

McKendrick方程随着移民的渐近行为

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

摘要

本文的目的是讨论数学模型中移民对人口年龄结构演变的影响。在亚临界情况下，年龄结构收敛到静止状态。我们提供了一个模拟模型的程序，该程序用于法国人口的预测。我们还坚持与更复杂的模型建立联系。

关键词：人口统计学，人口结构，移民，偏微分方程，拉普拉斯变换

1. 简介

我们将人口分为 K 个子群体 ($K \geq 1$)。变量 x 和 t 代表年龄和时间。

- $P_k(x, t)$ 是在时间 t 的年龄 x 的子种群 k 的密度。
- $M_k(x) \geq 0$ 代表年龄 x 的人的到来 X 谁进入亚群 k 和来自另一个人口。
- $B_{k,l}(x) \geq 0$ 是子种群 l 生育 k 型个体的生育力。
- $P_k^0(x)$ 是子种群 k 的初始年龄结构。

我们定义

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

我们猜测 $B(x) = 0$ 对于所有 x 都足够大。 $d_k(x) \geq 0$ 是子种群 k 中的个体离开人口的比率。对于 $k \neq l$, $\tau_{k,l}(x) \geq 0$ 是个体从子种群 l 转移到子种群 k 的速率。我们定义

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$
$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

和 $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ 。 $P(x, t)$ 是麦肯德里克方程的唯一解决方案

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

此外, $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ 。考虑矩阵

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x)S(0, x)dx,$$

与

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

和 $S(\xi, \xi) = I$ (大小为 K 的恒等矩阵)。我们假设的光谱半径 $\rho \hat{G}(0)$ 严格小于1。我们定义

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x)M(u)du dx,$$

$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L.$$

然后我们有

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x)M(u)du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

换句话说, 年龄金字塔 $x \mapsto P_k(x, t)$ 如果收敛到稳态 $t \rightarrow +\infty$ 。

这些结果在第2节中得到了证明。 $P(x, t)$ 回到积分方程式

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$ 和 $G(x)$ 是已知功能。Lotka (1939) 在方程 ($K = 1$)。对于方程组 ($K > 1$)，Bellman and Cooke (1963) 研究了 $\int_0^\infty G(x) dx$ 是一个不可约矩阵 (就Perron和Frobenius正矩阵理论而言)。克鲁普 (1970和1971) 研究了可约的情况。这些研究集中于以下情况： $F(t) \rightarrow 0$ 如果 $t \rightarrow \infty$ 。在我们的模型中，McKendrick方程中的不均匀项迁移意味着 $F(t)$ 具有非零限制，如果 $t \rightarrow \infty$ 。如果减去稳态，则非齐次问题将简化为齐次问题，对此我们可以将结果应用于存在性和渐近行为。但是，我们建议在下面的演示中获得第二个结果 ($P(x, t) \geq 0$) 并且由于亚临界假设 $\rho < 1$ ，证明非常简单。无需区分可还原案例和不可还原案例。

在第3节中，我们提供了三个模拟人口的示例。在每个示例中， $M(x)$ 代表移民和 $d_k(x)$ 死亡率，其中还可能包括移民率。在第三个示例中 $\tau_{k,l}(x)$ 代表外国人国籍的变化率。第4节介绍了一个程序，该程序使用来自法国的数据模拟了该模型及其在三个示例中的应用。在第5节中，我们使用Arino和Smith (1998) 研究的更复杂的模型进行链接。较复杂的模型可以更好地表示实际人口。但是，由于缺少前几部分中有关人群的数据，因此涉及难以估计的参数。结论表明基本模型 (1) - (2) - (3) 如何应用于动物种群。这些方程式具有不同的含义。

最后，让我们提及一些关于移民模型的研究。Barbu, Iannelli和Martcheva (2001) 研究了按年龄选择的移民对人口年龄结构的可控性。在Alvarado和Creedy (1998) 中，存在离散模型。

