + [k/2] + 1$, $m = r - [k/2]$ et considérons que α a n termes et que β a m termes. Pour $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$, on a défini une multiplicité $mult(\alpha, \beta; \nu, \mu)$ en 4.1, que l'on note maintenant $mult(<_I; \alpha, \beta; \nu, \mu)$ puisqu'elle dépend du choix de l'ordre $<_I$ sur l'ensemble d'indices $I = (\{1, ..., n\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m\} \times \{1\})$. Nous allons définir un ordre, dépendant lui-même de (α, β), que nous noterons $<_{I,\alpha,\beta}$. Posons $\Lambda = A_{\alpha,\beta} \sqcup B_{\alpha,\beta}$. D'après les formules du paragraphe 5.1, on a l'égalité

$$\Lambda = p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha, \beta),$$

où $A = 2r + k$ et $B = 2r - k - 1$.

Remarque. Il y a ici une difficulté de notation. Si k est pair, on a $A_{\alpha,\beta} = \alpha + [A, A + 2 - 2n]_2$ et $B_{\alpha,\beta} = \beta + [B, B + 2 - 2m]_2$ mais, si k est impair, on doit permuter ces termes : $A_{\alpha,\beta} = \beta + [B, B + 2 - 2m]_2$ et $B_{\alpha,\beta} = \alpha + [A, A + 2 - 2n]_2$.

On a aussi $\Lambda = A_{\lambda,\epsilon} \sqcup B_{\lambda,\epsilon}$ par définition et on a remarqué dans le paragraphe 5.1 que cette partition était sans multiplicités (parce que λ est à termes pairs). Ecrivons cette partition $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_{2r+1})$. Pour $j = 1, ..., n$, il y a un unique $a_j \in \{1, ..., 2r + 1\}$ tel que $\alpha_j + A + 2 - 2j = \Lambda_{a_j}$. Pour $l = 1, ..., m$, il y a un unique $b_l \in \{1, ..., 2r + 1\}$ tel que $\beta_l + B + 2 - 2l = \Lambda_{b_l}$. On définit l'ordre sur I de sorte que $(j, 0) <_{I,\alpha,\beta} (l, 1)$ si et seulement si $a_j < b_l$.

Soit $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$, supposons $k(\lambda', \epsilon') = k$. Dans l'introduction, on a défini la multiplicité $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon')$. Notons $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ le couple correspondant à (λ', ϵ'). On considère comme ci-dessus que α' a n termes et que β' en a m.

Proposition (Shoji). *On rappelle que λ est à termes pairs. Pour (λ', ϵ') comme ci-dessus, on a l'égalité*

$$\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') = mult(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta; \alpha', \beta').$$

Shoji démontre ce résultat en [4] p.685. En fait, ses hypothèses sont un peu plus contraignantes que les nôtres aussi allons-nous reprendre sa démonstration dans les deux

paragraphes suivants. Notre situation est plus simple que celle considérée par Shoji car il considère des familles de partitions $\boldsymbol{\alpha}$ à $e \geq 1$ termes tandis que nous nous limitons aux paires de partitions, c'est-à-dire au cas $e = 2$. Nous continuerons donc à noter nos familles comme des paires et n'utiliserons pas la notation $\boldsymbol{\alpha}$ de Shoji. De plus, les exposants $\pm$ qui interviennent parfois dans [4] sont inutiles dans le cas $e = 2$ et nous les faisons disparaître.

5.3 Démonstration de la proposition 5.2, première étape

La démonstration de Shoji s'applique pourvu que sa proposition 6.1 soit vérifiée. C'est-à-dire que l'on doit prouver l'égalité $Q_\Lambda = R_\Lambda$. Ainsi que Shoji l'explique, il suffit de prouver l'assertion suivante. Ecrivons R_Λ comme combinaison linéaire de fonctions de Schur $s_{\alpha',\beta'}$, à coefficients dans $\mathbb{Q}(t)$:

$$R_\Lambda = \sum_{(\alpha',\beta')\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_m} r_\Lambda(\alpha',\beta')s_{\alpha',\beta'}.$$

On doit prouver que, pour tout couple $(\alpha',\beta') \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$ tel que $r_\Lambda(\alpha',\beta') \neq 0$, on a

$$(1) \qquad p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha',\beta') \leq \Lambda.$$

On commence par calculer les coefficients $r_\Lambda(\alpha',\beta')$. On note $(v_i^0)_{i=1,...,n}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ et $(v_i^1)_{i=1,...,m}$ celle de $\mathbb{Z}^m$. On identifie naturellement les éléments de ces bases à des éléments de $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$. Pour simplifier, nous notons simplement $<_I$ l'ordre $<_{I,\alpha,\beta}$. Notons i^0_{max} le plus grand indice $i \in \{1,...,n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$ et i^1_{max} le plus grand indice $i \in \{1,...,m\}$ tel que $\beta_i \neq 0$. Notons ν_0 le plus grand des deux éléments $(i^0_{max}, 0)$ et $(i^1_{max}, 1)$ pour l'ordre $<_I$. Notons J le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$ formé des éléments $v_i^e - v_j^f$, pour les couples $((i,e),(j,f)) \in I^2$ tels que $e \neq f$, $(i,e) <_I (j,f)$ et $(i,e) \leq_I \nu_0$. Notons K le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$ formé des éléments $v_i^e - v_j^f$, pour les couples $((i,e),(j,f)) \in I^2$ tels que $e = f$, $(i,e) <_I (j,f)$ et $\nu_0 <_I (i,e)$. On pose $\Delta_n = (n-1, n-2, ..., 0) = [n-1, 0]_1$ et on définit de même Δ_m. Le couple $(\alpha+\Delta_n, \beta+\Delta_m)$ est un élément de $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbb{Z}^n$: pour $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $x^\sigma = (x_{\sigma 1},...,x_{\sigma n})$. De même, $\mathfrak{S}_m$ agit sur $\mathbb{Z}^m$. Soit $(\alpha',\beta') \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$. Pour $d \in \mathbb{N}$, posons

$$(2) \qquad r^d_\Lambda(\alpha',\beta') = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\tau\in\mathfrak{S}_m} sgn(\sigma)sgn(\tau)$$

$$|\{X \subset J \cup K; |X| = d, (\alpha+\Delta_n, \beta+\Delta_m) - \sum_{x\in X} x = ((\alpha'+\Delta_n)^\sigma, (\beta'+\Delta_m)^\tau)\}|.$$

D'après [4] 3.13.1, on a l'égalité

$$(3) \qquad r_\Lambda(\alpha',\beta') = v_{\alpha,\beta}(t)^{-1} \sum_{d\in\mathbb{N}} (-1)^d r^d_\Lambda(\alpha',\beta')t^d,$$

où $v_{\alpha,\beta}(t)$ est un certain polynôme non nul. On peut récrire l'expression (2) sous la forme

$$(4) \qquad r^d_\Lambda(\alpha',\beta') = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\tau\in\mathfrak{S}_m} sgn(\sigma)sgn(\tau) \sum_{X_J\subset J;|X_J|\leq d} |\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)|,$$

où

$$\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)=\{X_K\subset K;|X_K|=d-|X_J|,$$
$$(\alpha+\Delta_n,\beta+\Delta_m)-\sum_{x\in X_K}x=((\alpha'+\Delta_n)^\sigma,(\beta'+\Delta_m)^\tau)+\sum_{x\in X_J}x\}.$$

Introduisons le plus petit nombre $k\in\{0,...,n\}$ tel que $(n-k,0)\leq_I\nu_0$ et le plus petit nombre $h\in\{0,...,m\}$ tel que $(m-h,1)\leq\nu_0$. Pour $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{Z}^n$, on pose $y_{\leq n-k}=(y_1,...,y_{n-k})$ et $y_{>n-k}=(y_{n-k+1},...,y_n)$. Pour $y\in\mathbb{Z}^m$, on définit de même $y_{\leq m-h}$ et $y_{>m-h}$. Pour $y=(y^0,y^1)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^m$, on pose $p_\leq(y)=(y^0_{\leq n-k},y^1_{\leq m-h})$ et $p_>(y)=(y^0_{>n-k},y^1_{>m-h})$. Remarquons que, pour $y\in K$, on a $p_\leq(y)=0$. Donc K s'identifie par $p_>$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^k\times\mathbb{Z}^h$. De plus, on a $p_>(\alpha+\Delta_n,\beta+\Delta_m)=(\Delta_k,\Delta_h)$. Pour J, σ et τ comme ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)$ est donc vide si la condition

(5) $p_\leq(\alpha+\Delta_n,\beta+\Delta_m)=p_\leq(((\alpha'+\Delta_n)^\sigma,(\beta'+\Delta_m)^\tau)+\sum_{x\in X_J}x)$

n'est pas vérifiée. Si elle l'est, $\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)$ s'identifie à l'ensemble des $X_K\subset K$ tels que $|X_K|=d-|X_J|$ et

$$(\Delta_k,\Delta_h)-\sum_{x\in X_K}x=p_>(((\alpha'+\Delta_n)^\sigma,(\beta'+\Delta_m)^\tau)+\sum_{x\in X_J}x).$$

Notons $\mathfrak{S}[X_J]$ l'ensemble des $(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m$ tels que (5) soit vérifiée. Supposons que (σ,τ) appartienne à cet ensemble. Par cohérence avec ce qui précède, un élément de $\mathbb{Z}^k$ sera noté $y=(y_{n-k+1},...,y_n)$. On note $(\mathbb{Z}^k)^+$ l'ensemble des $y=(y_{n-k+1},...,y_n)\in\mathbb{Z}^k$ tels que $y_{n-k+1}\geq...\geq y_n$. Le groupe $\mathfrak{S}_k$ agit sur $\mathbb{Z}^k$. Comme précédemment, on note $stab(y)$ le fixateur dans ce groupe d'un élément $y\in\mathbb{Z}^k$. Tout élément $y\in\mathbb{Z}^k$ s'écrit $y=z^{\sigma'}$ pour un unique élément $z\in(\mathbb{Z}^k)^+$ et un élément $\sigma'\in\mathfrak{S}_k$ dont l'image dans $stab(z)\backslash\mathfrak{S}_k$ est uniquement déterminée. De mêmes définitions s'appliquent à $\mathbb{Z}^h$. Alors $\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)$ se décompose en la réunion sur les $z\in(\mathbb{Z}^k)^+$, $\sigma'\in stab(z)\backslash\mathfrak{S}_k$, $y\in(\mathbb{Z}^h)^+$, $\tau'\in stab(y)\backslash\mathfrak{S}_h$ du sous-ensemble des $X_K\in\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)$ tels que

$$(6)\qquad (\Delta_h,\Delta_k)-\sum_{x\in X_K}x=(z^{\sigma'},y^{\tau'}).$$

Ce sous-ensemble est non vide seulement si

$$(7)\qquad (z^{\sigma'},y^{\tau'})=p_>(((\alpha'+\Delta_n)^\sigma,(\beta'+\Delta_m)^\tau)+\sum_{x\in X_J}x).$$

Cette condition ne dépend pas de l'ensemble X_K. Pour $\sigma'\in\mathfrak{S}_k$ et $\tau'\in\mathfrak{S}_h$, notons $\mathcal{Z}(\sigma',\tau',\sigma,\tau,X_J)$ l'ensemble des $(z,y)\in(\mathbb{Z}^k)^+\times(\mathbb{Z}^h)^+$ qui vérifient (7). D'autre part, pour $(z,y)\in(\mathbb{Z}^k)^+\times(\mathbb{Z}^h)^+$, $\sigma'\in\mathfrak{S}_k$, $\tau'\in\mathfrak{S}_h$ et $f\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{X}_K(f,z,y,\sigma',\tau')$ l'ensemble des $X_K\subset K$ qui vérifient (6) et ont f éléments. Si $(z,y)\notin\mathcal{Z}(\sigma',\tau',\sigma,\tau,X_J)$, l'ensemble des $X_K\in\mathcal{X}_K(X_J,\sigma,\tau)$ qui vérifient (6) est vide. Si $(z,y)\in\mathcal{Z}(\sigma',\tau',\sigma,\tau,X_J)$, cet ensemble est égal à $\mathcal{X}_K(d-|X_J|,z,y,\sigma',\tau')$. En rassemblant ces calculs, on obtient la formule suivante

$$(8)\qquad r^d_\Lambda(\alpha',\beta')=\sum_{X_J\subset J,|X_J|\leq d}\sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}[X_J]}sgn(\sigma)sgn(\tau)\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k,\tau'\in\mathfrak{S}_h}\sum_{(z,y)\in\mathcal{Z}(\sigma',\tau',\sigma,\tau,X_J)}$$
$$|stab(z)|^{-1}|stab(y)|^{-1}|\mathcal{X}_K(d-|X_J|,z,y,\sigma',\tau')|.$$

On plonge naturellement $\mathfrak{S}_k$ dans $\mathfrak{S}_n$: le groupe $\mathfrak{S}_k$ agit sur les k dernières coordonnées. De même, on plonge $\mathfrak{S}_h$ dans $\mathfrak{S}_m$. On s'aperçoit que l'action de $\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_h$ conserve

l'ensemble J. On en déduit une action $X_J \mapsto X_J^{\sigma',\tau'}$ sur l'ensemble des sous-ensembles de X_J. La relation (7) équivaut à

$$(z,y) = p_>(((\alpha'+\Delta_n)^{\sigma\sigma'^{-1}}, (\beta'+\Delta_m)^{\tau\tau'^{-1}}) + \sum_{x\in X_J^{\sigma'^{-1},\tau'^{-1}}} x).$$

Autrement dit $\mathcal{Z}(\sigma',\tau',\sigma,\tau,X_J) = \mathcal{Z}(1,1,\sigma\sigma'^{-1},\tau\tau'^{-1},X_J^{\sigma'^{-1},\tau'^{-1}})$. D'autre part, l'action de $\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_h$ ne change pas l'image d'un élément de $\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^m$ par la projection $p_\leq$. Donc $(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}[X_J]$ si et seulement si $(\sigma\sigma'^{-1},\tau\tau'^{-1})\in\mathfrak{S}[X_J^{\sigma'^{-1},\tau'^{-1}}]$. Dans la formule (8), on intervertit les sommes en commençant par sommer en σ',τ'. On remplace ensuite X_J par $X_J^{\sigma',\tau'}$ et (σ,τ) par $(\sigma\sigma',\tau\tau')$. Ceci fait apparaître des termes $sgn(\sigma')sgn(\tau')$. On utilise les propriétés ci-dessus et on intervertit de nouveau les sommes. On obtient alors

$$(9)\qquad r_\Lambda^d(\alpha',\beta') = \sum_{X_J\subset J,|X_J|\leq d}\ \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}[X_J]} sgn(\sigma)sgn(\tau) \sum_{(z,y)\in\mathcal{Z}(1,1,\sigma,\tau,X_J)} |stab(z)|^{-1}|stab(y)|^{-1}$$
$$\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k,\tau'\in\mathfrak{S}_h} sgn(\sigma')sgn(\tau')|\mathcal{X}_K(d-|X_J|,z,y,\sigma',\tau')|.$$

Posons

$$v_k(t) = \prod_{i=1,\dots,k}\frac{1-t^i}{1-t},$$

et définissons de même $v_h(t)$. Notons c_f le coefficient de t^f dans $v_h(t)v_k(t)$. Montrons que, pour $f\in\mathbb{N}$ et $(z,y)\in(\mathbb{Z}^k)^+\times(\mathbb{Z}^h)^+$, on a

$$(10)\qquad \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k,\tau'\in\mathfrak{S}_h} sgn(\sigma')sgn(\tau')|\mathcal{X}_K(f,z,y,\sigma',\tau')| = \begin{cases} 0, & \text{si } (z,y)\neq(\Delta_k,\Delta_h),\\ (-1)^f c_f, & \text{si } (z,y)=(\Delta_k,\Delta_h).\end{cases}$$

En reprenant les définitions, on voit que la somme à calculer est égale au produit de $(-1)^f$ et du coefficient de $X_{n-k+1}^{z_{n-k+1}}\dots X_n^{z_n}Y_{m-h+1}^{y_{m-h+1}}\dots Y_m^{y_m}t^f$ dans le polynôme $P(X_{n-k+1},\dots,X_n,t)Q(Y_{m-h+1},\dots,Y_m,t)$, où

$$P(X_{n-k+1},\dots,X_n,t) = \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k} sgn(\sigma')(\prod_{i=n-k+1,\dots,n} X_{\sigma'(n-k+1)}^{k-1}\dots X_{\sigma'(n-1)})$$
$$(\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}(1-tX_{\sigma'(j)}X_{\sigma'(i)}^{-1})),$$
$$Q(Y_{m-h+1},\dots,Y_m,t) = \sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_h} sgn(\tau')(\prod_{i=m-h+1,\dots,m} Y_{\tau'(m-h+1)}^{h-1}\dots Y_{\tau'(m-1)})$$
$$(\prod_{m-h+1\leq i<j\leq m}(1-tY_{\tau'(j)}Y_{\tau'(i)}^{-1})).$$

On récrit

$$P(X_{n-k+1},\dots,X_n,t) = \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k} sgn(\sigma')\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}(X_{\sigma'(i)}-tX_{\sigma'(j)}).$$

On sait que

$$\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}(X_{\sigma'(i)}-X_{\sigma'(j)}) = sgn(\sigma')\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}(X_i-X_j).$$

On a donc aussi

$$P(X_{n-k+1},...,X_n,t) = (\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}(X_i - X_j))\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k}\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}\frac{X_{\sigma'(i)} - tX_{\sigma'(j)}}{X_{\sigma'(i)} - X_{\sigma'(j)}}.$$

D'après [3] III.(1.4), on a

$$P(X_{n-k+1},...,X_n,t) = v_k(t)\prod_{n-k+1\leq i<j\leq n}(X_i - X_j).$$

Puisque z appartient à $(\mathbb{Z}^k)^+$, il est bien connu que le coefficient de $X_{n-k+1}^{z_{n-k+1}}...X_n^{z_n}$ dans ce polynôme est nul sauf si $z = \Delta_k$, auquel cas ce coefficient vaut $v_k(t)$. Un même calcul s'applique à $Q(Y_{m-h+1},...,Y_m,t)$. La relation (10) s'ensuit.