2.结果证明

公式化为积分方程

一阶线性偏微分方程组沿着特性曲线简化为普通的一阶线性微分方程组。因此，我们有

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

我们定义 $\Phi(t) = P(0, t)$ 。我们有

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

它从用于获得公式如下 $X >$ 吨和 $X <$ 吨那 $\Phi(x, t)$ 是积分方程的解

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$ 是矩阵

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$ 是向量

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

方程 (1) 有一个独特的解决方案，可以从逐次逼近法中看出 (Bellman and Cooke, 1963)。因此，初始偏微分方程也具有唯一的解。但是， Δ 对角线上的元素为正或零，而对角线之外的元素为负或零。这意味着如果 $a \leq b$ ， $S(a, b)$ 是具有正或零系数的矩阵 (Berman和Plemmons, 1994年, 第6章第3.12节)。所以我们有 $F(t) \geq 0$ 和 $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ 。根据逐次逼近法 $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ 。根据 (5) 和 (6)， $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ 。这证明了前两个结果。

拉普拉斯变换

$\xi_0(\Phi)$ 是最小的实数，因此以下向量积分是绝对收敛的

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > \xi_0.$$

它是 Φ 的Laplace变换。我们定义 $\xi_0(F)$ 和 $\xi_0(G)$ 以同样的方式。 $B(x)$ 是支持紧凑的功能。 $G(x)$ 因此，它也是具有紧凑支撑的功能，并且 $\xi_0(G) = -\infty$ 。所以我们有

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

I 是大小为 K 的恒等矩阵。然后我们有

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

我们采取 $z \in \mathbb{C}$ 与 $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ 。我们有

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

根据Horn和Johnson (1985, §8.1.18和8.1.19), 我们具有对应的光谱射线

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

和 $I - \hat{G}(z)$ 是可逆的。因此，我们有

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

我们采用拉普拉斯逆变换。我们得到任何实数 $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$ 和 $\forall t > 0$,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

我们定义 $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ 。公式 (8) 给出

$$F(t) = L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

用 $z \in \mathbb{C}$ 和 $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

如果 $L \neq 0$, 则 $z = 0$ 是 \hat{F} 具有最大的实部, L 是 $z = 0$ 时的残基。所以 $z = 0$ 也是 $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$ 具有最大的实部 $R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L$ 是 $z = 0$ 处的残基。应用于 (9) 的残基公式给出

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

如果 $L = 0$, 这仍然成立, 因为那么所有极点 $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$ 在复平面的左半平面中。 $\Phi(t)$ 因此, 如果 $t \rightarrow \infty$ 。在所有情况下, 它均来自于 (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

这是第三个结果。

3.例子

本节中的示例旨在代表人口： $M_k(x)$ 是移民 $d_k(x)$ 死亡。如果有移民，只会改变 $d_k(x)$ 。

第一个例子

人口分为男性 ($k=1$) 和女性 ($k=2$)。我们猜测

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

这意味着分娩的数量取决于女性的数量，而不取决于男性的数量。为了简化公式，假设 $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ 。这种假设意味着新生儿成为男孩或女孩的机会是相等的（实际上，这几乎是正确的）。

因为 B 是一个较高的三角矩阵， $\hat{G}(0)$ 具有相同的结构。所以光谱半径是

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

我们猜测 $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ 。向量 R 很容易计算：

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

然后我们有 $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du. \end{aligned}$$

第二个例子

人口分为在该国出生的男性 ($k=1$)，在该国出生的女性 ($k=2$) 和第一代移民，即男性 ($k=3$) 或女性 ($k=4$)。我们猜测

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

这意味着移民妇女在该国生育孩子的速度与在该国出生的妇女不同。还假设 $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$ 和 $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ 。因为 B 和 $\hat{G}(0)$ 是上三角矩阵，

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$ 不依赖 b_4 。在这种模式下，移民的高生育率无法将亚临界状态转变为超临界状态 ($\rho(\hat{G}(0)) > 1$)。我们猜测 $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ 。向量 R 仍然很容易计算：

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

然后我们有 $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

请注意，如果 $d_1 = d_3$ ， $d_2 = d_4$ 和 $b_2 = b_4$ 也就是说，如果第一代移民立即遵循当地的生育率和死亡率。确实， $P_1 + P_3$ 取代 P_1 和 $P_2 + P_4$ 取代 P_2 。

第三个例子

人口分为国民，男子 ($k=1$) 或妇女 ($k=2$) 以及外国人，男子 ($k=3$) 或妇女 ($k=4$)。我们猜测

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

这意味着外国妇女生了外国孩子，但是外国人可以改变国籍（他们从3或4子类转移到1或2子类）。为了简化，我们假设 $d_1 = d_3$ 和 $d_2 = d_4$ ：外国人的死亡率与国民的死亡率相同。我们还假设 $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$ 和 $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ 。然后我们有

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{aligned} S_{1,1}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du}, & S_{2,2}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_2(u) du}, \\ S_{3,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, & S_{4,4}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} S_{1,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz, \\ S_{2,4}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz. \end{aligned}$$

因此, 我们有

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$ 是上三角矩阵,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dx \right\}.$$

我们猜测 $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ 。矢量 R 仍然很容易计算。我们定义

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx \\ L_4 &= \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx. \end{aligned}$$

我们有 $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$ 和

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4/(1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

最后, 我们有 $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_2(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du \\ P_3(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_4(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du. \end{aligned}$$

请注意, 如果满足以下条件, 则将第三个示例简化为第一个示例 $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$, 即子人口 $\{1,2\}$ 和 $\{3,4\}$ 是否不混合。

4. 软件

为了说明这项研究, 我们编写了一个在 Scilab 环境中运行的程序, 该程序可从 www-rocq.inria.fr/scilab 免费获得用于数值计算的软件。该程序名为 `census.sci`, 可在以下地址找到包含法国数据文件:

www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html。它使用有限差分法求解偏微分方程组。我们选择 $\delta t > 0$ 和 $\delta x > 0$ 。 $P_k^{i,j}$ 是... 的价值 $P_k(x, t)$ 如果 $x = i \delta x$ 和 $t = j \delta t$ 。我们将类似的符号用于 $\Delta_{k,l}$, M_k , $B_{k,l}$ 和 P_k^0 。然后我们有

$$\begin{aligned} P_k^{i,0} &= (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0, \\ P_k^{0,j+1} &= \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^\infty B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0, \\ \frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} &= M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

注意离散化, 与时间相比渐进, 与年龄相比逆行。该方程实际上是对流方程, 因此我们必须考虑特性曲线的方向才能收敛。条件 $\delta t \leq \delta x$ 还必须受到尊重。在节目中, 我们总是 δx 等于一年。

说明

语法如下：

```
census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers)。
```

定义：

- X, K : 正整数
- annees : 正整数或零整数的向量
- gauche, droit: 实数的K列矩阵
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers : 字符串向量
- bindices, dindices : 两列正整数矩阵 $\leq K$
- mindices : 正整数的向量 $\leq K$ 。

含义：

- X : 最大年龄
- K : 子人口数
- annees : 将抽取人口的时间
- gauche, droite : 左侧的线 (分别是右侧的线) 定义的线性组合 (P_1, \dots, P_K) , 在图中的左侧 (分别在右侧) 表示
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers : 包含数据的文件名 ; 这些文件是列向量
- bindices, dindices: 这些矩阵的行给出了矩阵B和 Δ 的非零系数的索引 (行和列), 其值在下式中给出 bfichiers 和 dfichiers。行数 bindices (分别 dindices) 因此等于向量的长度 bfichiers (分别 dfichiers)
- mindices : 向量M的非零系数的索引。该值在 mfichiers。

第一个例子

作为男性和女性人口的初步数据, 我们采用了法国1999年的人口普查结果。生育率和死亡率是根据同一年的数据计算得出的 (Beaume, Doisneau和Vatan, 2001年) : 见图1 (a) 。如果移民为零, 那么