On utilise (10) pour simplifier (9). Seul le couple $(z,y) = (\Delta_k,\Delta_h)$ peut contribuer. Pour ce couple, $|stab(z)| = |stab(y)| = 1$. Ce couple contribue si et seulement s'il appartient à $\mathcal{Z}(1,1,\sigma,\tau,X_J)$, autrement dit si

$$(\Delta_k,\Delta_h) = p_>(((\alpha'+\Delta_n)^\sigma,(\beta'+\Delta_m)^\tau) + \sum_{x\in X_J} x).$$

Mais la conjonction de cette relation et de la condition que (σ,τ) appartienne à $\mathfrak{S}[X_J]$, c'est-à-dire que la relation (5) soit vérifiée, équivaut à l'égalité

$$(11)\qquad (\alpha+\Delta_n,\beta+\Delta_m) = ((\alpha'+\Delta_n)^\sigma,(\beta'+\Delta_m)^\tau) + \sum_{x\in X_J} x.$$

Pour tous $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\tau\in\mathfrak{S}_m$ et $f\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{X}_J(f,\sigma,\tau)$ l'ensemble des sous-ensembles $X_J\subset J$ tels que $|X_J| = f$ et (11) soit vérifiée. On obtient

$$r_\Lambda^d(\alpha',\beta') = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\tau\in\mathfrak{S}_m} sgn(\sigma)sgn(\tau)\sum_{f=0,...,d}(-1)^{d-f}c_{d-f}|\mathcal{X}_J(f,\sigma,\tau)|.$$

En reportant cette expression dans (3), on obtient

$$(12)\qquad r_\Lambda(\alpha',\beta') = v_{\alpha,\beta}(t)^{-1}v_k(t)v_h(t)\sum_{f\in\mathbb{N}}(-1)^f s_\Lambda^f(\alpha',\beta')t^f,$$

où

$$s_\Lambda^f(\alpha',\beta') = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\tau\in\mathfrak{S}_m} sgn(\sigma)sgn(\tau)|\mathcal{X}_J(f,\sigma,\tau)|.$$

La formule (12) est similaire à (3), on s'est simplement débarrassé de l'ensemble K.

5.4 Fin de la démonstration de la proposition 5.2

A ce point, nous allons utiliser l'identification de I à $\{1,...,2r+1\}$ définie en 5.2 : on identifie $(j,0)$ à a_j et $(l,1)$ à b_l. Cette identification induit un isomorphisme $\iota:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\simeq\mathbb{R}^{2r+1}$. Les éléments de $\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_m$ s'identifient ainsi à des éléments de $\mathbb{R}^{2r+1}$. On note $I_a = \{a_1,...,a_n\}$ et $I_b = \{b_1,...,b_m\}$. Introduisons le groupe $G = GL(2r+1,\mathbb{C})$, son sous-tore diagonal T et le groupe $X^*(T)$ de ses caractères algébriques. On a naturellement $X^*(T)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2r+1}$. On note $V = \mathbb{R}^{2r+1}$ et $(\epsilon_i)_{i=1,...,2r+1}$ la base standard de cet espace.

La décomposition $\{1,...,2r+1\} = I_a \sqcup I_b$ définit un sous-groupe de Levi semi-standard M de G : les éléments de M conservent les deux sous-espaces de $\mathbb{C}^{2r+1}$ engendrés par les ϵ_i pour $i \in I_a$, resp. $i \in I_b$. On introduit la chambre positive fermée $\bar{C}^+$ associée au sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de G. Autrement dit $\bar{C}^+$ est l'ensemble des $x = (x_1,...,x_{2r+1}) \in V$ tels que $x_1 \geq ... \geq x_{2r+1}$. Notons $W = \mathfrak{S}_{2r+1}$ le groupe de Weyl de G relatif à T et W^M le groupe de Weyl de M. Via le plongement ι, le groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ du paragraphe précédent s'identifie à W^M. Comme on le sait, pour tout $x \in V$, il existe un unique élément de $\bar{C}^+$, que l'on note x^+, de sorte qu'il existe $w \in W$ tel que $w(x) = x^+$. On introduit l'ensemble Σ des racines $\epsilon_i - \epsilon_j$ pour $i \neq j$ et le sous-ensemble Σ^+ des racines positives, c'est-à-dire des $\epsilon_i - \epsilon_j$ pour $i < j$. On note aussi Σ^M l'ensemble des racines dans M, c'est-à-dire les $\epsilon_i - \epsilon_j$ pour $i \neq j$, $i,j \in I_a$ ou $i,j \in I_b$. On pose $\Sigma^{M,+} = \Sigma^M \cap \Sigma^+$. Pour tout entier $e \in \mathbb{N}$, posons $\delta_e = \{(e-1)/2, (e-3)/2, ..., (1-e)/2) = [(e-1)/2, (1-e)/2]_1$. L'élément δ_{2r+1} est égal à la demi-somme des racines positives et $\iota(\delta_n, \delta_m)$ est égal à la demi-somme des racines dans $\Sigma^{M,+}$. Nous noterons ces éléments δ et δ^M. Posons $\mathcal{J} = \iota(J)$. On voit que $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble de $\Sigma^+ - \Sigma^{M,+}$. On note z l'élément de $\mathbb{R}^{2r+1}$ défini par

si k est pair, $z_i = n-1$ pour $i \in I_a$ et $z_i = m$ pour $i \in I_b$;

si k est impair, $z_i = n$ pour $i \in I_a$ et $z_i = m-1$ pour $i \in I_b$.

Avec ces définitions, on voit que, pour $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$, $\iota(\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha', \beta')) = \iota(\alpha', \beta') + 2\delta^M + z$ et $p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha', \beta') = \iota(\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha', \beta'))^+$. Remarquons que l'ordre $<_{I,\alpha,\beta}$ a été défini de sorte que $\iota(\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha, \beta))$ appartienne à $\bar{C}^+$, autrement dit $\Lambda = p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha, \beta) = \iota(\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha, \beta))$. A ce point, on se rappelle l'hypothèse que Λ est sans multiplicité. Puisque les termes de Λ sont des entiers, on a $\Lambda_i \geq \Lambda_{i+1} + 1$ pour tout $i = 1, ..., 2r$, ce qui entraîne

(1) $\Lambda - \rho \in \bar{C}^+$.

Soit $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$, supposons $r_\Lambda(\alpha', \beta') \neq 0$. D'après 5.3(12), on peut fixer $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\tau \in \mathfrak{S}_m$ et $X_J \subset J$ de sorte que 5.3(11) soit vérifiée. On voit que, dans cette relation, on peut aussi bien remplacer Δ_n et Δ_m par δ_n et δ_m car $(\Delta_n - \delta_n, \Delta_m - \delta_m)$ est fixe par $\sigma \times \tau$. En posant $X = \iota(X_J)$, $v = \iota(\alpha, \beta)$, $v' = \iota(\alpha', \beta')$, et en notant w^M l'élément de W^M auquel s'identifie $\sigma \times \tau$, cette relation s'écrit

$$v' + \delta^M = w^M(v + \delta^M - \sum_{x \in X} x).$$

Alors

$$\iota(\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha', \beta')) = v' + 2\delta^M + z = w^M(v + \delta^M - \sum_{x \in X} x) + \delta^M + z = w^M(\Lambda - \delta^M - z - \sum_{x \in X} x) + \delta^M + z.$$

L'élément z disparaît de cette relation : il est central dans M et fixe par w^M. Pour démontrer que $p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha', \beta') \leq \Lambda$, cf. 5.3(1), on est ramené au problème suivant. L'élément Λ vérifie (1). On se donne un sous-ensemble $X \subset \Sigma^+ - \Sigma^{M,+}$ et un élément $w^M \in W^M$. On pose

$$\underline{\Lambda} = w^M(\Lambda - \delta^M - \sum_{x \in X} x) + \delta^M$$

et on veut prouver

$$(2) \qquad \underline{\Lambda}^+ \leq \Lambda.$$

On a

$$\delta - \delta^M = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Sigma^+ - \Sigma^{M,+}} x = \frac{1}{2}(\sum_{x \in X} x + \sum_{x \in \Sigma^+ - (\Sigma^{M,+} \cup X)} x).$$

D'où

$$\delta^M + \sum_{x\in X} x = \delta + \mu,$$

où

$$(3) \qquad \mu = \frac{1}{2}(\sum_{x\in X} x - \sum_{x\in\Sigma^+-(\Sigma^{M,+}\cup X)} x).$$

On a

$$\underline{\Lambda} = w^M(\Lambda - \delta - \mu) + \delta^M = w^M(\Lambda - \delta + \mu'),$$

où $\mu' = -\mu + (w^M)^{-1}(\delta^M)$. Par définition, l'élément $\underline{\Lambda}^+$ est insensible à la transformation de $\underline{\Lambda}$ par n'importe quel élément de W. Cela entraîne

$$\underline{\Lambda}^+ = (\Lambda - \delta + \mu')^+.$$

Notons ${}^+\bar{C}$ le cône fermé engendré par les éléments de Σ^+. Pour prouver (2), il suffit de prouver que $(\Lambda-\delta+\mu')^+ \in \Lambda - {}^+\bar{C}$. Par définition, il existe $w \in W$ tel que $(\Lambda-\delta+\mu')^+ = w(\Lambda - \delta + \mu')$. D'où

$$(\Lambda-\delta+\mu')^+ = w(\Lambda-\delta)+(\Lambda-\delta)-(\Lambda-\delta)+w(\mu') = \Lambda+w(\Lambda-\delta)-(\Lambda-\delta)+w(\mu')-\delta.$$

Puisque $\Lambda - \delta \in \bar{C}^+$, il est bien connu que $w(\Lambda - \delta) - (\Lambda - \delta)$ appartient à $-{}^+\bar{C}$. Il reste à prouver que $w(\mu') - \delta$ appartient aussi à ce cône. Notons E l'ensemble des éléments de V qui s'écrivent $\frac{1}{2}(\sum_{y\in Y} y - \sum_{y\in\Sigma^+-Y} y)$ pour un sous-ensemble $Y \subset \Sigma^+$ et notons E^M l'ensemble des éléments de V qui s'écrivent $\frac{1}{2}(\sum_{y\in Y} y - \sum_{y\in\Sigma^{M,+}-Y} y)$ pour un sous-ensemble $Y \subset \Sigma^{M,+}$. En utilisant (3), on voit que $-\mu + H \in E$ pour tout $H \in E^M$. D'autre part, E est conservé par l'action de W et E^M l'est par celle de W^M. Puisque δ^M appartient à E^M, l'élément $\mu' = -\mu + (w^M)^{-1}(\delta^M)$ appartient à E et aussi $w(\mu') \in E$. Mais on voit que $H - \delta$ appartient à $-{}^+\bar{C}$ pour tout $H \in E$. En particulier $w(\mu') - \delta$ appartient à $-{}^+\bar{C}$, ce qui achève la démonstration. □

5.5 Un théorème de maximalité

Théorème. *Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Supposons que λ n'a que des termes pairs. Alors il existe un unique élément $(\lambda^{max}, \epsilon^{max}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda^{max}, \epsilon^{max}) = 1$ *;*

(ii) pour tout élément $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ tel que $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') \neq 0$, on a $\lambda' < \lambda^{max}$ ou $(\lambda', \epsilon') = (\lambda^{max}, \epsilon^{max})$.

Preuve. Posons $k = k(\lambda, \epsilon)$. Puisqu'on se préoccupe de paires (λ', ϵ') telles que $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') \neq 0$, on peut se limiter au sous-ensemble $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$ des éléments (λ', ϵ') tels que $k(\lambda', \epsilon') = k$. Montrons tout d'abord que, pour $(\lambda', \epsilon'), (\lambda'', \epsilon'') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$, on a l'équivalence

(1) $\lambda' \leq \lambda''$ si et seulement si $A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'} \leq A_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup B_{\lambda'',\epsilon''}$.

On applique à λ' la construction de $A_{\lambda',\epsilon'}$ et $B_{\lambda',\epsilon'}$ rappelée en 5.1. Pour $c \in \{1, ..., 2r\}$, on a

$$S_c(\lambda') = S_c(\lambda' + [2r-1, 0]_1) - S_c([2r-1, 0]_1).$$

On a décomposé $\lambda' + [2r-1]_1$ en la réunion des $2z_i$ et des $2z'_i + 1$ pour $i = 1, ..., r$. On vérifie par récurrence les propriétés suivantes :

pour c pair, les c plus grands termes de $\lambda' + [2r-1]_1$ sont les $2z_i$ et $2z'_i + 1$ pour $i = 1, ..., c/2$, à l'exception du cas où $S_c(\lambda)$ est impair ; dans ce cas, λ_c est forcément impair, les c plus grands termes de $\lambda' + [2r-1]_1$ sont les $2z_i$ pour $i = 1, ..., c/2 - 1$ et les $2z'_i + 1$ pour $i = 1, ..., c/2 + 1$ et on a $z'_{c/2+1} = z_{c/2}$;

pour c impair, les c plus grands termes de $\lambda' + [2r-1]_1$ sont les $2z_i$ pour $i = 1, ..., (c-1)/2$ et les $2z'_i + 1$ pour $i = 1, ..., (c+1)/2$, à l'exception du cas où $S_c(\lambda)$ est impair ; dans ce cas λ_c est forcément impair, les c plus grands termes de $\lambda' + [2r-1]_1$ sont les $2z_i$ pour $i = 1, ..., (c+1)/2$ et les $2z'_i + 1$ pour $i = 1, ..., (c-1)/2$ et on a $z_{(c+1)/2} = z'_{(c+1)/2} + 1$.

Posons $c^+ = c^- = c/2$ si c est pair, $c^+ = (c+1)/2$, $c^- = (c-1)/2$ si c est impair. Posons aussi $\delta_c(\lambda') = 1$ si $S_c(\lambda)$ est impair. Les propriétés ci-dessus entraînent que

$$S_c(\lambda' + [2r-1, 0]_1) = 2S_{c^+}(z') + c^+ + 2S_{c^-}(z) + \delta_c(\lambda').$$

On a

$$S_{c^+}(z') = S_{c^+}(A^\sharp_{\lambda'}) - S_{c^+}([r+1, 2]_1),$$
$$S_{c^-}(z) = S_{c^-}(B^\sharp_{\lambda'}) - S_{c^-}([r, 1]_1).$$

D'où

$$S_c(\lambda') = 2S_{c^+}(A^\sharp_{\lambda'}) + 2S_{c^-}(B^\sharp_{\lambda'}) + \delta_c(\lambda') + C_c,$$

où C_c est un nombre indépendant de λ'. On vérifie qu'en notant $a^\sharp_j$ et $b^\sharp_j$ les termes de $A^\sharp_{\lambda'}$ et $B^\sharp_{\lambda'}$, on a

$$a^\sharp_1 \geq b^\sharp_1 \geq a^\sharp_2 \geq ... \geq a^\sharp_r \geq b^\sharp_r \geq a^\sharp_{r+1}.$$

Donc

$$S_{c^+}(A^\sharp_{\lambda'}) + S_{c^-}(B^\sharp_{\lambda'}) = S_c(A^\sharp_{\lambda'} \sqcup B^\sharp_{\lambda'}).$$

D'après les définitions, on a

$$A^\sharp_{\lambda'} \sqcup B^\sharp_{\lambda'} = A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'}.$$

D'où

$$(2) \qquad S_c(\lambda') = 2S_c(A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'}) + \delta_c(\lambda') + C_c.$$

Supposons $\lambda' \leq \lambda''$. Alors $S_c(\lambda') \leq S_c(\lambda'')$, d'où

$$S_c(A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'}) \leq S_c(A_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup B_{\lambda'',\epsilon''}) + \delta_c(\lambda'')/2 - \delta_c(\lambda')/2 \leq S_c(A_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup B_{\lambda'',\epsilon''}) + 1/2.$$

Puisque les sommes intervenant ici sont entières, on en déduit

$$S_c(A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'}) \leq S_c(A_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup B_{\lambda'',\epsilon''}).$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $c = 1, ..., 2r$, on conclut que $A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'} \leq A_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup B_{\lambda'',\epsilon''}$. Inversement supposons vérifiée cette dernière inégalité. Alors

$$S_c(A_{\lambda',\epsilon'} \sqcup B_{\lambda',\epsilon'}) \leq S_c(A_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup B_{\lambda'',\epsilon''}).$$

Avec (2), on en déduit

$$(3) \qquad S_c(\lambda') \leq S_c(\lambda'') + \delta_c(\lambda') - \delta_c(\lambda'') \leq S_c(\lambda'') + \delta_c(\lambda').$$

Si $S_c(\lambda')$ est pair, $\delta_c(\lambda') = 0$, d'où l'inégalité

$$(4) \qquad S_c(\lambda') \leq S_c(\lambda'').$$

Supposons que $S_c(\lambda')$ soit impair et que (4) ne soit pas vérifiée. Alors (3) force l'égalité $S_c(\lambda') = S_c(\lambda'') + 1$. Puisque λ' est symplectique, le fait que $S_c(\lambda')$ soit impair entraîne que λ_c est impair, que $\lambda'_c = \lambda'_{c+1}$ et que $S_{c-1}(\lambda')$ et $S_{c+1}(\lambda')$ sont pairs. On peut appliquer (4) pour $c-1$ (dans le cas particulier $c = 1$, (4) est triviale pour $c - 1 = 0$). Puisque $S_c(\lambda') = S_{c-1}(\lambda') + \lambda'_c$ et $S_c(\lambda'') = S_{c-1}(\lambda'') + \lambda''_c$, cette inégalité (4) pour $c-1$ et l'égalité $S_c(\lambda') = S_c(\lambda'') + 1$ entraînent $\lambda'_c \geq \lambda''_c + 1$. Puisque $\lambda'_{c+1} = \lambda'_c$ et $\lambda''_{c+1} \leq \lambda''_c$, on a aussi $\lambda'_{c+1} \geq \lambda''_{c+1} + 1$. Alors l'égalité $S_c(\lambda') = S_c(\lambda'') + 1$ entraîne

$$S_{c+1}(\lambda') = S_c(\lambda') + \lambda'_{c+1} \geq S_c(\lambda'') + \lambda''_{c+1} + 2 > S_{c+1}(\lambda'').$$

Puisque $S_{c+1}(\lambda')$ est pair, les deux termes extrêmes sont égaux d'après (4) pour $c+1$ (dans le cas particulier $c = 2r$,cette égalité (4) pour $c+1$ est triviale). Cette contradiction invalide notre hypothèse, donc (4) est forcément vérifiée. Cette inégalité étant maintenant prouvée pour tout c, on en déduit $\lambda' \leq \lambda''$, ce qui prouve (1).