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat', 'femaleddeath.dat'],[],[])
```

给出了图1 (b) , 总体最终收敛到0, 但是速度很慢。

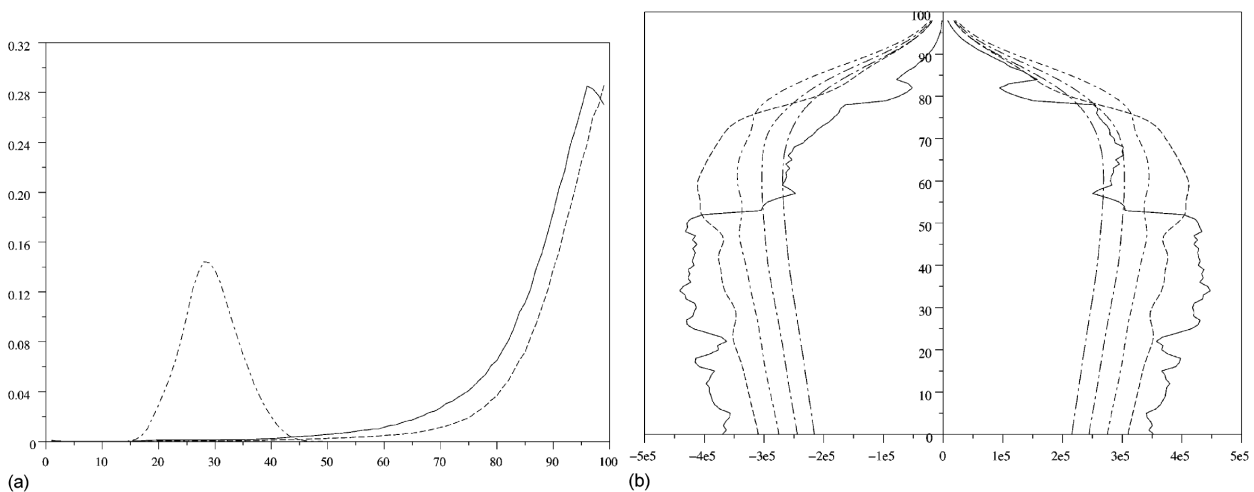


图1. 没有移民。(a) 总出生人数: $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ 。死亡: $x \mapsto d_1(x)$ 和 $x \mapsto d_2(x)$ 。(b) 左: $P_1(x, t)$ 。在右边: $P_2(x, t)$ 。实线: 1999年的情况。虚线: 25、50、75和100年后的预测。

现在包括移民 $M(x)$ 。Dinh (1994) 计算 $M(x)$ 使用两次连续普查的结果以及这两次普查之间的出生和死亡数据。该方法直到1980年代都给出了合理的结果, 但是在1990年至1999年之间, 总移民的数量与人口普查中的误差在同一数量级, 因此计算结果没有得出合理的结果。另一种方法是使用国际移民局 (1999) 的年度数据, 其摘要见图2 (a) 。移民总数是指移民工人, 已获得居

留证的移民和家庭团聚背景下的移民的总和。我们找到了获得居留许可的移民的年龄数据（因此，图2（a）中的阶梯函数），但不适用于家庭团聚的成年人。对于计算，仅图2（a）的外部曲线有用。所以指令

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

产生图2（b）。人口结构缓慢收敛到总人口较少的稳定状态（图中未显示）。

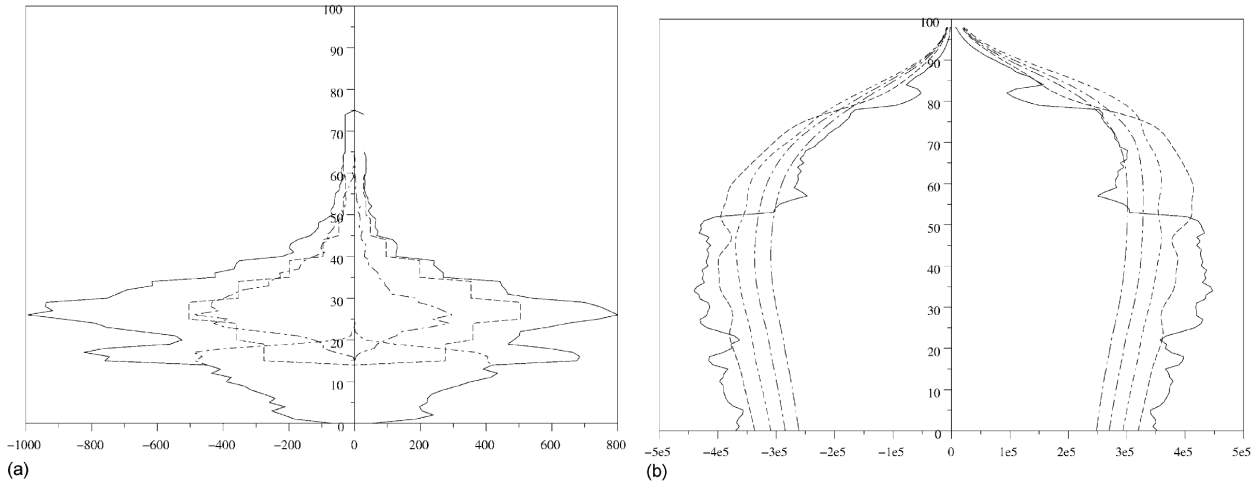


图2.移民的影响。（a）总移民及其三个组成部分。向左转： $x \mapsto M_1(x)$ 。在右边： $x \mapsto M_2(x)$ 。（b）左： $P_1(x,t)$ 。在右边： $P_2(x,t)$ 。实线：1999年的情况。虚线：25、50、75和100年后的预测。

此类型的模型（带有 $K = 2$ ）类似于INSEE使用的离散版本（Brutel, 2001年）。批评这种模式很容易。一方面，我们使用较低的移民数字。另一方面，当前数据用于计算出生率。目前，这个比率很高。部分原因是移民在人口中所占的比例很高，而且移民的生育率比法国高。这使我们得出以下两个模型。

第二个例子

作为法国出生或居住在法国的男性和女性人口的初步数据，我们采用了1999年人口普查的结果（INSEE, 2001年）。我们使用与第一个示例相同的移民资料。要估算生育率，假设有一个数字 $\varepsilon > 0$ 与 $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$ 和 $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$ 对于所有 x 。我们知道外国母亲（或多或少是移民妇女的一部分）所生子女的总数，以及外国妇女的人数。我们获得 $\varepsilon = 0,6$ 。所以

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat' 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

为移民的年龄金字塔生成图3。金字塔迅速收敛（在100年后）到静止状态。

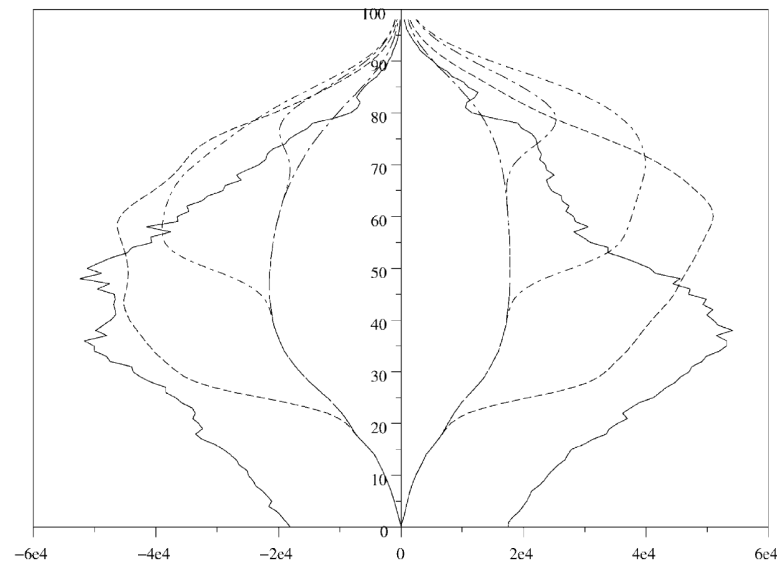


图3.法国出生的人和不同生育率的移民。向左转： $P_3(x,t)$ （移民男人）。在右边： $P_4(x,t)$ （移民妇女）。

第三个例子

作为法国和外国国籍男女人口的初步数据，我们采用了1999年人口普查的结果（INSEE，2001年）。我们使用与第一个示例相同的移民资料。为了估算生育率，我们仍然假设有一个数字 $\varepsilon > 0$ 与 $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$ 和 $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$ 对于所有 x 。知道外国母亲所生子女的总数，我们得到 $\varepsilon = 0,56$ 。对于国籍变化率，假定 $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ 。根据司法部（2001）的数据，我们对 $\tau(x)$ 。参见图4（a）。此估计值总结了三种类型的程序的贡献，也如图4（a）所示：未经正式批准或提前（法国出生的外国孩子在18岁成为公民），根据法令（在印度居住了很长时间的外国人）法国及其子女，并声明（与法国公民结婚）。在仅按年龄组给出年龄结构的所有情况下，我们使用阶梯函数作为近似值。所以指令

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']];
```