Notons $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ le couple correspondant à (λ, ϵ). On considère que α et β ont respectivement n et m termes comme en 5.2. La proposition 5.2 et la relation (1) permettent de récrire l'énoncé sous la forme

il existe un unique couple $(\alpha^{max}, \beta^{max}) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$ vérifiant les conditions

(i) $mult(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta; \alpha^{max}, \beta^{max}) = 1$;

(ii) pour tout couple $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$ tel que $mult(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta; \alpha', \beta') \neq 0$, on a $p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha', \beta') < p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha^{max}, \beta^{max})$ ou $(\alpha', \beta') = (\alpha^{max}, \beta^{max})$.

La proposition 4.1 entraîne que ceci est vérifié si et seulement si l'ensemble $P_{A,B;2}(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta)$ a un unique élément et, dans ce cas, $(\alpha^{max}, \beta^{max})$ est cet unique élément (comme on l'a dit plus haut, on a glissé l'ordre $<_{I,\alpha,\beta}$ dans la notation). Pour prouver cette assertion, généralisons un peu les hypothèses. On considère des entiers $n, m \in \mathbb{N}$ et des partitions $\alpha \in \mathcal{P}_n$, $\beta \in \mathcal{P}_m$. On fixe des entiers A, B tels que $A \geq 2(n-1)$ et $B \geq 2(m-1)$, on définit la partition $p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha, \beta)$ et on suppose que cette suite est sans multiplicités. On définit l'ordre $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$ sur l'ensemble d'indices $I = (\{1, ..., n\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m\} \times \{1\})$ de la façon suivante : pour $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., m\}$, on a $(i, 0) <_{I,A,B,\alpha,\beta} (j, 1)$ si et seulement si $\alpha_i + A + 2 - 2i > \beta_j + B + 2 - 2j$. On veut alors prouver que $P_{A,B;2}(<_{I,A,B,\alpha,\beta}; \alpha, \beta)$ a un unique élément.

Remarque. Les hypothèses que l'on vient de poser sont bien vérifiées dans la situation précédente, A et B étant définis comme en 5.2. En particulier, l'ordre $<_{I,\alpha,\beta}$ coïncide par définition avec l'ordre $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$.

Si $n = 0$ ou $m = 0$, la conclusion est triviale puisque $P(\alpha, \beta)$ n'a qu'un élément. On suppose $n \geq 1$, $m \geq 1$. Pour simplifier, on note $<_I$ l'ordre $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$. On ne perd rien à supposer que $(1, 0) <_I (1, 1)$. On a alors $\alpha_1 + A > \beta_1 + B \geq B$ et le procédé (a) est l'unique procédé autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B;2}(<_I; \alpha, \beta)$. Ce procédé construit un élément ν_1 et des partitions $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_{n'} \times \mathcal{P}_{m'}$. De l'ordre $<_I$ sur I se déduit un ordre sur l'ensemble d'indices $I' = (\{1, ..., n'\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m'\} \times \{1\})$, cf. 1.2, notons-le $<_{I'}$. Alors le procédé (a) définit une bijection entre $P_{A,B;2}(<_I; \alpha, \beta)$ et $P_{A-2,B;2}(<_{I'}; \alpha', \beta')$ et il faut démontrer que ce dernier ensemble n'a qu'un élément. De nouveau, c'est trivial si $n' = 0$ ou $m' = 0$. On suppose $n' \geq 1$, $m' \geq 1$. En raisonnant par récurrence, il suffit de prouver que les données (α', β'), $A - 2$, B vérifient les mêmes

hypothèses que (α, β), A et B et que l'ordre $<_{I'}$ sur I' coïncide avec l'ordre $<_{I',A-2,B,\alpha',\beta'}$. Rappelons que l'élément ν_1 est de la forme $\alpha_{a_1} + \beta_{b_1} + \alpha_{a_2} + \beta_{b_2} + ...$ où $a_1 = b_1 = 1$, a_2 est le plus petit $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $(b_1, 1) <_I (i, 0)$ si un tel élément existe, b_2 est le plus petit $j \in \{1, ..., m\}$ tel que $(a_2, 0) <_I (j, 1)$ si un tel élément existe etc... Les derniers éléments de ν_1 peuvent être $... + \alpha_{a_t} + \beta_{b_t}$ ou $... + \alpha_{a_t} + \beta_{b_t} + \alpha_{a_{t+1}}$. Dans le premier cas, on pose $T = t$; dans le second, on pose $T = t + 1$. La partition α' est formée des termes $\alpha_{a_1+1}, ..., \alpha_{a_2-1}$, $\alpha_{a_2+1}, ..., \alpha_{a_3-1}$,..., que l'on réindexe en $\alpha'_1, ..., \alpha'_{n'}$. On en déduit la formule suivante. Pour $i \in \{1, ..., n'\}$, notons $k(i)$ le plus grand entier $k \in \{1, ..., T\}$ tel que $a_k - k < i$. Alors $\alpha'_i = \alpha_{i+k(i)}$. Remarquons que l'on a $a_{k(i)} < i + k(i)$. Si $k(i) < T$, on a aussi $i + k(i) < a_{k(i)+1}$ (sinon, on aurait $a_{k(i)+1} - k(i) - 1 < i$, contredisant la maximalité de $k(i)$). De la même façon, pour $j \in \{1, ..., m'\}$, notons $h(j)$ le plus grand entier $h \in \{1, ..., t\}$ tel que $b_h - h < j$. Alors $\beta'_j = \beta_{j+h(j)}$. On a $b_{h(j)} < j + h(j)$. Si $h(j) < t$, on a $j + h(j) < b_{h(j)+1}$. Soient $i \in \{1, ..., n'\}$ et $j \in \{1, ..., m'\}$. Montrons que

(5) les conditions $(i + k(i), 0) <_I (j + h(j), 1)$ et $k(i) \leq h(j)$ sont équivalentes ; si elles sont vérifiées, on a $k(i) \leq t$ et $(i + k(i), 0) <_I (b_{k(i)}, 1)$;

(6) les conditions $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$ et $h(j) < k(i)$ sont équivalentes ; si elles sont vérifiées, on a $h(j) + 1 \leq T$ et $(j + h(j), 1) <_I (a_{h(j)+1}, 0)$.

Supposons $(i + k(i), 0) <_I (j + h(j), 1)$. Puisque $a_{k(i)} < i + k(i)$, on a aussi $(a_{k(i)}, 0) <_I (j + h(j), 1)$. Ainsi $j + h(j)$ est un élément l de $\{1, ..., m\}$ tel que $(a_{k(i)}, 0) <_I (l, 1)$. L'existence d'un tel élément implique que $b_{k(i)}$ existe et $b_{k(i)}$ est le plus petit l vérifiant cette condition. Cela entraîne que $k(i) \leq t$ et que $b_{k(i)} \leq j + h(j)$. Si $h(j) = t$, on a $k(i) \leq t = h(j)$. Si $h(j) < t$, on a vu que $j + h(j) < b_{h(j)+1}$. Alors $b_{k(i)} < b_{h(j)+1}$, ce qui entraîne encore $k(i) \leq h(j)$. Enfin, si on avait $(b_{k(i)}, 1) <_I (i + k(i), 0)$, cela entraînerait pour la même raison que ci-dessus l'existence de l'entier $a_{k(i)+1}$ et on aurait $a_{k(i)+1} \leq i + k(i)$. On a vu que l'on avait au contraire $i + k(i) < a_{k(i)+1}$. Cela démontre que $(i + k(i), 0) <_I (b_{k(i)}, 1)$. On a ainsi démontré la deuxième assertion de (5) et un sens de l'équivalence de la première assertion. Remarquons que les premières assertions de (5) et (6) sont les négatives l'une de l'autre. Pour démontrer complètement ces premières assertions, il suffit de prouver le même sens de celle de (6). Supposons donc $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$. Comme ci-dessus, cela implique $(b_{h(j)}, 1) <_I (i + k(i), 0)$, puis que $a_{h(j)+1}$ existe, donc $h(j) + 1 \leq T$, et que $a_{h(j)+1} \leq i + k(i)$. Si $k(i) = T$, on a $h(j) < h(j) + 1 \leq T = k(i)$. Si $k(i) < T$, on a vu que $i + k(i) < a_{k(i)+1}$. D'où aussi $a_{h(j)+1} < a_{k(i)+1}$ puis $h(j) < k(i)$. Cela démontre le sens voulu de la première assertion de (6). Enfin, si on avait $(a_{h(j)+1}, 0) <_I (j + h(j), 1)$, cela entraînerait comme ci-dessus l'existence de $b_{h(j)+1}$ et on aurait $b_{h(j)+1} \leq j + h(j)$, alors que l'on au contraire $j + h(j) < b_{h(j)+1}$. Cela achève la démonstration de (5) et (6).

Montrons maintenant que

(7) les conditions $(i + k(i), 0) <_I (j + h(j), 1)$ et $\alpha'_i + A - 2i > \beta'_j + B + 2 - 2j$ sont équivalentes ;

(8) les conditions $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$ et $\beta'_j + B + 2 - 2j > \alpha'_i + A - 2i$ sont équivalentes.

De nouveau, il suffit de démontrer le sens "implique" des deux assertions. Supposons $(i + k(i), 0) <_I (j + h(j), 1)$. D'après (5), on a $k(i) \leq t$ et $(i + k(i), 0) <_I (b_{k(i)}, 1)$. Par définition de l'ordre $<_I$, c'est-à-dire de $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$, on a

$$(9) \qquad \alpha_{i+k(i)} + A + 2 - 2i - 2k(i) > \beta_{b_{k(i)}} + B + 2 - 2b_{k(i)}.$$

On a aussi $k(i) \leq h(j)$ donc $\beta_{b_{k(i)}} \geq \beta_{b_{h(j)}}$. D'où

$$\beta_{b_{k(i)}} + B + 2 - 2b_{k(i)} \geq (\beta_{b_{h(j)}} + B + 2 - 2b_{h(j)}) + 2b_{h(j)} - 2b_{k(i)}.$$

Puisque $b_{h(j)} < j + h(j)$, on a

$$\beta_{b_{h(j)}} + B + 2 - 2b_{h(j)} \geq 2 + \beta_{j+h(j)} + B + 2 - 2j - 2h(j).$$

Puisque la suite b_l est strictement croissante, on a aussi $b_{h(j)} - b_{k(i)} \geq h(j) - k(i)$. On obtient alors

$$\beta_{b_{k(i)}}+B+2-2b_{k(i)} \geq 2+\beta_{j+h(j)}+B+2-2j-2h(j)+2h(j)-2k(i) = 2+\beta_{j+h(j)}+B+2-2j-2k(i).$$

Avec (9), cela entraîne

$$\alpha_{i+k(i)} + A - 2i > \beta_{j+h(j)} + B + 2 - 2j.$$

Le membre de gauche est $\alpha'_i + A - 2i$, celui de droite est $\beta'_j + B + 2 - 2j$, ce qui démontre le sens voulu de (7). Supposons maintenant $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$. D'après (6), on a $h(j) + 1 \leq T$ et $(j + h(j), 1) <_I (a_{h(j)+1}, 0)$. Par définition de l'ordre $<_I$, on a donc

$$\beta_{j+h(j)} + B + 2 - 2j - 2h(j) > \alpha_{a_{h(j)+1}} + A + 2 - 2a_{h(j)+1}. \tag{10}$$

On a aussi $h(j) + 1 \leq k(i)$ donc $\alpha_{a_{h(j)+1}} \geq \alpha_{a_{k(i)}}$. D'où

$$\alpha_{a_{h(j)+1}} + A + 2 - 2a_{h(j)+1} \geq \alpha_{a_{k(i)}} + A + 2 - 2a_{k(i)} + 2a_{k(i)} - 2a_{h(j)+1}.$$

Puisque $a_{k(i)} < i + k(i)$, on a

$$\alpha_{a_{k(i)}} + A + 2 - 2a_{k(i)} \geq 2 + \alpha_{i+k(i)} + A + 2 - 2i - 2k(i).$$

Puisque la suite a_l est strictement croissante, on a aussi $a_{k(i)} - a_{h(j)+1} \geq k(i) - h(j) - 1$. D'où

$$\alpha_{a_{h(j)+1}}+A+2-2a_{h(j)+1} \geq 2+\alpha_{i+k(i)}+A+2-2i-2k(i)+2k(i)-2h(j)-2 = 2+\alpha_{i+k(i)}+A-2i-2h(j).$$

Avec (10), cela entraîne

$$\beta_{j+h(j)} + B + 2 - 2j > 2 + \alpha_{i+k(i)} + A - 2i.$$

Le membre de gauche est égal à $\beta'_j + B + 2 - 2j$. Celui de droite est égal à $2 + \alpha'_i + A - 2i$, ce qui démontre une inégalité plus forte que la conclusion de (8). Cela achève la preuve de (7) et (8).

Remarque. Comme on vient de le dire, nous avons en fait démontré une assertion plus forte que (8), à savoir

(11) les trois conditions $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$, $\beta'_j + B + 2 - 2j > \alpha'_i + A - 2i$ et $\beta'_j + B + 2 - 2j > 2 + \alpha'_i + A - 2i$ sont équivalentes.

Nous l'utiliserons dans le paragraphe suivant.

L'une ou l'autre des conditions $(i + k(i), 0) <_I (j + h(j), 1)$ ou $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$ est vérifiée. Alors (7) et (8) entraînent que $\alpha'_i + A - 2i \neq \beta'_j + B + 2 - 2j$. Donc la suite $p\Lambda^{n',m'}_{A-2,B;2}(\alpha', \beta')$ est sans multiplicités. Par définition de l'ordre $<_{I'}$, on a $i <_{I'} j$ si et seulement si $(i+k(i), 0) <_I (j+h(j), 1)$. Par définition de l'ordre $<_{I',A-2,B,\alpha',\beta'}$, on a $i <_{I',A-2,B,\alpha',\beta'} j$ si et seulement si $\alpha'_i + A - 2i > \beta'_j + B + 2 - 2j$. L'assertion (7) implique que les deux ordres sont égaux. Cela vérifie les hypothèses de récurrence, donc $P_{A-2,B;2}(<_{I'}, \alpha', \beta')$ n'a qu'un élément, ce qui achève la démonstration. $\square$

5.6 Tensorisation par le caractère signature

Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Posons $k = k(\lambda, \epsilon)$. Il existe un unique élément de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$, que nous notons $({}^s\lambda, {}^s\epsilon)$ tel que $k({}^s\lambda, {}^s\epsilon) = k$ et $\rho({}^s\lambda, {}^s\epsilon) = sgn \otimes \rho(\lambda, \epsilon)$.

Remarque. Nous adoptons cette notation faute de mieux. Elle n'est pas très bonne car ${}^s\lambda$ ne dépend pas seulement de λ et ${}^s\epsilon$ ne dépend pas seulement de ϵ : ils dépendent tous deux du couple (λ, ϵ).

On fixe r assez grand et on pose $A = 2r + k$ et $B = 2r - 1 - k$ comme en 5.2. Posons $\underline{n} = A+1$, $\underline{m} = B+1$. Notons $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ le couple paramétrant $\rho_{\lambda,\epsilon}$. On peut considérer que α a $\underline{n}$ termes et que β en a $\underline{m}$. On peut alors définir les suites de réels $U_{\lambda,\epsilon} = \alpha + [A/2, 0]_{1/2}$, $V_{\lambda,\epsilon} = \beta + [B/2, 0]_{1/2}$ (on rappelle que $[A/2, 0]_{1/2} = \{A/2, A/2 - 1/2, ..., 1/2, 0\}$). Pour toute suite de réels $\mu = (\mu_1, ..., \mu_t)$, posons $2\mu = (2\mu_1, ..., 2\mu_t)$ et $\mu^2 = (\mu_1, \mu_1, \mu_2, \mu_2, ..., \mu_{t-1}, \mu_{t-1}, \mu_t, \mu_t)$.

Lemme. *On a l'égalité*

$$2U_{\lambda,\epsilon} \sqcup 2V_{\lambda,\epsilon} = {}^t({}^s\lambda) + ([2r, 0]_1 \sqcup [2r - 1, 0]_1).$$

Preuve. On aura besoin de la propriété suivante. Soient μ une partition et $u, v \in \mathbb{N}$. En supposant que u et v sont assez grands, on considère que μ a $u + 1$ termes et que la partition transposée ${}^t\mu$ en a $v + 1$. On définit $X = \mu + [u, 0]_1$ et $Y = {}^t\mu + [v, 0]_1$. Posons $\tilde{Y} = \{u + v + 1 - y; y \in Y\}$. Alors

(1) $X \sqcup \tilde{Y} = [u + v + 1, 0]_1$.

Preuve. On vérifie que $\tilde{Y}$ est contenu dans $[u + v + 1, 0]_1$. Il en est de même de X. Les partitions des deux membres de (1) ont le même nombre d'éléments. Il suffit donc de prouver que X et $\tilde{Y}$ n'ont pas d'éléments communs. Les éléments de X sont les $\mu_i + u + 1 - i$ pour $i = 1, ..., u + 1$. Ceux de Y sont les ${}^t\mu_j + v + 1 - j$ pour $j = 1, ..., v + 1$, ceux de $\tilde{Y}$ sont les $u + j - {}^t\mu_j$. Il faut donc prouver que $\mu_i + {}^t\mu_j \neq i + j - 1$. On voit que ${}^t\mu_j$ est le plus grand $k \in \{0, .., u + 1\}$ tel que $\mu_k \geq j$, avec la convention $\mu_0 = \infty$. Si $\mu_i \geq j$, on a donc ${}^t\mu_j \geq i$ et $\mu_i + {}^t\mu_j \neq i + j - 1$. Si $\mu_i < j$, on a ${}^t\mu_j < i$ et encore $\mu_i + {}^t\mu_j \neq i + j - 1$. Cela prouve (1).

Posons $X = ({}^t\beta)^2 + [A, 0]_1$, $Y = ({}^t\alpha)^2 + [B, 0]_1$, $\tilde{X} = \{A + B + 1 - x; x \in X\}$, $\tilde{Y} = \{A + B + 1 - y; y \in Y\}$. On sait que pour toute partition μ, on a ${}^t(2\mu) = ({}^t\mu)^2$. En appliquant (1), on voit que

$$2U_{\lambda,\epsilon} \sqcup \tilde{Y} = [A + B + 1, 0]_1,$$

$$2V_{\lambda,\epsilon} \sqcup \tilde{X} = [A + B + 1, 0]_1.$$

On a aussi $A + B + 1 = 4r$. D'où

$$(2) \qquad 2U_{\lambda,\epsilon} \sqcup 2V_{\lambda,\epsilon} \sqcup \tilde{X} \sqcup \tilde{Y} = [4r, 0]_1^2.$$

Posons $\eta_A = 0$, $\eta_B = 1$ si k est pair et $\eta_A = 1$, $\eta_B = 0$ si k est impair (rappelons que A et k sont de même parité tandis que B et k sont de parité opposée). Par construction, $X = ({}^t\beta + [A, \eta_A]_2) \sqcup ({}^t\beta + [A - 1, 1 - \eta_A]_2)$, $Y = ({}^t\alpha + [B, \eta_B]_2) \sqcup ({}^t\alpha + [B - 1, 1 - \eta_B]_2)$. En posant

$$\Lambda_{{}^t\beta, {}^t\alpha} = A_{{}^t\beta, {}^t\alpha} \sqcup B_{{}^t\beta, {}^t\alpha} = ({}^t\beta + [A, \eta_A]_2) \sqcup ({}^t\alpha + [B, \eta_B]_2)$$

et en notant $\Lambda^-_{{}^t\beta,{}^t\alpha}$ la partition formée des $x-1$ pour $x \in \Lambda_{{}^t\beta,{}^t\alpha}$, $x \neq 0$, on obtient

$$X \sqcup Y = \Lambda_{{}^t\beta,{}^t\alpha} \sqcup \Lambda^-_{{}^t\beta,{}^t\alpha}.$$

Le couple (α, β) paramètre la représentation $\rho_{\lambda,\epsilon}$ et $({}^t\beta, {}^t\alpha)$ paramètre la représentation $sgn \otimes \rho_{\lambda,\epsilon}$. Autrement dit, $({}^t\beta, {}^t\alpha)$ est le couple associé à $({}^s\lambda, {}^s\epsilon)$. Pour simplifier, posons $(\mu, \tau) = ({}^s\lambda, {}^s\epsilon)$. On a donc $\Lambda_{{}^t\beta,{}^t\alpha} = \Lambda_{\mu,\tau}$, où $\Lambda_{\mu,\tau} = A_{\mu,\tau} \sqcup B_{\mu,\tau}$. D'où, en définissant $\Lambda^-_{\mu,\tau}$ comme ci-dessus,

(3) $X \sqcup Y = \Lambda_{\mu,\tau} \sqcup \Lambda^-_{\mu,\tau}$.

Introduisons les partitions μ' et μ'' définies par $\mu'_j = [\mu_j/2]$ pour $j = 1, ..., 2r+1$, $\mu''_j = [(\mu_j+1)/2]$ pour $j = 1, ..., 2r$. Montrons que

$$(4) \qquad \Lambda_{\mu,\tau} \sqcup \Lambda^-_{\mu,\tau} = (\mu' + [2r, 0]_1) \sqcup (\mu'' + [2r-1, 0]_1).$$

On a $\Lambda_{\mu,\tau} = A_{\mu,\tau} \sqcup B_{\mu,\tau} = A^\sharp_\mu \sqcup B^\sharp_\mu$ et ce dernier terme est calculé par les formules (1)(a) et (1)(b) de 5.1. Pour un indice $j = 1, ..., 2r$ tel que μ_j est pair, μ_j contribue à $\Lambda_{\mu,\tau}$ par un terme $\mu_j/2 + 2r + 1 - j$, donc à $\Lambda_{\mu,\tau} \sqcup \Lambda^-_{\mu,\tau}$ par deux termes $\mu_j/2 + 2r + 1 - j$ et $\mu_j/2+2r-j$. Mais le premier, resp. le second, est la contribution de l'indice j à $\mu'+[2r, 0]_1$, resp. $\mu'' + [2r-1, 0]_1$. Considérons la contribution des termes impairs de μ. Puisque μ est symplectique, on peut les regrouper par paires de termes égaux. Considérons donc un couple de termes impairs de la forme $\mu_{2j-1} = \mu_{2j}$. Ils contribuent à $\Lambda_{\mu,\tau}$ par les termes $A^\sharp_{\mu,j}$ et $B^\sharp_{\mu,j}$, tous deux égaux à $(\mu_{2j}+1)/2+2r+1-2j$. Ils contribuent à $\Lambda_{\mu,\tau} \sqcup \Lambda^-_{\mu,\tau}$ par quatre termes : deux fois $(\mu_{2j}+1)/2+2r+1-2j$ et deux fois $(\mu_{2j}-1)/2+2r+1-2j$. Les indices $2j-1, 2j$ contribuent à $\mu'+[2r, 0]_1$ par $(\mu_{2j}+1)/2+2r+1-2j$ et $(\mu_{2j}-1)/2+2r+1-2j$. Ils contribuent à $\mu''+[2r-1, 0]_1$ par les mêmes termes. Les contributions aux deux membres de (4) sont donc les mêmes. Considérons maintenant un couple de termes impairs de la forme $\mu_{2j} = \mu_{2j+1}$. Ils contribuent à $\Lambda_{\mu,\tau}$ par les termes $A^\sharp_{\mu,j+1}$ et $B^\sharp_{\mu,j}$, tous deux égaux à $(\mu_{2j}+1)/2 + 2r - 2j$. Ils contribuent à $\Lambda_{\mu,\tau} \sqcup \Lambda^-_{\mu,\tau}$ par quatre termes : deux fois $(\mu_{2j}+1)/2+2r-2j$ et deux fois $(\mu_{2j}-1)/2+2r-2j$. Les indices $2j, 2j+1$ contribuent à $\mu' + [2r, 0]_1$ par $(\mu_{2j}+1)/2 + 2r - 2j$ et $(\mu_{2j}-1)/2 + 2r - 2j$ et ils contribuent à $\mu'' + [2r-1, 0]_1$ par les mêmes termes. Les contributions aux deux membres de (4) sont encore une fois les mêmes. Enfin, l'indice $2r+1$ contribue à $\Lambda_{\mu,\tau}$ par $A^\sharp_{\mu,r+1} = 0$, qui disparaît dans $\Lambda^-_{\mu,\tau}$. De même, cet indice contribue à $\mu' + [2r, 0]_1$ par 0 et ne contribue pas à $\mu'' + [2r-1, 0]_1$. Cela prouve (4).

Par définition, $\tilde{X} \sqcup \tilde{Y}$ est la famille des $4r - x$ pour $x \in X \sqcup Y$. D'après (3) et (4), c'est donc la réunion de $\tilde{F}' = \{4r - x; x \in \mu' + [2r, 0]_1\}$ et de $\tilde{F}'' = \{4r - x; x \in \mu'' + [2r-1, 0]_1\}$. En posant $E' = {}^t\mu' + [2r-1, 0]_1$ et $E'' = {}^t\mu'' + [2r, 0]_1$, (1) implique que $E' \sqcup \tilde{F}' = [4r, 0]_1 = E'' \sqcup \tilde{F}'$. D'où

$$E' \sqcup E'' \sqcup \tilde{X} \sqcup \tilde{Y} = [4r, 0]^2_1.$$

Avec (2), on obtient

$$(5) \qquad 2U_{\lambda,\epsilon} \sqcup 2V_{\lambda,\epsilon} = E' \sqcup E''.$$

Montrons que

(6) pour tout $j = 1, ..., 2r$, on a ${}^t\mu''_j \geq {}^t\mu'_j \geq {}^t\mu''_{j+1}$.

On rappelle que, pour toute partition ν, ${}^t\nu_j$ est le nombre d'indices h tels que $\nu_h \geq j$. Si $\mu'_h = [\mu_h/2] \geq j$, on a aussi $\mu''_h = [(\mu_h+1)/2] \geq j$, d'où ${}^t\mu'_j \leq {}^t\mu''_j$. Si $\mu''_h = [(\mu_h+1)/2] \geq j+1$, on a aussi $\mu'_h = [\mu_h/2] \geq j$, d'où ${}^t\mu''_{j+1} \leq {}^t\mu'_j$. Cela prouve (6).

Il résulte de (6) que

$$ {}^t\mu' \sqcup {}^t\mu'' = ({}^t\mu''_1, {}^t\mu'_1, {}^t\mu''_2, {}^t\mu'_2, ..., {}^t\mu''_{2r}, {}^t\mu'_{2r}, {}^t\mu''_{2r+1}). $$

Ecrivons $E' = (e'_1, ..., e'_{2r})$, $E'' = (e''_1, ..., e''_{r+1})$. Il resulte de (6) que l'on a aussi $e''_j > e'_j \geq e''_{j+1}$, donc

$$ E' \sqcup E'' = (e''_1, e'_1, e''_2, e'_2, ..., e''_{2r}, e'_{2r}, e''_{2r+1}) $$
$$ = ({}^t\mu''_1 + 2r, {}^t\mu'_1 + 2r - 1, {}^t\mu''_2 + 2r - 1, {}^t\mu'_2 + 2r - 2, ..., {}^t\mu''_{2r} + 1, {}^t\mu'_{2r}, {}^t\mu''_{2r+1}) $$
$$ = ({}^t\mu' \sqcup {}^t\mu'') + ([2r, 0]_1 \sqcup [2r - 1, 0]_1). $$

On sait que la transposition des partitions échange la somme et la réunion. Donc $({}^t\mu' \sqcup {}^t\mu'') = {}^t(\mu' + \mu'')$. Mais, par définition, $\mu' + \mu'' = \mu$. D'où

$$ E' \sqcup E'' = {}^t\mu + ([2r, 0]_1 \sqcup [2r - 1, 0]_1). $$

Avec (5), on obtient l'énoncé. □

5.7 Un théorème de minimalité

Théorème. *Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. Supposons que λ n'a que des termes pairs. Alors il existe un unique élément $(\lambda^{min}, \epsilon^{min}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; {}^s\lambda^{min}, {}^s\epsilon^{min}) = 1$ *;*

(ii) pour tout élément $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$ tel que $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; {}^s\lambda', {}^s\epsilon') \neq 0$, on a $\lambda^{min} < \lambda'$ ou $(\lambda', \epsilon') = (\lambda^{min}, \epsilon^{min})$.

De plus, on a $({}^s\lambda^{min}, {}^s\epsilon^{min}) = (\lambda^{max}, \epsilon^{max})$.

Preuve. On pose $k = k(\lambda, \epsilon)$. De nouveau, seuls interviennent les couples (λ', ϵ') tels que $k(\lambda', \epsilon') = k$, c'est-à-dire les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$. On fixe r assez grand et on pose $A = 2r + k$ et $B = 2r - 1 - k$ comme en 5.2. Pour $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$, on a défini dans le paragraphe précédent les suites $U_{\lambda',\epsilon'}$ et $V_{\lambda',\epsilon'}$. Montrons que, pour $(\lambda', \epsilon'), (\lambda'', \epsilon'') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$, on a l'équivalence

(1) ${}^s\lambda' \leq {}^s\lambda''$ si et seulement si $U_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup V_{\lambda'',\epsilon''} \leq U_{\lambda',\epsilon'} \sqcup V_{\lambda',\epsilon'}$.

Evidemment $U_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup V_{\lambda'',\epsilon''} \leq U_{\lambda',\epsilon'} \sqcup V_{\lambda',\epsilon'}$ équivaut à $2U_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup 2V_{\lambda'',\epsilon''} \leq 2U_{\lambda',\epsilon'} \sqcup 2V_{\lambda',\epsilon'}$. D'après le lemme 5.6, cela équivaut à ${}^t({}^s\lambda'') \leq {}^t({}^s\lambda')$. On sait bien que la transposition dans $\mathcal{P}(2N)$ est décroissante. La condition précédente équivaut donc à ${}^s\lambda' \leq {}^s\lambda''$. Cela prouve (1).

On peut modifier légèrement l'assertion (1). On note (α', β') et (α'', β'') les éléments de $\mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ correspondant à (λ', ϵ') et (λ'', ϵ''). On a défini en 5.2 les entiers $n = r + [k/2] + 1$ et $m = r - [k/2]$. En 5.6, on a posé $\underline{n} = 2r + k + 1$ et $\underline{m} = 2r - k$. Puisqu'on suppose r grand, on a $\underline{n} \geq n$ et $\underline{m} \geq m$. On a considéré en 5.6 que α' et β' avaient respectivement $\underline{n}$ et $\underline{m}$ termes. Mais, d'après la construction de 5.1, α', resp. β', a au plus n, resp. m, termes non nuls. En considérant maintenant que $\alpha' \in \mathcal{P}_n$ et $\beta' \in \mathcal{P}_m$, on a

$$ U_{\lambda',\epsilon'} = (\alpha' + [A/2, (A + 1 - n)/2]_{1/2}) \sqcup [(A - n)/2, 0]_{1/2}, $$
$$ V_{\lambda',\epsilon'} = (\beta' + [B/2, (B + 1 - m)/2]_{1/2}) \sqcup [(B - m)/2, 0]_{1/2}. $$

Evidemment, l'inégalité $U_{\lambda'',\epsilon''} \sqcup V_{\lambda'',\epsilon''} \leq U_{\lambda',\epsilon'} \sqcup V_{\lambda',\epsilon'}$ équivaut à

$$(\alpha'' + [A/2, (A+1-n)/2]_{1/2}) \sqcup (\beta'' + [B/2, (B+1-m)/2]_{1/2}) \leq$$

$$(\alpha' + [A/2, (A+1-n)/2]_{1/2}) \sqcup (\beta' + [B/2, (B+1-m)/2]_{1/2}).$$

Remarquons que

$$(\alpha' + [A/2, (A+1-n)/2]_{1/2}) \sqcup (\beta' + [B/2, (B+1-m)/2]_{1/2}) = p\Lambda^{n,m}_{A/2,B/2;1/2}(\alpha', \beta').$$

On a donc

(2) $s\lambda' \leq {}^s\lambda''$ si et seulement si $p\Lambda^{n,m}_{A/2,B/2;1/2}(\alpha'', \beta'') \leq p\Lambda^{n,m}_{A/2,B/2;1/2}(\alpha', \beta')$.

On peut reformuler la première assertion de l'énoncé sous la forme

il existe un unique élément $(\underline{\lambda}, \underline{\epsilon}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$ vérifiant les propriétés

(i) $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \underline{\lambda}, \underline{\epsilon}) = 1$;

(ii) pour tout $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$ tel que $\mathfrak{mult}(\lambda, \epsilon; \lambda', \epsilon') \neq 0$, on a ${}^s\underline{\lambda} < {}^s\lambda'$ ou $(\lambda', \epsilon') = (\underline{\lambda}, \underline{\epsilon})$.

Le couple $(\lambda^{min}, \epsilon^{min})$ de l'énoncé est alors $({}^s\underline{\lambda}, {}^s\underline{\epsilon})$. La dernière assertion de l'énoncé affirme que $(\underline{\lambda}, \underline{\epsilon}) = (\lambda^{max}, \epsilon^{max})$.

L'assertion (2) et la proposition 5.2 permet de reformuler les assertions ci-dessus sous la forme suivante :

il existe un unique couple $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$ vérifiant les conditions

(i) $mult(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta; \underline{\alpha}, \underline{\beta}) = 1$;

(ii) pour tout couple $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m$ tel que $mult(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta; \alpha', \beta') \neq 0$, on a $p\Lambda^{n,m}_{A/2,B/2;1/2}(\alpha', \beta') < p\Lambda^{n,m}_{A/2,B/2;1/2}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ ou $(\alpha', \beta') = (\underline{\alpha}, \underline{\beta})$.

La proposition 4.1 entraîne que ceci est vérifié si et seulement si l'ensemble $P_{A/2,B/2;1/2}(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta)$ a un unique élément et, dans ce cas, $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est cet unique élément. On veut de plus prouver que cet élément est égal à l'élément $(\alpha^{max}, \beta^{max})$ paramétrant $(\lambda^{max}, \epsilon^{max})$. Dans la preuve du théorème 5.5, on a vu que $(\alpha^{max}, \beta^{max})$ était l'unique élément de $P_{A,B;2}(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta)$. Il nous suffit donc de prouver que

$$(3) \qquad P_{A/2,B/2;1/2}(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta) = P_{A,B;2}(<_{I,\alpha,\beta}; \alpha, \beta).$$

Pour prouver cette assertion, généralisons un peu les hypothèses. On considère des entiers $n, m \in \mathbb{N}$ et des partitions $\alpha \in \mathcal{P}_n$, $\beta \in \mathcal{P}_m$. On fixe des entiers A, B tels que $A \geq 2(n-1)$ et $B \geq 2(m-1)$, on définit la partition $p\Lambda^{n,m}_{A,B;2}(\alpha, \beta)$ et on suppose que cette suite est sans multiplicités. On définit l'ordre $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$ sur l'ensemble d'indices $I = (\{1, ..., n\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m\} \times \{1\})$ de la façon suivante : pour $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., m\}$, on a $(i, 0) <_{I,A,B,\alpha,\beta} (j, 1)$ si et seulement si $\alpha_i + A + 2 - 2i > \beta_j + B + 2 - 2j$. On fixe des entiers $e, f \in \mathbb{N}$ et on pose les hypothèses suivantes, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., m\}$:

(4) si $(i, 0) <_{I,A,B,\alpha,\beta} (j, 1)$, alors $\alpha_i + A + 2 - 2i \geq 2f + 1 + \beta_j + B + 2 - 2j$;

(5) si $(j, 1) <_{I,A,B,\alpha,\beta} (i, 0)$, alors $\beta_j + B + 2 - 2j \geq 2e + 1 + \alpha_i + A + 2 - 2i$.

Sous ces hypothèses, on va prouver que

$$(6) \qquad P_{(A+e)/2,(B+f)/2;1/2}(<_{I,A,B,\alpha,\beta}; \alpha, \beta) = P_{A,B;2}(<_{I,A,B\alpha,\beta}; \alpha, \beta).$$

Remarque. Dans la situation qui nous intéresse, les hypothèses ci-dessus sont vérifiées pour $e = f = 0$ (les conditions (4) et (5) sont alors tautologiques par définition de l'ordre $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$. La conclusion (6) coïncide avec (3).