为外国人的年龄金字塔生成图4（b）。金字塔在100年后收敛到静止状态。

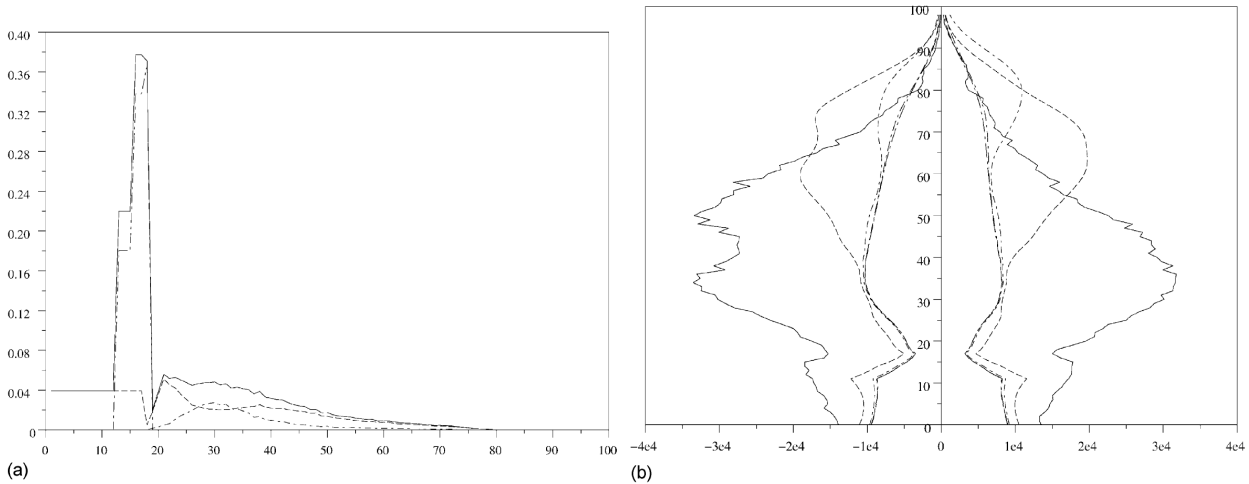


图4.生育率不同的法国人和外国人。（a）获得法国国籍。传输速率 $\tau(x)$ 和3个组件。（b）左： $P_3(x, t)$ （外国人）。在右边： $P_4(x, t)$ （外国妇女）。

比较方式

为了比较不同的模型，图5显示了总人口的预测。最低的曲线是没有移民的曲线。最高的曲线是有移民但没有生育率差异的曲线（第一个例子）。两条非常接近的中间曲线对应于第二个和第三个示例，其中法国出生的人（代表法国公民）与移民（代表外国人）有所区别。后两种模式与第一个移民示例之间的总人口差异在50年后约为70万，在100年后约为250万。