Si $n = 0$ ou $m = 0$, la conclusion est triviale puisque $P(\alpha, \beta)$ n'a qu'un élément. On suppose $n \geq 1$ et $m \geq 1$ et on note simplement $<_I$ l'ordre $<_{I,A,B,\alpha,\beta}$. On ne perd rien à supposer que $(1, 0) <_I (1, 1)$. On reprend les notations de la preuve de 5.5. Le procédé (a) est le seul autorisé pour construire les éléments de $P_{A,B;2}(<_I; \alpha, \beta)$. Ce procédé construit un élément ν_1 et des partitions $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_{n'} \times \mathcal{P}_{m'}$. L'ordre $<_I$ induit un ordre $<_{I'}$ sur l'ensemble d'indices $I' = (\{1, ..., n'\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m'\} \times \{1\})$. Les éléments de $P_{A,B;2}(<_I ; \alpha, \beta)$ sont les $(\{\nu_1\} \sqcup \nu' \sqcup \{0^{n-n'-1}\}, \mu' \sqcup \{0^{m-m'}\})$, pour $(\nu', \mu') \in P_{A-2,B;2}(<_{I'}, \alpha', \beta')$. Montrons que le procédé (a) est aussi le seul autorisé pour construire les éléments de $P_{(A+e)/2,(B+f)/2;1/2}(<_I, \alpha, \beta)$, autrement dit que l'on a $\alpha_1 + (A+e)/2 > (B+f)/2$. Il suffit de prouver que $\alpha_1 > (B - A + f)/2$. C'est automatique si $B - A + f < 0$. Supposons $B - A + f \geq 0$. On a alors

$$(B - A + f)/2 \leq B - A + f < B - A + 2f + 1 + \beta_1 \leq \alpha_1$$

d'après (4) pour $i = j = 1$. Cela démontre l'inégalité cherchée. Donc les éléments de $P_{(A+e)/2,(B+f)/2;1/2}(<_I; \alpha, \beta)$ sont les $(\{\nu_1\} \sqcup \nu' \sqcup \{0^{n-n'-1}\}, \mu' \sqcup \{0^{m-m'}\})$, pour $(\nu', \mu') \in P_{(A+e-1)/2,(B+f)/2;1/2}(<_{I'}, \alpha', \beta')$. Il nous suffit de prouver que

$$P_{(A+e-1)/2,(B+f)/2;1/2}(<_{I'}, \alpha', \beta') = P_{A-2,B;2}(<_{I'}, \alpha', \beta').$$

De nouveau, c'est trivial si $n' = 0$ ou $m' = 0$. On suppose $n' \geq 1$, $m' \geq 1$. On pose $A' = A - 2$, $B' = B$, $e' = e + 1$, $f' = f$. On a vu dans la preuve du théorème 5.5 que la partition $p\Lambda^{n',m'}_{A',B';2}(\alpha', \beta')$ était sans multiplicités et que l'ordre $<_{I'}$ coïncidait avec $<_{I',A',B'\alpha',\beta'}$. L'égalité ci-dessus se récrit donc

$$P_{(A'+e')/2,(B'+f')/2;1/2}(<_{I',A',B'\alpha',\beta'}; \alpha', \beta') = P_{A',B';2}(<_{I',A',B',\alpha',\beta'}; \alpha', \beta').$$

C'est la relation (6) pour les données affectées d'un $'$. En raisonnant par récurrence, il suffit de prouver que les analogues des conditions (4) et (5) sont vérifiées par ces données. Soient donc $i \in \{1, ..., n'\}$ et $j \in \{1, ..., m'\}$. Supposons $(i, 0) <_{I'} (j, 1)$. Avec les notations de 5.5(7), on a $(i + k(i), 0) <_I (j + h(j), 1)$. On a alors prouvé en 5.5(9) que $\alpha'_i + A - 2i > \beta'_j + B + 2 - 2j$. La preuve utilisait l'inégalité

$$\alpha_{i+k(i)} + A + 2 - 2i - 2k(i) > \beta_{b_{k(i)}} + B + 2 - 2b_{k(i)}.$$

D'après (4), on a l'inégalité plus forte

$$\alpha_{i+k(i)} + A + 2 - 2i - 2k(i) > 2f + \beta_{b_{k(i)}} + B + 2 - 2b_{k(i)}.$$

Alors, la même preuve qu'en 5.5(9) conduit à l'inégalité $\alpha'_i + A - 2i > 2f + \beta'_j + B + 2 - 2j$. Puisqu'il s'agit d'entiers, cela équivaut à $\alpha'_i + A' + 2 - 2i \geq 1 + 2f + \beta'_j + B' + 2 - 2j$. C'est l'analogue de (4). Supposons maintenant $(j, 1) <_{I'} (i, 0)$. Avec les notations de 5.5(11), on a $(j + h(j), 1) <_I (i + k(i), 0)$. On a alors prouvé que $\beta'_j + B + 2 - 2j > 2 + \alpha'_i + A - 2i$. La preuve utilisait l'inégalité

$$\beta_{j+h(j)} + B + 2 - 2j - 2h(j) > \alpha_{a_{h(j)+1}} + A + 2 - 2a_{h(j)+1}.$$

D'après (5), on a l'inégalité plus forte

$$\beta_{j+h(j)} + B + 2 - 2j - 2h(j) > 2e + \alpha_{a_{h(j)+1}} + A + 2 - 2a_{h(j)+1}.$$

Alors, la suite la même preuve qu'en 5.5(11) conduit à l'inégalité $\beta'_j + B + 2 - 2j > 2 + 2e + \alpha'_i + A - 2i$. Cela équivaut à $\beta'_j + B' + 2 - 2j \geq 1 + 2e' + \alpha'_i + A' + 2 - 2i$. C'est l'analogue de (5). Cela achève la preuve de (6) et du théorème. $\square$

6 Calcul explicite du couple $(\lambda^{max}, \epsilon^{max})$

6.1 Définition d'un couple $(\bar{\lambda}, \bar{\epsilon})$

Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. On suppose que tous les termes de λ sont pairs. On va associer par récurrence à (λ, ϵ) un autre couple $(\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$.

Si $N = 0$, $(\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}) = (\lambda, \epsilon)$ est l'unique élément de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(0)$.

On suppose $N > 0$. On représente λ sous la forme $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{2r+1})$, où $\lambda_{2r+1} = 0$. Comme en 5.1, on considère que ϵ est défini soit sur $Jord^{bp}(\lambda) \cup \{0\} = Jord(\lambda) \cup \{0\}$ (avec $\epsilon_0 = 1$), soit sur l'ensemble d'indices $\{1, ..., 2r+1\}$: $\epsilon(j) = \epsilon_{\lambda_j}$. Notons $J^a = \{j = 1, ..., 2r+1; (-1)^{j+1}\epsilon(j) = 1\}$ et $J^b = \{j = 1, ..., 2r+1; (-1)^j\epsilon(j) = 1\}$. Notons $\mathfrak{S}$ la réunion de $\{1\}$ et de l'ensemble des $j \in \{2, ..., 2r+1\}$ tels que $\epsilon(j)(-1)^j \neq \epsilon(j-1)(-1)^{j-1}$. Ecrivons $\mathfrak{S}$ comme une suite croissante $1 = s_1 < s_2 < ... < s_S$. Posons

$$\bar{\lambda}_1 = \begin{cases} (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) + S - 1 - 2|J^b|, & \text{si } \epsilon(1) = 1; \\ (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) + S - 2|J^a|, & \text{si } \epsilon(1) = -1; \end{cases}$$

Nous montrerons que

(1) $\bar{\lambda}_1$ est pair et on a $2 \leq \bar{\lambda}_1 \leq 2N$.

Posons $N' = N - \bar{\lambda}_1/2$. Notons λ' la réunion des λ_j pour $j \in \{1, ..., 2r+1\}$, $j \notin \mathfrak{S}$, $\epsilon(j)(-1)^j = -\epsilon(1)$ et des $\lambda_j + 2$ pour $j \in \{1, ..., 2r+1\}$, $j \notin \mathfrak{S}$, $\epsilon(j)(-1)^j = \epsilon(1)$. Les termes de cette partition sont tous pairs. Ils sont en nombre $2r+1-S$. Soit $i \in Jord^{bp}(\lambda')$. Par définition, on peut fixer $j \in \{1, ..., 2r+1\}$, $j \notin \mathfrak{S}$, tel que, soit $\epsilon(j)(-1)^j = -\epsilon(1)$ et $i = \lambda_j$, soit $\epsilon(j)(-1)^j = \epsilon(1)$ et $i = \lambda_j + 2$. On note $h[j]$ le plus grand entier $h \in \{1, ..., S\}$ tel que $s_h < j$. On pose $\epsilon'_i = (-1)^{h[j]+1}\epsilon(j)$. Nous montrerons que

(2) cette définition ne dépend pas du choix de j ;

(3) le couple (λ', ϵ') ainsi défini appartient à $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N')$.

Puisque $N' < N$ d'après (1), on sait par récurrence associer à (λ', ϵ') un couple $(\bar{\lambda}', \bar{\epsilon}')$. Nous montrerons que

(4) $\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}'_1$.

On note $\bar{\lambda}$ la partition $\{\bar{\lambda}_1\} \sqcup \bar{\lambda}'$. Elle appartient à $\mathcal{P}^{symp}(2N)$ d'après (1) et (3). Nous montrerons que

(5) il existe un unique $\bar{\epsilon} \in \{\pm 1\}^{Jord^{bp}(\bar{\lambda})}$ tel que, pour $i \in Jord^{bp}(\bar{\lambda}')$, on ait $\bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}'_i$ et que $\bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_1} = \epsilon(1)$.

On a ainsi défini le couple $(\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. A priori, ce couple dépend de l'entier r que l'on a choisi plus haut. En fait

(6) ce couple est indépendant de r.

On reporte à 6.3 les démonstrations des assertions (1) à (6).

6.2 Comparaison avec le couple du théorème 5.5

Soit $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$. On suppose que tous les termes de λ sont pairs.

Proposition. *Le couple $(\lambda^{max}, \epsilon^{max})$ intervenant dans le théorème 5.5 est égal au couple $(\bar{\lambda}, \bar{\epsilon})$ défini dans le paragraphe précédent.*

La démonstration sera donnée en 6.5.

6.3 Démonstration des assertions de 6.1

On reprend les hypothèses et notations de 6.1 en supposant $N > 0$. Remarquons que, si on décompose J^a et J^b en réunions d'intervalles non consécutifs, les éléments de $\mathfrak{S}$ sont exactement les plus petits termes de ces intervalles. On a $1 \in J^a$ si $\epsilon(1) = 1$ et $1 \in J^b$ si $\epsilon(1) = -1$. On a toujours $2r + 1 \in J^a$. En posant formellement $s_{S+1} = 2r + 2$, on en déduit

(1) si $\epsilon(1) = 1$, S est impair, $J^a = \bigcup_{h=1,...,(S+1)/2}\{s_{2h-1}, ..., s_{2h} - 1\}$, $J^b = \bigcup_{h=1,...,(S-1)/2}\{s_{2h}, ..., s_{2h+1} - 1\}$; si $\epsilon(1) = -1$, S est pair, $J^a = \bigcup_{h=1,...,S/2}\{s_{2h}, ..., s_{2h+1} - 1\}$, $J^b = \bigcup_{h=1,...,S/2}\{s_{2h-1}, ..., s_{2h} - 1\}$.

On a

(2) si $j, j + 1$ sont deux indices consécutifs appartenant tous deux à J^a ou tous deux à J^b, on a $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 2$.

En effet, la fonction $j' \mapsto \epsilon(j')(-1)^{j'+1}$ est constante sur J^a comme sur J^b. On en déduit $\epsilon(j) = -\epsilon(j + 1)$. Cela interdit à λ_j et λ_{j+1} d'être égaux. L'assertion s'ensuit puisque ces termes sont pairs par hypothèse.

On en déduit

(3) pour $h = 1, ..., S$, on a $\lambda_{s_h} - \lambda_{s_{h+1}} \geq 2(s_{h+1} - s_h - 1)$.

C'est évident si $s_{h+1} = s_h + 1$. Sinon, les termes $s_h, s_h + 1, ..., s_{h+1} - 1$ sont tous soit dans J^a, soit dans J^b. D'après (2), on a donc $\lambda_{s_h} - \lambda_{s_{h+1}-1} \geq 2(s_{h+1} - s_h - 1)$. L'assertion s'ensuit puisque $\lambda_{s_{h+1}-1} \geq \lambda_{s_{h+1}}$.

En vertu de (1), on a

si $\epsilon(1) = 1$, $2|J^b| + 1 - S = 2\sum_{h=1,...(S-1)/2}(s_{2h+1} - s_{2h} - 1)$,

si $\epsilon(1) = -1$, $2|J^a| - S = 2\sum_{h=1,...,S/2}(s_{2h+1} - s_{2h} - 1)$.

La définition de $\bar{\lambda}_1$ donnée en 6.1 peut se récrire

$$(4) \qquad \bar{\lambda}_1 = (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) - 2 \sum_{h=1,...,[S/2]} (s_{2h+1} - s_{2h} - 1).$$

Démontrons l'assertion (1) de 6.1, que nous répétons :

(5) $\bar{\lambda}_1$ est pair et on a $2 \leq \bar{\lambda}_1 \leq 2N$.

Tous les termes de (4) sont pairs donc $\bar{\lambda}_1$ l'est. La relation (4) entraîne aussi $\bar{\lambda}_1 \leq S(\lambda) = 2N$. Cette formule (4) se récrit

$$\bar{\lambda}_1 = (\sum_{h=1,...,[(S+1)/2]} \lambda_{s_{2h-1}}) + (\sum_{h=1,...,[S/2]} (\lambda_{s_{2h}} - 2(s_{2h+1} - s_{2h} - 1)).$$

En vertu de (3), tous les termes des sommes ci-dessus sont positifs ou nuls. La première somme contient $\lambda_1 \geq 2$. Donc $\bar{\lambda}_1 \geq 2$. Cela prouve (5).

Montrons que

(6) $S(\lambda') = 2N'$.

En effet,

$$S(\lambda') = (\sum_{j=1,...,2r+1; j \notin \mathfrak{S}} \lambda_j) + 2X$$

$$= 2N - (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) + 2X,$$

où X est le nombre de $j \in \{1, ..., 2r+1\}$ tels que $j \notin \mathfrak{S}$ et $\epsilon(j)(-1)^j = \epsilon(1)$. D'après (1), on calcule $2X = 2|J^b| - S + 1$ si $\epsilon(1) = 1$, $2X = 2|J^a| - S$ si $\epsilon(1) = -1$. On obtient alors $S(\lambda') = 2N - \bar{\lambda}_1 = 2N'$.

Les termes de λ' sont des termes de λ auxquels on ajoute éventuellement 2. Ces additions de 2 ne perturbent pas l'ordre des termes. Précisément,

(7) soient $j, k \in \{1, ..., 2r+1\}$, $j, k \notin \mathfrak{S}$. Supposons $\epsilon(j)(-1)^j = -\epsilon(1)$ et $\epsilon(k)(-1)^k = \epsilon(1)$; alors $j < k$ si et seulement si $\lambda_j \geq \lambda_k + 2$.

Si $\lambda_j \geq \lambda_k + 2$, on a a fortiori $\lambda_j > \lambda_k$ donc $j < k$. Inversement, supposons $j < k$. Puisque $\epsilon(j)(-1)^j \neq \epsilon(k)(-1)^k$, il y a au moins un terme de la suite $\mathfrak{S}$ dans l'intervalle $\{j+1, ..., k-1\}$. Soit s_h le plus grand terme de la suite $\mathfrak{S}$ dans cet intervalle. D'après (2), on a $\lambda_{s_h} \geq \lambda_k + 2$. Or $\lambda_j \geq \lambda_{s_h}$. D'où la conclusion $\lambda_j \geq \lambda_k + 2$.

Ecrivons $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_{2r+1-S})$. En vertu de (7), pour $j = 1, ..., 2r+1-S$, on calcule λ'_j de la façon suivante. Notons $h(j)$ le plus grand entier $h = 1, ..., S$ tel que $s_h - h < j$. Alors $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)}$ si $\epsilon(j+h(j))(-1)^{j+h(j)} = -\epsilon(1)$, $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)} + 2$ si $\epsilon(j+h(j))(-1)^{j+h(j)} = \epsilon(1)$. On pose

$$\tau'(j) = \epsilon(j+h(j))(-1)^{h(j)+1}.$$

On va montrer que cette fonction τ' sur l'ensemble d'indices de λ' provient d'un élément de $\{\pm 1\}^{Jord^{bp}(\lambda')}$. Autrement dit

(8) pour $j, k \in \{1, ..., 2r+1-S\}$ tels que $\lambda'_j = \lambda'_k$, on a $\tau'(j) = \tau'(k)$; pour $j \in \{1, ..., 2r+1-S\}$ tel que $\lambda'_j = 0$, on a $\tau'(j) = 1$.

Pour la première assertion, il suffit de traiter le cas où $k = j+1$. Alors $j + h(j)$ et $j+1+h(j+1)$ sont deux termes consécutifs de l'ensemble $\{1, ..., 2r+1\} - \mathfrak{S}$. Autrement dit tous les éléments de $\{j+h(j)+1, ..., j+h(j+1)\}$ appartiennent à $\mathfrak{S}$. On peut préciser qu'ils sont différents de $s_1 = 1$. Par définition de la suite $\mathfrak{S}$, on a $\epsilon(s_h) = \epsilon(s_h - 1)$ pour tout $h \geq 2$. Donc ϵ est constant sur $\{j+h(j), ..., j+h(j+1)\}$. Par contre, $\epsilon(j+1+h(j+1)) = -\epsilon(j+h(j+1))$, sinon $j+1+h(j+1)$ serait dans la suite $\mathfrak{S}$. D'où $\epsilon(j+h(j)) = -\epsilon(j+1+h(j+1))$. A fortiori $\lambda_{j+h(j)} \neq \lambda_{j+1+h(j+1)}$, d'où $\lambda_{j+h(j)} \geq \lambda_{j+1+h(j+1)} + 2$. Par définition de la partition λ', l'égalité $\lambda'_j = \lambda'_{j+1}$ implique alors que $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)}$ et $\lambda'_{j+1} = \lambda_{j+1+h(j+1)} + 2$. Cela ne se produit que si $\epsilon(j+h(j))(-1)^{j+h(j)} = -\epsilon(1)$ et $\epsilon(j+1+h(j+1))(-1)^{j+1+h(j+1)} = \epsilon(1)$. Alors $\epsilon(j+h(j))(-1)^{h(j)+1} = \epsilon(j+1+h(j+1))(-1)^{h(j+1)+1}$, c'est-à-dire $\tau'(j) = \tau'(j+1)$. Cela prouve la première assertion de (8). Supposons maintenant $\lambda'_j = 0$. On a nécessairement $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)} = 0$. L'égalité $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)}$ implique $\epsilon(j+h(j))(-1)^{j+h(j)} = -\epsilon(1)$. Puisque $j+h(j)$ appartient à l'intervalle $\{s_{h(j)}, ..., s_{h(j)+1} - 1\}$, l'égalité précédente et (1) impliquent que $h(j)$ est impair. De plus, l'égalité $\lambda_{j+h(j)} = 0$ implique $\epsilon(j+h(j)) = 1$. Mais alors $\tau'(j) = \epsilon(j+h(j))(-1)^{h(j)+1} = 1$. Cela démontre (8).