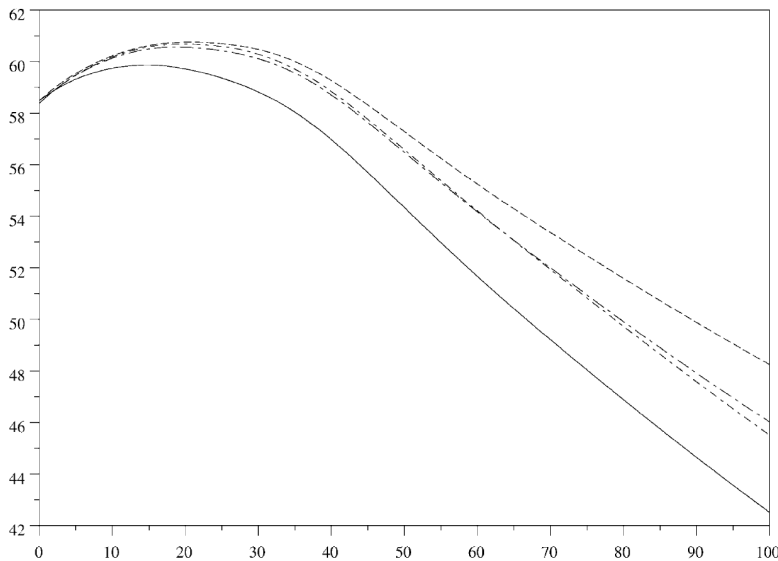


图5.不同假设下的总人口预测（百万）。

5.链接到更复杂的模型

Arino和Smith（1998）研究了一个具有更多变量的更复杂的模型，其概括如下。 K 个子群体中的每一个都分为两个：

- 自出生以来，就有一些人居住在这个亚人群中。 $Q_k(x, t)$ 是它们的密度。

- 以前曾在另一个亚人群中的个人。 $R_k(x, y, t)$ 是时代的这些个体的密度 X 在时间 t 年，谁一直在亚群 k 为 y 年 ($Y < X$)。

新生儿属于第一类，而被转移的个人和移民属于第二类。因此模型

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

矩阵 Δ^Q 和 Δ^R 是对角线和

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

该模型应用于第3部分和第4部分的第三个示例，给出了由八个偏微分方程和边条件组成的系统

- 法国人的出生,
- 通过收购获得法国人,
- 在法国出生的外国人,
- 在国外出生的外国人。

出生和转移矩阵 B^Q , B^R , τ^Q 和 τ^R 具有与第3节相同的形式：例如， $\tau_{1,3}^R$ 和 $\tau_{2,4}^R$ 是的唯一非零系数 τ^R 。该模型可以准确地表示传输速率。几乎所有在法国出生的外国人都将在18岁时成为法国公民。 $\tau_{1,3}^Q(x)$ 和 $\tau_{2,4}^Q(x)$ 因此，如果 $x = 18$ 年，则达到峰值。如果在外国出生的外国人未满18岁，或者在法国居住不到五年（根据法律规定），通常就不能成为法国人。 $\tau_{1,3}^R(x, y)$ 和 $\tau_{2,4}^R(x, y)$ 因此，如果 $x < 18$ 或 $y < 5$ ，则接近零。

尽管模型正确地遵循了演化过程，但是由于数据未知（例如 $R_k^0(x, y)$ 为 $1 \leq k \leq 4$ 。这些数据可能可以通过1999年的人口普查大文件获得，但尚未发布。

解决此问题的一种方法是假设 Δ^R , B^R 和 τ^R 不要依赖 y 。但这或多或少地将复杂模型降低到了3.3节。确实，我们定义

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$ 是系统 (1) - (2) - (3) 的唯一解决方案

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

对于后一种模型，可以使用数据进行计算。结果与图4并没有太大不同。

六、结论

线性模型 (1) - (2) - (3) 对于其他问题（例如鱼类种群）可能有用。亚人群可能不在同一地方。人们可以想象亚诺和史密斯 (1998) 在迁移的不同地点的亚人群。功能 $d_k(x)$ 可能包括钓鱼。 $M_k(x)$ 可能代表从濒临灭绝的物种中重新引进鱼类，例如法国的鲑鱼。

如Hoppensteadt (1975), Webb (1985) 或Cushing (1998), 也可以开发模型的非线性或非均匀版本。

书目参考

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics.

- Journal of Mathematical Analysis and Applications 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
 - Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) Differential – difference Equations. New York : Academic Press.
 - Berman A., Plemmons R. J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
 - Brutel C. (2001) Projections de population à l’horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
 - Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 30, 425 – 434.
 - Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications 31, 517 – 528.
 - Cushing J. M. (1998) An Introduction to Structured Population Dynamics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
 - Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l’horizon 2050. Économie et Statistique 274, 7 – 32.
 - Hoppensteadt F. (1975) Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
 - Horn R. A., Johnson C. R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge : Cambridge University Press.
 - INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
 - Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l’espèce humaine. Paris : Hermann.
 - Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
 - OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
 - Webb G. F. (1985) Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics. New York : Marcel Dekker.