Soit $i \in Jord^{bp}(\lambda')$. Fixons $j \in \{1, ..., 2r+1\}$, $j \notin \mathfrak{S}$, tel que, soit $\epsilon(j)(-1)^j = -\epsilon(1)$ et $i = \lambda_j$, soit $\epsilon(j)(-1)^j = \epsilon(1)$ et $i = \lambda_j + 2$. Alors il existe un unique $k \in \{1, ..., 2r+1-S\}$ tel que $j = k + h(k)$. On a $i = \lambda'_k$ et $h[j] = h(k)$. Alors

$$\epsilon'_i = (-1)^{h[j]+1}\epsilon(j) = (-1)^{h(k)+1}\epsilon(k+h(k)) = \tau'(k).$$

La relation (8) montre que ceci ne dépend pas du choix de j et que ϵ' coïncide avec τ' vu comme un élément de $\{\pm 1\}^{Jord^{bp}(\lambda')}$. Cela démontre l'assertion (2) de 6.1. Avec (6), on a aussi l'assertion (3) de ce paragraphe. Puisque $\epsilon' = \tau'$, nous abandonnons désormais la notation τ'.

Montrons que

(9) on a $\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}'_1$; si $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}'_1$, on a $\bar{\epsilon}'_{\bar{\lambda}'_1} = \epsilon(1)$.

L'assertion est triviale si $N' = 0$ puisqu'alors $\bar{\lambda}'_1 = 0 < \bar{\lambda}_1$ d'après (5). On suppose $N' > 0$. Remarquons que, puisque $\bar{\epsilon}'_{\bar{\lambda}'_1} = \epsilon'(1)$ par définition, la deuxième assertion de (9) peut se reformuler : si $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}'_1$, on a $\epsilon'_1 = \epsilon(1)$.

Pour calculer le terme $\bar{\lambda}'_1$, il faut représenter la partition λ' sous la même forme que l'on a représenté λ (remarquons que l'on sait par récurrence que $\bar{\lambda}'_1$ ne dépend pas de la forme choisie). Si $\epsilon(1) = 1$, (1) implique que le nombre de termes $2r+1-S$ de λ' est pair. On lui adjoint donc un terme $\lambda'_{2r+2-S} = 0$ et on pose $r' = r+(1-S)/2$. Si $\epsilon(1) = -1$, (1) implique que $2r+1-S$ est impair. Mais on ne sait pas si le dernier terme λ'_{2r+1-S} est nul. On adjoint donc deux termes $\lambda'_{2r+2-S} = \lambda'_{2r+3-S} = 0$ et on pose $r' = r+1-S/2$. Cela étant, on définit la suite $\mathfrak{S}' = \{s'_1, ..., s'_{S'}\}$ et les ensembles d'indices J'^a et J'^b comme on a défini $\mathfrak{S}$, J^a et J^b. On note $\tilde{\mathfrak{S}}' = \{1, ..., 2r+1-S\} \cap \mathfrak{S}'$, $\tilde{J'}^a = \{1, ..., 2r+1-S\} \cap J'^a$ et $\tilde{J'}^b = \{1, ..., 2r+1-S\} \cap J'^b$. On vérifie que

(10)(a) si $\epsilon(1) = 1$, $J'^a = \tilde{J'}^a \sqcup \{2r+2-S\}$ et $J'^b = \tilde{J'}^b$;

(10)(b) si $\epsilon(1) = -1$, $J'^a = \tilde{J'}^a \sqcup \{2r+3-S\}$ et $J'^b = \tilde{J'}^b \sqcup \{2r+2-S\}$.

Notons aussi $\tilde{J}^a$, resp. $\tilde{J}^b$, l'ensemble des $j \in J^a$, resp. $j \in J^b$, qui n'appartiennent pas à la suite $\mathfrak{S}$. On a

(11) pour $j \in \{1, ..., 2r+1-S\}$, les propriétés $j \in \tilde{J'}^a$ et $j+h(j) \in \tilde{J}^b$ sont équivalentes et les propriétés $j \in \tilde{J'}^b$ et $j+h(j) \in \tilde{J}^a$ sont équivalentes.

Par exemple, $j \in \tilde{J'}^a$ si et seulement si $\epsilon'(j)(-1)^{j+1} = 1$ et $j+h(j) \in \tilde{J}^b$ si et seulement si $\epsilon(j+h(j))(-1)^{j+h(j)+1} = -1$. La définition $\epsilon'(j) = \epsilon(j+h(j))(-1)^{h(j)+1}$ entraîne l'équivalence de ces relations.

Soit $\tilde{S}'$ le plus grand indice tel que $s'_{\tilde{S}'}$ appartienne à $\tilde{\mathfrak{S}}'$. Montrons que

(12) pour $k = 1, ..., \tilde{S}'$, on a $s'_k + h(s'_k) - 1 = s_{h(s'_k)}$; cet indice appartient à $\mathfrak{S} \cap J^b$ si $s'_k \in \tilde{J'}^a$ et à $\mathfrak{S} \cap J^a$ si $s'_k \in \tilde{J'}^b$.

Supposons par exemple $s'_k \in \tilde{J'}^a$. D'après (11), $s'_k + h(s'_k)$ appartient à J^b. Par définition de λ', $s'_k + h(s'_k)$ n'appartient pas à $\mathfrak{S}$. Donc $s'_k + h(s'_k) - 1 \in J^b$. Si cet indice n'appartenait pas à $\mathfrak{S}$, $\lambda_{s'_k+h(s'_k)-1}$ apparaîtrait dans la suite λ', forcément à l'indice $s'_k - 1$. On aurait alors $h(s'_k - 1) = h(s'_k)$ et, d'après (11), $s'_k - 1$ appartiendrait à $\tilde{J'}^a$. Mais, par définition de la suite $\mathfrak{S}'$, les conditions $s'_k - 1 \in J'^a$ et $s'_k \in \mathfrak{S}'$ entraînent $s'_k \in J'^b$ contrairement à hypothèse. Cette contradiction prouve que $s'_k + h(s'_k) - 1$ appartient à $\mathfrak{S}$. Par définition de $h(s'_k)$, c'est alors forcément $s_{h(s'_k)}$. Cela prouve (12).

Il résulte de (12) que l'application $k \mapsto h(s'_k)$ est une injection de $\{1, ..., \tilde{S}'\}$ dans $\{1, ..., S\}$. Elle est évidemment croissante. On a

(13) si $\epsilon(1) = \epsilon'(1)$, alors 1 n'appartient pas à l'image de cette injection.

Puisque $s'_1 = 1$, il s'agit de prouver que $h(1) > 1$. Supposons par exemple $\epsilon(1) = \epsilon'(1) = 1$. La relation (1) appliquée à λ et à λ' implique que $1 \in J^a$ et $1 \in J'^a$. D'après (12), cette dernière relation implique $s_{h(1)} \in J^b$ (puisque $s'_1 + h(s'_1) - 1 = h(1)$). Alors la relation $1 \in J^a$ interdit à $h(1)$ d'être égal à 1. Cela prouve (13).

Supposons $\epsilon(1) = \epsilon'(1)$. On veut prouver que $\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}'_1$. D'après (4) appliqué à λ', on a $\bar{\lambda}'_1 \leq \sum_{k=1,...,S'} \lambda'_{s'_k}$. De plus, $\lambda'_{s'_k} = 0$ si $k > 2r+1-S$. Il suffit donc de prouver

$$\bar{\lambda}_1 \geq \sum_{k=1,...,\tilde{S}'} \lambda'_{s'_k}.$$

D'après (11) et (12), pour $k = 1, ..., \tilde{S}'$, les indices $s_{h(s'_k)}$ et $s_{h(s'_k)} + 1 = s'_k + h(s'_k)$ appartiennent tous deux à J^a ou tous deux à J^b. D'après (2), cela implique $\lambda_{s_{h(s'_k)}} \geq$

$\lambda_{s'_k+h(s'_k)}+2$. Puisque $\lambda'_{s'_k}$ est égal à $\lambda_{s'_k+h(s'_k)}$ ou à $\lambda_{s'_k+h(s'_k)}+2$, on a en tout cas $\lambda'_{s'_k} \leq \lambda_{s_{h(s'_k)}}$. Puisque l'application $k \mapsto h(s'_k)$ est injective et que son image ne contient pas 1, on obtient

$$\sum_{k=1,\dots,\tilde{S}'} \lambda'_{s'_k} \leq \sum_{h=2,\dots,S} \lambda_{s_h}.$$

Il suffit alors de prouver que

$$\bar{\lambda}_1 \geq \sum_{h=2,\dots,S} \lambda_{s_h}.$$

D'après (4), il suffit encore de prouver que

$$\lambda_1 \geq 2 \sum_{h=1,\dots,[S/2]} (s_{2h+1} - s_{2h} - 1).$$

Mais la somme sur h des relations (3) conduit à l'inégalité plus forte

$$\lambda_1 \geq 2 \sum_{h=1,\dots,S} (s_{h+1} - s_h - 1).$$

Cela démontre (9) dans le cas $\epsilon(1) = \epsilon'(1)$.

On suppose maintenant $\epsilon(1) = 1$ et $\epsilon'(1) = -1$. Pour $k = 1, \dots, \tilde{S}'$, on a vu ci-dessus que $\lambda_{s_{h(s'_k)}} \geq \lambda_{s'_k+h(s'_k)}+2$. Par définition de la partition λ', on a $\lambda'_{s_k} = \lambda_{s'_k+h(s'_k)}$ si $s'_k+h(s'_k) \in J^a$, ou encore si $s'_k \in J'^b$ d'après (11), et $\lambda'_{s_k} = \lambda_{s'_k+h(s'_k)}+2$ si $s'_k+h(s'_k) \in J^b$, ou encore $s'_k \in J'^a$ d'après (11). On a donc toujours $\lambda'_{s'_k} \leq \lambda_{s_{h(s'_k)}}$ et même $\lambda'_{s'_k} \leq \lambda_{s_{h(s'_k)}}-2$ si $s'_k \in J'^b$. En utilisant l'injectivité de l'application $k \mapsto h(s'_k)$, on obtient

$$\sum_{k=1,\dots,S'} \lambda'_{s'_k} = \sum_{k=1,\dots,\tilde{S}'} \lambda'_{s'_k} \leq (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}) - 2|J'^b \cap \tilde{\mathfrak{S}}'|.$$

D'après (10)(a), $J'^b \cap \tilde{\mathfrak{S}}' = J'^b \cap \mathfrak{S}'$. D'après (1) appliqué à λ' (en se souvenant de l'hypothèse $\epsilon'(1) = -1$), le nombre d'éléments de cet ensemble est $S'/2$. D'où

$$\sum_{k=1,\dots,S'} \lambda'_{s'_k} \leq (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}) - S'.$$

On a aussi

$$\bar{\lambda}'_1 = (\sum_{k=1,\dots,S'} \lambda'_{s'_k}) + S' - 2|J'^a|,$$

d'où

$$\bar{\lambda}'_1 \leq (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}) - 2|J'^a|.$$

D'après (10)(a), $|J'^a| = |\tilde{J}'^a|+1$. Mais (11) établit une bijection de $\tilde{J}'^a$ sur le complémentaire $\tilde{J}^b$ de $J^b \cap \mathfrak{S}$ dans J^b. D'après (1), on a $|J^b \cap \mathfrak{S}| = (S-1)/2$. On obtient donc $|J'^a| = 1 + |J^b| - (S-1)/2 = |J^b| + (3-S)/2$, puis

$$\bar{\lambda}'_1 \leq (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}) - 3 + S - 2|J^b|.$$

Mais

$$\bar{\lambda}_1 = (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) + S - 1 - 2|J^b|$$

d'où

$$\bar{\lambda}'_1 \leq \bar{\lambda}_1 - 2,$$

ce qui démontre (9) dans le cas $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon'(1) = -1$.

La preuve du cas $\epsilon(1) = -1$, $\epsilon'(1) = 1$ est similaire. Pour $k = 1, ..., \tilde{S}'$, on a cette fois $\lambda'_{s'_k} \leq \lambda_{s_{h(s'_k)}}$ et même $\lambda'_{s'_k} \leq \lambda_{s_{h(s'_k)}} - 2$ si $s'_k \in J'^a$. D'où

$$\sum_{k=1,...,S'} \lambda'_{s'_k} \leq (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) - 2|J'^a \cap \tilde{\mathfrak{S}}'|.$$

On utilise (10)(b). Puisque $2r + 3 - S \in J'^a$ et $2r + 2 - S \in J'^b$, on a $2r + 3 - S \in \mathfrak{S}'$ par définition de cette suite. Donc $J'^a \cap \mathfrak{S}' = (J'^a \cap \tilde{\mathfrak{S}}') \sqcup \{2r + 3 - S\}$ et $|J'^a \cap \tilde{\mathfrak{S}}'| = |J'^a \cap \mathfrak{S}'| - 1$. D'après (1) appliqué à λ' (en se rappelant l'hypothèse $\epsilon'(1) = 1$), on a $|J'^a \cap \mathfrak{S}'| = (S' + 1)/2$. D'où

$$\sum_{k=1,...,S'} \lambda'_{s'_k} \leq (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) - S' + 1.$$

On a aussi

$$\bar{\lambda}'_1 = (\sum_{k=1,...,S'} \lambda'_{s'_k}) + S' - 1 - 2|J'^b|,$$

d'où

$$\bar{\lambda}'_1 \leq (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) - 2|J'^b|.$$

D'après (10)(b), $|J'^b| = |\tilde{J}'^b| + 1$. Mais (11) établit une bijection de $\tilde{J}'^b$ sur le complémentaire $\tilde{J}^a$ de $J^a \cap \mathfrak{S}$ dans J^a. D'après (1), on a $|J^a \cap \mathfrak{S}| = S/2$. On obtient donc $|J'^b| = 1 + |J^a| - S/2$, puis

$$\bar{\lambda}'_1 \leq (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) - 2 + S - 2|J^a|.$$

Mais

$$\bar{\lambda}_1 = (\sum_{h=1,...,S} \lambda_{s_h}) + S - 2|J^a|$$

d'où

$$\bar{\lambda}'_1 \leq \bar{\lambda}_1 - 2,$$

ce qui démontre (9) dans le cas $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon'(1) = -1$. Cela achève la preuve de (9).

L'assertion (9) implique les deux assertions (4) et (5) de 6.1. Montrons enfin que les constructions ne dépendent pas de l'entier r choisi. Il suffit de montrer qu'elles ne changent pas si l'on remplace r par $r + 1$. Par ce remplacement, on ajoute à λ deux termes $\lambda_{2r+2} = \lambda_{2r+3} = 0$. On voit que les deux indices $2r + 2$ et $2r + 3$ s'ajoutent à la suite $\mathfrak{S}$, le premier s'ajoutant à J^b et le second à J^a. Le nombre S s'accroît de 2 et on voit que ces modifications ne changent pas $\bar{\lambda}_1$. Puisque les indices ajoutés appartiennent à $\mathfrak{S}$, la partition λ' ne change pas, ni bien sûr ϵ'. Cela prouve l'assertion (6) de 6.1.

6.4 Conservation de l'entier k

Les hypothèses sont les mêmes qu'en 6.1.

Lemme. *On a l'égalité* $k(\lambda,\epsilon)=k(\bar{\lambda},\bar{\epsilon})$.

Preuve. C'est trivial si $N=0$. On suppose $N>0$. Posons $k=k(\lambda,\epsilon)$, $\bar{k}=k(\bar{\lambda},\bar{\epsilon})$, $M=M(\lambda,\epsilon)$, $\bar{M}=M(\bar{\lambda},\bar{\epsilon})$, cf. 5.1. Rappelons que $k=sup(2M,-2M-1)$, $\bar{k}=sup(2\bar{M},-2\bar{M}-1)$. Montrons d'abord que

(1) $2M=|J^a|-|J^b|-1$.

D'après 5.1(2), on a

$$2M=(\sum_{j=1,\dots,2r+1}\epsilon(j)(-1)^{j+1})-\sum_{j=1,\dots,2r+1}(-1)^{j+1}.$$

La première somme vaut $|J^a|-|J^b|$, la seconde vaut 1 et l'assertion (1) s'en déduit.

Supposons d'abord $N'=0$. Alors $\bar{\lambda}_1=2N$. Puisque

$$\bar{\lambda}_1\leq\sum_{h=1,\dots,S}\lambda_{s_h}\leq\sum_{j=1,\dots,2r+1}\lambda_j,$$

ces inégalités sont des égalités. En comparant avec la définition de $\bar{\lambda}_1$, la première égalité entraîne que $|J^b|=(S-1)/2$ si $\epsilon(1)=1$ et $|J^a|=S/2$ si $\epsilon(1)=-1$. La deuxième égalité entraîne que $\lambda_j=0$ pour tout élément $j\in\{1,...,2r+1\}$ qui n'appartient pas à la suite $\mathfrak{S}$. Si un tel élément existe, considérons le plus grand de ces éléments, notons-le j. On a $j\geq 2$ puisque j n'appartient pas à $\mathfrak{S}$. Supposons par exemple $j\in J^a$. Puisque $j\notin\mathfrak{S}$, on a aussi $j-1\in J^a$ donc $\lambda_{j-1}\geq\lambda_j+2$ d'après 6.3(2). Les $\lambda_{j'}$ pour $j'<j$ sont donc non nuls et appartiennent donc forcément à $\mathfrak{S}$. Cela prouve qu'il y a au plus un élément de $\{1,...,2r+1\}$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{S}$. D'où $S=2r+1$ ou $S=2r$. On a déterminé la parité de S en 6.3(1) et on en déduit $S=2r+1$ si $\epsilon(1)=1$, $S=2r$ si $\epsilon(1)=-1$. On a vu ci-dessus que $|J^b|=(S-1)/2$ dans le premier cas et que $|J^a|=S/2$ dans le second. Puisque $|J^a|+|J^b|=2r+1$, on en déduit $|J^a|=(S+1)/2$ dans le premier cas, $|J^b|=S/2+1$ dans le second. Avec (1) et l'égalité $k=sup(2M,-2M-1)$, on calcule $k=0$ si $\epsilon(1)=1$, $k=1$ si $\epsilon(-1)=-1$. D'autre part, on a $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1)$ et $\bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_1}=\epsilon(1)$. Avec la définition de 5.1, on calcule $\bar{k}=0$ si $\epsilon(1)=1$ et $\bar{k}=1$ si $\epsilon(1)=-1$. L'égalité de l'énoncé s'ensuit.

Supposons maintenant $N'>0$. On pose $k'=k(\lambda',\epsilon')$, $M'=M(\lambda',\epsilon')$. Montrons que

$$(2)\qquad M'=\begin{cases}-M, & \text{si } \epsilon(1)=1,\\ -M-1, & \text{si } \epsilon(1)=-1.\end{cases}$$

D'après (1), on a $2M=|J^a|-|J^b|-1$ et $2M'=|J'^a|-|J'^b|-1$. Supposons par exemple $\epsilon(1)=1$. Alors, d'après les relations (10)(a) et (11) de 6.3,

$$2M'=|\tilde{J}'^a|-|\tilde{J}'^b|=|\tilde{J}^b|-|\tilde{J}^a|.$$

D'après 6.3(1), $|\tilde{J}^a|=|J^a|-(S+1)/2$, $|\tilde{J}^b|=|J^b|-(S-1)/2$. D'où $2M'=|J^b|-|J^a|+1=-2M$. La preuve est similaire dans le cas $\epsilon(1)=-1$. Cela prouve (2).

Posons $\bar{M}'=M(\bar{\lambda}',\bar{\epsilon}')$. L'égalité du lemme équivaut à $M=\bar{M}$. Par récurrence, on peut supposer que $M'=\bar{M}'$. En vertu de (2), pour démontrer le lemme, il suffit de prouver

$$(3) \qquad \bar{M} = \begin{cases} -\bar{M}', & \text{si } \epsilon(1) = 1, \\ -\bar{M}' - 1, & \text{si } \epsilon(1) = -1. \end{cases}$$

Notons $i_1 > ..., > i_m$ les éléments $i \in Jord^{bp}(\bar{\lambda})$ tels que $mult_{\bar{\lambda}}(i)$ soit impaire et $i'_1 > .... > i'_{m'}$ la suite analogue pour $\bar{\lambda}'$. Puisque $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_1\} \sqcup \bar{\lambda}'$, on a deux possibilités :

(4) si $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}'_1$, ou si $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}'_1$ et $mult_{\bar{\lambda}'}(\bar{\lambda}'_1)$ est paire, alors $i_1 = \bar{\lambda}_1$, $m = m' + 1$ et $i_l = i'_{l-1}$ pour $l = 2, ..., m$;

(5) si $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}'_1$ et $mult_{\bar{\lambda}'}(\bar{\lambda}'_1)$ est impaire, on a $i'_1 = \bar{\lambda}'_1$, $m = m' - 1$ et $i_l = i'_{l+1}$ pour $l = 1, ..., m$.

Supposons $\epsilon(1) = 1$. Dans le cas (4), i_1 ne contribue pas à $\bar{M}$ et

$$\bar{M} = \sum_{l=2,...,m;\bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_l}=-1} (-1)^l = \sum_{l=1,...,m';\bar{\epsilon}'_{\bar{\lambda}'_l}=-1} (-1)^{l+1} = -\bar{M}'.$$

Dans le cas (5), on a forcément $\epsilon'(1) = 1$ et i'_1 ne contribue pas à $\bar{M}'$. Alors

$$\bar{M} = \sum_{l=1,...,m;\bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_l}=-1} (-1)^l = \sum_{l=2,...,m';\bar{\epsilon}'_{\bar{\lambda}'_l}=-1} (-1)^{l+1} = -\bar{M}'.$$

Supposons $\epsilon(1) = -1$. Dans le cas (4), i_1 contribue à $\bar{M}$ par -1 et

$$\bar{M} = -1 + \sum_{l=2,...,m;\bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_l}=-1} (-1)^l = -1 + \sum_{l=1,...,m';\bar{\epsilon}'_{\bar{\lambda}'_l}=-1} (-1)^{l+1} = -1 - \bar{M}'.$$

Dans le cas (5) , on a forcément $\epsilon'(1) = -1$ et i'_1 contribue à $\bar{M}'$. Alors

$$\bar{M} = \sum_{l=1,...,m;\bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_l}=-1} (-1)^l = \sum_{l=2,...,m';\bar{\epsilon}'_{\bar{\lambda}'_l}=-1} (-1)^{l+1} = -(\bar{M}' + 1).$$

Cela prouve (3) et achève la preuve du lemme. □

6.5 Preuve de la proposition 6.2

Les calculs de cette preuve diffèrent selon les différents cas $\epsilon(1) = \pm 1$ et k pair ou impair. Pour tenter de les unifier, reprenons les définitions de 5.1 et 5.2. On fixe un entier $N > 0$, un entier $k \geq 0$ tel que $k(k+1) \leq 2N$ et un entier r assez grand. On a défini les entiers $n = r + [k/2] + 1$, $m = r - [k/2]$, $A = 2r + k$, $B = 2r - k - 1$. Pour un élément $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$ (c'est-à-dire que $k(\lambda, \epsilon) = k$), on suppose que λ a $2r + 1$ termes avec $\lambda_{2r+1} = 0$. On a défini les partitions $A_{\lambda,\epsilon}$ et $B_{\lambda,\epsilon}$. Pour un couple $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$, on suppose que α a n termes et que β en a m. On a défini les partitions $A_{\alpha,\beta}$ et $B_{\alpha,\beta}$. Fixons un signe $u \in \{\pm 1\}$. On modifie les définitions ci-dessus en posant

si $u = 1$, $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon} = A_{\lambda,\epsilon}$, $\tilde{B}_{\lambda,\epsilon} = B_{\lambda,\epsilon}$;

si $u = -1$, $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon} = B_{\lambda,\epsilon}$, $\tilde{B}_{\lambda,\epsilon} = A_{\lambda,\epsilon}$;

si $u(-1)^k = 1$, $\tilde{n} = n$, $\tilde{m} = m$, $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = B$, $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$, $\tilde{A}_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta}$, $\tilde{B}_{\alpha,\beta} = B_{\alpha,\beta}$;

si $u(-1)^k = -1$, $\tilde{n} = m$, $\tilde{m} = n$, $\tilde{A} = B$, $\tilde{B} = A$, $\tilde{\alpha} = \beta$, $\tilde{\beta} = \alpha$, $\tilde{A}_{\alpha,\beta} = B_{\alpha,\beta}$, $\tilde{B}_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta}$.

On a

$$(1) \qquad \tilde{A}_{\alpha,\beta} = \tilde{\alpha} + [\tilde{A}, \tilde{A} + 2 - 2\tilde{n}]_2,\ \tilde{B}_{\alpha,,\beta} = \tilde{\beta} + [\tilde{B}, \tilde{B} + 2 - 2\tilde{m}]_2.$$

Dire que (α, β) correspond à (λ, ϵ) équivaut aux égalités

$$(2) \qquad \tilde{A}_{\lambda,\epsilon} = \tilde{A}_{\alpha,\beta},\ \tilde{B}_{\lambda,\epsilon} = \tilde{B}_{\alpha,\beta}.$$

Considérons les ensembles d'indices $I = (\{1, ..., n\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., m\} \times \{1\})$ et $\tilde{I} = (\{1, ..., \tilde{n}\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., \tilde{m}\} \times \{1\})$. Donnons-nous un ordre $<_I$ sur I. On en déduit un ordre $<_{\tilde{I}}$ sur $\tilde{I}$: si $u(-1)^k = 1$, on a $\tilde{I} = I$ et l'ordre $<_{\tilde{I}}$ coïncide avec $<_I$; si $u(-1)^k = -1$, on impose que $(i, 0) <_{\tilde{I}} (j, 1)$ si et seulement si $(i, 1) <_I (j, 0)$. On voit alors que l'application $(\nu, \mu) \mapsto (\tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ est une bijection de $P_{A,B;2}(\alpha, \beta)$ sur $P_{\tilde{A},\tilde{B};2}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Fixons maintenant $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$ et supposons que tous les termes de λ sont pairs. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N - k(k+1)/2)$ le couple correspondant à (λ, ϵ). On munit I de l'ordre $<_{I,\alpha,\beta,A,B}$ défini par $(i, 0) <_I (j, 1)$ si et seulement si $\alpha_i + A + 2 - 2i > \beta_j + B + 2 - 2j$. On note simplement $<_I$ cet ordre. On voit que l'ordre $<_{\tilde{I}}$ qui s'en déduit n'est autre que $<_{\tilde{I},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{A},\tilde{B}}$. D'après la preuve du théorème 5.5, il y a un unique élément $(\alpha^{max}, \beta^{max})$ dans $P_{A,B;2}(\alpha, \beta)$ et $(\lambda^{max}, \epsilon^{max})$ est l'élément de $\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)_k$ qui correspond à $(\alpha^{max}, \beta^{max})$. Alors $(\tilde{\alpha}^{max}, \tilde{\beta}^{max})$ est l'unique élément de $P_{\tilde{A},\tilde{B};2}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ et on a les égalités

$$(3) \qquad \tilde{A}_{\lambda^{max},\epsilon^{max}} = \tilde{A}_{\alpha^{max},\beta^{max}},\ \tilde{B}_{\lambda^{max},\epsilon^{max}} = \tilde{B}_{\alpha^{max},\beta^{max}}.$$

Les constructions ci-dessus dépendent du signe u. On choisit désormais $u = \epsilon(1)$. On a calculé les termes $A_{\lambda,\epsilon}$ et $B_{\lambda,\epsilon}$ en 5.1. On en déduit que $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon} = \{\lambda_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r + 1, \epsilon(j)(-1)^{j+1} = \epsilon(1)\}$ et $\tilde{B}_{\lambda,\epsilon} = \{\lambda_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r + 1, \epsilon(j)(-1)^j = \epsilon(1)\}$. En particulier, le plus grand terme de $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon} \sqcup \tilde{B}_{\lambda,\epsilon}$ apparaît dans $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon}$. Grâce à 6.3(1), on obtient que $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon}$ est la réunion sur $h = 1, ..., [(S+1)/2]$ des $\{\lambda_j/2 + 2r + 1 - j; j = s_{2h-1}, ..., s_{2h} - 1\}$ et que $\tilde{B}_{\lambda,\epsilon}$ est la réunion sur $h = 1, ..., [S/2]$ des $\{\lambda_j/2 + 2r + 1 - j; j = s_{2h}, ..., s_{2h+1} - 1\}$. Divisons l'ensemble $\{1, ..., \tilde{n}\}$ en $[(S+1)/2]$ intervalles consécutifs $X_1, ..., X_{[(S+1)/2]}$, l'intervalle X_h ayant $s_{2h} - s_{2h-1}$ termes. Notons x_h le plus petit élément de X_h. Divisons l'ensemble $\{1, ..., \tilde{m}\}$ en $[S/2]$ intervalles consécutifs $Y_1, ..., Y_{[S/2]}$, l'intervalle Y_h ayant $s_{2h+1} - s_{2h}$ termes. Notons y_h le plus petit élément de Y_h. Pour $j \in X_h$, le j-ième terme de $\tilde{A}_{\lambda,\epsilon}$ est $\lambda_{j+s_{2h-1}-x_h}/2 + 2r + 1 - j - s_{2h-1} + x_h$. D'après (1) et (2), c'est aussi $\tilde{\alpha}_j + \tilde{A} + 2 - 2j$. De même, pour $j \in Y_h$, le j-ième terme de $\tilde{B}_{\lambda,\epsilon}$ est $\lambda_{j+s_{2h}-y_h}/2 + 2r + 1 - j - s_{2h} + y_h$. D'après (1) et (2), c'est aussi $\tilde{\beta}_j + \tilde{B} + 2 - 2j$. L'ordre $<_{\tilde{I}}$ est tel que, pour $i \in X_h$ et $j \in Y_k$, on a $(i, 0) <_{\tilde{I}} (j, 1)$ si et seulement si $h \leq k$. En particulier, $(1, 0) <_{\tilde{I}} (1, 1)$ et l'élément $(\tilde{\alpha}^{max}, \tilde{\beta}^{max})$ est construit à l'aide du procédé (a). Les suites d'indices associées à ce procédé sont $x_1 = 1, ..., x_{[(S+1)/2]}$ et $y_1 = 1, ..., y_{[S/2]}$ et on obtient

$$(4) \qquad \tilde{\alpha}_1^{max} = (\sum_{h=1,...,[(S+1)/2]} \tilde{\alpha}_{x_h}) + (\sum_{h=1,...,[S/2]} \tilde{\beta}_{y_h}).$$

On sait d'après 1.3(1) que $\tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A}$ est le plus grand élément de $p\Lambda^{\tilde{n},\tilde{m}}_{\tilde{A},\tilde{B};2}(\tilde{\alpha}^{max}, \tilde{\beta}^{max})$. En fait, cet élément intervient avec multiplicité 1 dans cette partition. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $\tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A} > \tilde{\beta}_1^{max} + \tilde{B}$. Or, d'après 1.2(3), $\tilde{\beta}_1^{max}$ est majoré par le terme μ_1 issu du procédé (b) appliqué à $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. D'après 1.2(4), on a $\mu_1 = \tilde{\alpha}_1^{max} - \tilde{\alpha}_1$. Donc

$$\tilde{\beta}_1^{max} + \tilde{B} \leq \tilde{\alpha}_1^{max} - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{B} \leq (\tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A}) - (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{A}) + (\tilde{\beta}_1 + \tilde{B}) < \tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A}$$

puisque $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{A} > \tilde{\beta}_1 + \tilde{B}$. Cela démontre l'assertion. D'après (2), $\tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A}$ est aussi l'unique élément maximal de $A_{\lambda^{max},\epsilon^{max}} \sqcup B_{\lambda^{max},\epsilon^{max}}$. On ne sait pas encore que λ^{max} a tous ses termes pairs. Mais à l'aide de 5.1(a) et 5.1(b), on vérifie les propriétés suivantes, valables pour tout $(\mu, \tau) \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N)$:

si μ_1 est pair, $A_{\mu,\tau} \sqcup B_{\mu,\tau}$ a un unique élément maximal, qui est $\mu_1/2+2r$; il intervient dans $A_{\mu,\tau}$ si $\tau_{\mu_1} = 1$ et dans $B_{\mu,\tau}$ si $\tau_{\mu_1} = -1$;

si μ_1 est impair, l'élément maximal de $A_{\mu,\tau} \sqcup B_{\mu,\tau}$ intervient avec multiplicité 2.

Ceci entraîne que λ_1^{max} est pair et égal à $2(\tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A} - 2r)$. Puisqu'il intervient dans $\tilde{A}_{\alpha^{max},\beta^{max}} = \tilde{A}_{\lambda^{max},\epsilon^{max}}$, on voit en se reportant à la définition de cet ensemble que $\epsilon^{max}_{\lambda_1^{max}} = \epsilon(1)$. Calculons λ_1^{max} en utilisant l'égalité (4). Avec les formules ci-dessus, on a $\tilde{\alpha}_{x_h} = \lambda_{s_{2h-1}}/2 + 2r + 1 - s_{2h-1} - \tilde{A} - 2 + 2x_h$, $\tilde{\beta}_{y_h} = \lambda_{s_{2h}}/2 + 2r + 1 - s_{2h} - \tilde{B} - 2 + 2y_h$. D'où

$$\tilde{\alpha}_1^{max} = (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}/2) - (\sum_{h=1,\dots,S} s_h) + 2(\sum_{h=1,\dots,[(S+1)/2]} x_h) + 2(\sum_{h=1,\dots,[S/2]} y_h)$$

$$+S(2r+1) - [(S+1)/2](\tilde{A}+2) - [S/2](\tilde{B}+2).$$

Puisque X_h a $s_{2h} - s_{2h-1}$ termes, on a $x_{h+1} - x_h = s_{2h} - s_{2h-1}$, en posant par convention $x_{[(S+1)/2]+1} = \tilde{n} + 1$. De même, $y_{h+1} - y_h = s_{2h+1} - s_{2h}$, en posant par convention $y_{[S/2]+1} = \tilde{m} + 1$. On en déduit aisément $s_{2h-1} = x_h + y_h - 1$ et $s_{2h} = x_{h+1} + y_h - 1$. Puis

$$\sum_{h=1,\dots,S} s_h = 2(\sum_{h=1,\dots,[(S+1)/2]} x_h) + 2(\sum_{h=1,\dots,[S/2]} y_h) + \begin{cases} \tilde{n} - S, & \text{si } S \text{ est pair;} \\ \tilde{m} - S, & \text{si } S \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'où

$$\tilde{\alpha}_1^{max} = (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}/2) + S(2r+1) - [(S+1)/2](\tilde{A}+2) - [S/2](\tilde{B}+2) + \begin{cases} S - \tilde{n}, & \text{si } S \text{ est pair;} \\ S - \tilde{m}, & \text{si } S \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'après 6.3(1), S est impair, resp. pair, si $\epsilon(1) = 1$, resp. $\epsilon(1) = -1$. En distinguant les différents cas $\epsilon(1) = \pm 1$, k est pair ou impair, on déduit par calcul de la formule ci-dessus l'égalité

$$2(\tilde{\alpha}_1^{max} + \tilde{A} - 2r) = (\sum_{h=1,\dots,S} \lambda_{s_h}) + \begin{cases} S - 1 - 2\tilde{m}, & \text{si } \epsilon(1) = 1 \\ S - 2\tilde{m}, & \text{si } \epsilon(1) = -1. \end{cases}$$

L'entier $\tilde{m}$ est le nombre d'éléments de $\tilde{B}_{\lambda,\epsilon}$, c'est-à-dire celui de $B_{\lambda,\epsilon}$ si $\epsilon(1) = 1$, de $A_{\lambda,\epsilon}$ si $\epsilon(1) = -1$. Ces derniers sont $|J^b|$, resp. $|J^a|$. Le terme de droite de l'égalité ci-dessus est le nombre noté $\bar{\lambda}_1$ en 6.1. D'où $\lambda_1^{max} = \bar{\lambda}_1$. On a aussi montré plus haut que $\epsilon^{max}_{\lambda_1^{max}} = \epsilon(1) = \bar{\epsilon}_{\bar{\lambda}_1}$.

Si $\lambda_1^{max} = 2N$, λ^{max} est entièrement déterminé et coïncide avec l'élément $\bar{\lambda}$ de 6.1. Supposons désormais $\lambda_1^{max} < 2N$. Le procédé (a) que l'on a appliqué à $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ a créé le terme $\tilde{\alpha}_1^{max}$. Il crée aussi un couple de partitions, notons-le $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_{\mathbf{n}} \times \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$. D'après la preuve du théorème 5.5, l'ensemble $P_{\tilde{A}-2,\tilde{B};2}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ a un unique élément, notons-le (ν, μ). On a

$$\tilde{\alpha}^{max} = \{\tilde{\alpha}_1^{max}\} \sqcup \nu \sqcup \{0^{\tilde{n}-\mathbf{n}-1}\},\ \tilde{\beta}^{max} = \mu \sqcup \{0^{\tilde{m}-\mathbf{m}}\}.$$

D'où

$$\tilde{A}_{\lambda^{max},\epsilon^{max}} = \{\lambda_1^{max}/2 + 2r\} \sqcup ((\nu \sqcup \{0^{\tilde{n}-\mathbf{n}-1}\}) + [\tilde{A} - 2, \tilde{A} + 2 - 2\tilde{n}]_2), \tag{5}$$

$$\tilde{B}_{\lambda^{max},\epsilon^{max}} = (\mu \sqcup \{0^{\tilde{m}-\mathbf{m}}\}) + [\tilde{B}, \tilde{B}+2-2\tilde{m}]_2.$$

En 6.1, on a introduit l'entier $N' = N - \bar{\lambda}_1/2 = N - \lambda_1^{max}/2$ et un élément $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N')$. On peut représenter λ' comme une partition à $2r+1-S$ termes mais, pour faire bonne mesure, on adjoint des termes nuls et on le représente comme une partition à $2r'+1$ termes, avec $2r'+1 > 2r+1-S$. On pose $k' = k(\lambda', \epsilon')$. Avec l'égalité 6.4(2) et les relations $k = sup(2M, -2M-1)$, $k' = sup(2M', -2M'-1)$, on calcule facilement

$$(6) \qquad k' = \begin{cases} k-1, & \text{si } \epsilon(1)(-1)^k = 1 \text{ et } k \neq 0, \\ k+1, & \text{si } \epsilon(1)(-1)^k = -1, \\ 0, & \text{si } \epsilon(1) = 1 \text{ et } k = 0. \end{cases}$$

On introduit les entiers $n' = r' + [k'/2] + 1$, $m' = r' - [k'/2]$, $A' = 2r' + k'$, $B' = 2r' - k' - 1$ et le couple de partitions $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_2(N' - k'(k'+1)/2)$ correspondant à (λ', ϵ'). Fixons un signe $u' \in \{\pm 1\}$. En utilisant ce signe et l'entier k', on construit comme au début du paragraphe des entiers $\tilde{n}'$, $\tilde{m}'$, $\tilde{A}'$, $\tilde{B}'$ et des partitions $\tilde{A}_{\lambda',\epsilon'}$, $\tilde{B}_{\lambda',\epsilon'}$, $\tilde{\alpha}'$, $\tilde{\beta}'$. On choisit $u' = -u = -\epsilon(1)$.

A l'aide de (6) et d'un calcul cas par cas, on voit que

(7) $\tilde{A}' = \tilde{A} + 2r' - 2r - 1, \ \tilde{B}' = \tilde{B} + 2r' - 2r + 1.$

Montrons que

(8) $\tilde{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} \sqcup \{0^{\tilde{n}'-\mathbf{n}}\}$, $\tilde{\beta}' = \boldsymbol{\beta} \sqcup \{0^{\tilde{m}'-\mathbf{m}}\}$,

ce qui, d'après l'analogue de (2), équivaut à

(9) $\tilde{A}_{\lambda',\epsilon'} = (\boldsymbol{\alpha} \sqcup \{0^{\tilde{n}'-\mathbf{n}}\}) + [\tilde{A}', \tilde{A}'+2-2\tilde{n}']_2$, $\tilde{B}_{\lambda',\epsilon'} = (\boldsymbol{\beta} \sqcup \{0^{\tilde{m}'-\mathbf{m}}\}) + [\tilde{B}', \tilde{B}'+2-2\tilde{m}']_2$.

On a

$$(10) \qquad \tilde{A}_{\lambda',\epsilon'} = \{\lambda'_j/2 + 2r' + 1 - j; j = 1, ..., 2r'+1, \epsilon'(j)(-1)^j = \epsilon(1)\}$$

$$= \{\lambda'_j/2 + 2r' + 1 - j; j = 1, ..., 2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j = \epsilon(1)\} \cup \{j \in [2r'-2r+S-1, 0]_1; (-1)^j = \epsilon(1)\};$$

$$\tilde{B}_{\lambda',\epsilon'} = \{\lambda'_j/2 + 2r' + 1 - j; j = 1, ..., 2r'+1, \epsilon'(j)(-1)^j = -\epsilon(1)\}$$

$$= \{\lambda'_j/2 + 2r' + 1 - j; j = 1, ..., 2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j = -\epsilon(1)\} \cup \{j \in [2r'-2r+S-1, 0]_1; (-1)^j = -\epsilon(1)\}.$$

Un calcul cas par cas montre que les contributions des termes complémentaires correspondant aux 0 que l'on ajoute à nos partitions coïncident dans les deux membres des égalités (9). C'est-à-dire que

$$(11) \qquad \{j \in [2r'-2r+S-1, 0]_1; (-1)^j = \epsilon(1)\} = [\tilde{A}' - \mathbf{n}, \tilde{A}' + 2 - 2\tilde{n}']_2,$$

$$\{j \in [2r'-2r+S-1, 0]_1; (-1)^j = -\epsilon(1)\} = [\tilde{B}' - \mathbf{m}, \tilde{B}' + 2 - \tilde{m}']_2.$$

Pour $j \in \{1, ..., 2r+1-S\}$, on a $j + h(j) \in \{s_{h(j)} + 1, ..., s_{h(j)+1} - 1\}$ et $\epsilon'(j) = \epsilon(j + h(j))(-1)^{h(j)+1}$ par définition. La condition $\epsilon'(j)(-1)^j = \epsilon(1)$ équivaut à $\epsilon(j + h(j))(-1)^{j+h(j)+1} = \epsilon(1)$, dont on sait d'après 6.3(1) qu'elle équivaut à $h(j)$ impair. En reprenant la définition de λ'_j, on voit qu'alors $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)}$. On en déduit

$$\{\lambda'_j/2 + 2r' + 1 - j; j = 1, ..., 2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j = \epsilon(1)\} =$$

$$\cup_{h=1,...,[(S+1)/2]} \{\lambda_j/2 + 2r' - j + 2h; j \in \{s_{2h-1} + 1, ..., s_{2h} - 1\}\}.$$

La condition $\epsilon'(j)(-1)^j = -\epsilon(1)$ équivaut à $\epsilon(j + h(j))(-1)^{j+h(j)+1} = -\epsilon(1)$, dont on sait d'après 6.3(1) qu'elle équivaut à $h(j)$ pair. En reprenant la définition de λ'_j, on voit qu'alors $\lambda'_j = \lambda_{j+h(j)} + 2$. On en déduit

$$\{\lambda'_j/2 + 2r' + 1 - j; j = 1, ..., 2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j = -\epsilon(1)\} =$$

$$\cup_{h=1,...,[S/2]}\{\lambda_j/2+2r'-j+2h+2; j\in\{s_{2h}+1,...,s_{2h+1}-1\}\}.$$

On a donné plus haut les formules exprimant les termes $\tilde{\alpha}_j+\tilde{A}+2-2j$ et $\tilde{\beta}_j+\tilde{B}+2-2j$ en fonction des $\lambda_j/2+2r+1-j$. On traduit alors :

$$\{\lambda'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j=\epsilon(1)\}=$$

$$\cup_{h=1,...,[(S+1)/2]}\{\tilde{\alpha}_j+\tilde{A}-2j+2r'-2r+2h+1; j\in\{x_h+1,...,x_{h+1}-1\}\},$$

$$\{\lambda'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j=-\epsilon(1)\}=$$

$$\cup_{h=1,...,[S/2]}\{\tilde{\beta}_j+\tilde{B}-2j+2r'-2r+2h+3; j\in\{y_h+1,...,y_{h+1}-1\}\}.$$

Par définition de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, on a $\tilde{\alpha}_j=\boldsymbol{\alpha}_{j-h}$ pour $j\in\{x_h+1,...,x_{h+1}-1\}$ et $\tilde{\beta}_j=\boldsymbol{\beta}_{j-h}$ pour $j\in\{y_h+1,...,y_{h+1}-1\}$. On obtient

$$\{\lambda'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j=\epsilon(1)\}=\boldsymbol{\alpha}+[\tilde{A}+2r'-2r-1, \tilde{A}+2r'-2r+1-2\mathbf{n}]_2,$$

$$\{\lambda'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j=-\epsilon(1)\}=\boldsymbol{\beta}+[\tilde{B}+2r'-2r+1, \tilde{B}+2r'-2r+3-2\mathbf{m}]_2.$$

D'où, en utilisant (7),

$$\{\lambda'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j=\epsilon(1)\}=\boldsymbol{\alpha}+[\tilde{A}', \tilde{A}'+2-2\mathbf{n}]_2, \tag{12}$$

$$\{\lambda'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r+1-S, \epsilon'(j)(-1)^j=-\epsilon(1)\}=\boldsymbol{\beta}+[\tilde{B}', \tilde{B}'+2-2\mathbf{m}]_2.$$

En rassemblant (10), (11) et (12), on obtient (9), d'où (8).

Introduisons l'élément $(\lambda'^{max}, \epsilon'^{max})\in\boldsymbol{\mathcal{P}^{symp}}(2N')_{k'}$. D'après la preuve du théorème 5.5, il y a unique élément $(\alpha'^{max}, \beta'^{max})$ dans $P_{A',B';2}(\alpha',\beta')$ et c'est le couple correspondant à $(\lambda'^{max}, \epsilon'^{max})$. On définit comme ci-dessus les partitions $\tilde{\alpha}'^{max}$, $\tilde{\beta}'^{max}$, $\tilde{A}_{\alpha'^{max},\beta'^{max}}$, $\tilde{B}_{\alpha'^{max},\beta'^{max}}$, $\tilde{A}_{\lambda'^{max},\epsilon'^{max}}$, $\tilde{B}_{\lambda'^{max},\epsilon'^{max}}$, relatives à l'entier k' et au signe $u'=-\epsilon(1)$. On a l'analogue de la relation (3), c'est-à-dire

(13) $\tilde{A}_{\lambda'^{max},\epsilon'^{max}}=\tilde{A}_{\alpha'^{max},\beta'^{max}}$, $\tilde{B}_{\lambda'^{max},\epsilon'^{max}}=\tilde{B}_{\alpha'^{max},\beta'^{max}}$.

A ce point, on applique par récurrence la proposition 6.2 au couple (λ',ϵ') : on a l'égalité $(\lambda'^{max}, \epsilon'^{max})=(\bar{\lambda}', \bar{\epsilon}')$. En se rappelant que $u'=-\epsilon(1)$, on calcule

$$\tilde{A}_{\bar{\lambda}',\bar{\epsilon}'}=\{\bar{\lambda}'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r'+1, \bar{\epsilon}'(j)(-1)^j=\epsilon(1)\},$$

$$\tilde{B}_{\bar{\lambda}',\bar{\epsilon}'}=\{\bar{\lambda}'_j/2+2r'+1-j; j=1,...,2r'+1, \bar{\epsilon}'(j)(-1)^j=-\epsilon(1)\}.$$

Par construction, $\bar{\lambda}'_j=\bar{\lambda}_{j+1}$ et $\bar{\epsilon}'(j)=\bar{\epsilon}(j+1)$. A l'aide de ces formules, (13) se récrit

$$\tilde{A}_{\alpha'^{max},\beta'^{max}}=\{\bar{\lambda}_j/2+2r'+2-j; j=2,...,2r'+2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1}=\epsilon(1)\}, \tag{14}$$

$$\tilde{B}_{\alpha'^{max},\beta'^{max}}=\{\bar{\lambda}_j/2+2r'+2-j; j=2,...,2r'+2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1}=-\epsilon(1)\}.$$

Montrons que

(15) on a les égalités $\tilde{\alpha}'^{max}=\nu\sqcup\{0^{\tilde{n}'-\mathbf{n}}\}$, $\tilde{\beta}'^{max}=\mu\sqcup\{0^{\tilde{m}'-\mathbf{m}}\}$.

Le couple $(\tilde{\alpha}'^{max}, \tilde{\beta}'^{max})$ est l'unique élément de $P_{\tilde{A}',\tilde{B}';2}(\tilde{\alpha}',\tilde{\beta}')$ tandis que (ν,μ) est l'unique élément de $P_{\tilde{A}-2,\tilde{B};2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. Pour tout $c\in\mathbb{N}$, on a l'égalité $P_{\tilde{A}-2,\tilde{B};2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=P_{\tilde{A}-2+c,\tilde{B}+c;2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$: cela résulte simplement de la construction de ces ensembles. En prenant $c=2r'-2r+1$ et en utilisant (7), on obtient que (ν,μ) est aussi l'unique élément de $P_{\tilde{A}',\tilde{B}';2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. En tenant compte de (8), l'assertion (15) résulte du lemme 2.5, pourvu que les hypothèses de ce lemme soient vérifiées pour l'ensemble d'indice

$\tilde{I}' = (\{1, ..., \tilde{n}'\} \times \{0\}) \cup (\{1, ..., \tilde{m}'\} \times \{1\})$ et les entiers $\mathbf{n} \leq \tilde{n}'$ et $\mathbf{m} \leq \tilde{m}'$. Il s'agit de voir que

$$\tilde{\alpha}'_{\mathbf{n}} + \tilde{A}' + 2 - 2\mathbf{n} > \tilde{B}' - 2\mathbf{m}$$

et

$$\tilde{\beta}'_{\mathbf{m}} + \tilde{B}' + 2 - 2\mathbf{m} > \tilde{A}' - 2\mathbf{n}.$$

Or il résulte de la preuve de (9) ci-dessus que les termes de gauche sont de la forme $\lambda'_j + 2r' + 1 - j$ pour un $j \leq 2r + 1 - S$ tandis que les termes de droite sont de la forme $\lambda'_j + 2r' + 1 - j$ pour un $j > 2r + 1 - S$. Les inégalités cherchées s'ensuivent, d'où (15).

Il résulte de (7) et (15) que $(\nu \sqcup \{0^{\tilde{n}-\mathbf{n}-1}\}) + [\tilde{A} - 2, \tilde{A} + 2 - 2\tilde{n}]_2$ est l'ensemble des $\tilde{n} - 1$ plus grands termes de $\tilde{A}_{\alpha'^{max}, \beta'^{max}}$, auxquels on ajoute $2r - 1 - 2r'$ et que $(\mu \sqcup \{0^{\tilde{m}-\mathbf{m}}\}) + [\tilde{B}, \tilde{B} + 2 - 2\tilde{m}]_2$ est l'ensemble des $\tilde{m}$ plus grands termes de $\tilde{B}_{\alpha'^{max}, \beta'^{max}}$, auxquels on ajoute $2r - 1 - 2r'$. Grâce à (14), on obtient que $(\nu \sqcup \{0^{\tilde{n}-\mathbf{n}-1}\}) + [\tilde{A} - 2, \tilde{A} + 2 - 2\tilde{n}]_2$ est l'ensemble des $\tilde{n} - 1$ plus grands termes de $\{\bar{\lambda}_j/2 + 2r + 1 - j; j = 2, ..., 2r' + 2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = \epsilon(1)\}$ tandis que $(\mu \sqcup \{0^{\tilde{m}-\mathbf{m}}\}) + [\tilde{B}, \tilde{B} + 2 - 2\tilde{m}]_2$ est l'ensemble des $\tilde{m}$ plus grands termes de $\{\bar{\lambda}_j/2 + 2r + 1 - j; j = 2, ..., 2r' + 2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = -\epsilon(1)\}$. Remarquons que dans ce dernier ensemble, on peut aussi bien fair varier j de 1 à $2r' + 2$: le terme $j = 1$ ne vérifie pas la condition $\bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = -\epsilon(1)$ puisque $\bar{\epsilon}(1) = \epsilon(1)$ par définition. On utilise (5) en se rappelant que l'on a déjà démontré l'égalité $\lambda_1^{max} = \bar{\lambda}_1$. Alors $\tilde{A}_{\lambda^{max}, \epsilon^{max}}$ est l'ensemble des $\tilde{n}$ plus grands termes de $\{\bar{\lambda}_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r' + 2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = \epsilon(1)\}$ et $\tilde{B}_{\lambda^{max}, \epsilon^{max}}$ est l'ensemble des $\tilde{m}$ plus grands termes de $\{\bar{\lambda}_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r' + 2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = -\epsilon(1)\}$.

Représentons $\bar{\lambda}$ comme une partition à $2r+1$ termes. On a prouvé en 6.4 que $k(\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}) = k$. On peut donc définir les partitions $\tilde{A}_{\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}}$ et $\tilde{B}_{\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}}$ relatives à r, k et au signe $u = \epsilon(1)$. On a $\tilde{A}_{\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}} = \{\bar{\lambda}_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r + 1, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = \epsilon(1)\}$ et, par construction, cette partition a $\tilde{n}$ termes. Donc $\tilde{A}_{\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}}$ est l'ensemble des $\tilde{n}$ plus grands termes de $\{\bar{\lambda}_j/2 + 2r + 1 - j; j = 1, ..., 2r' + 2, \bar{\epsilon}(j)(-1)^{j+1} = \epsilon(1)\}$, autrement dit

$$\tilde{A}_{\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}} = \tilde{A}_{\lambda^{max}, \epsilon^{max}}.$$

De la même façon,

$$\tilde{B}_{\bar{\lambda}, \bar{\epsilon}} = \tilde{B}_{\lambda^{max}, \epsilon^{max}}.$$

Mais ces égalités équivalent à l'égalité $(\lambda^{max}, \epsilon^{max}) = (\bar{\lambda}, \bar{\epsilon})$. Cela achève la démonstration de la proposition 6.2. $\square$

Références

[1] G. Lusztig : *Character sheaves V*, Adv. in Math. 61 (1986), p. 103-155

[2] G. Lusztig : *Cuspidal local systems and graded algebras III*, Represent. Th. 6 (2002), p. 202-242

[3] I. G. Macdonald : *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford math. monographs, Oxford University Press 1979

[4] T. Shoji : *Green functions associated to complex reflection groups*, J. of Algebra 245 (2001), p. 650-694

[5] J.-L. Waldspurger : *Représentations de réduction unipotente pour $SO(2N+1)$: quelques conséquences d'un article de Lusztig*, in *Contributions to automorphic forms, geometry and number theory*, H. Hida, R. Ramakrishnan, F. Shahidi ed., The Johns Hopkins University Press 2004, p. 803-910

CNRS-Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG
4 place Jussieu
750005 Paris
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr