

# Асимптотическое поведение уравнения Маккендрика с иммиграцией

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

## резюме

Целью данной статьи является обсуждение влияния иммиграции в математической модели на эволюцию возрастной структуры населения. В докритическом случае возрастная структура сходится к стационарному состоянию. Мы представляем программу, которая имитирует модель и которая используется для прогнозов для населения Франции. Мы также настаиваем на связи с более сложной моделью.

Ключевые слова: демография, структура населения, иммиграция, уравнения в частных производных, преобразование Лапласа.

## 1. Введение

Мы делим население на  $K$  подгрупп населения ( $K \geq 1$ ). Переменные  $x$  и  $t$  представляют возраст и время.

- $P_k(x, t)$  плотность населения  $k$  возраста  $x$  в момент времени  $t$ .
- $M_k(x) \geq 0$  представляет прибытие людей возраста  $x$ , которые входят в подгруппу  $k$  и прибывают из другого населения.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$  является плодовитостью особей в субпопуляции  $l$ , рождающих особей типа  $k$ .
- $P_k^0(x)$  является исходной возрастной структурой субпопуляции  $k$ .

Мы определяем

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

Мы предполагаем  $B(x) = 0$  для всех  $x$  достаточно большой.  $d_k(x) \geq 0$  скорость, с которой люди в субпопуляции  $k$  покидают население. Для  $K \neq l$ ,  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  скорость перевода особей из субпопуляции  $l$  в субпопуляцию  $k$ . Мы определяем

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

а также  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ ,  $P(x, t)$  является единственным решением уравнений Маккендрика

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

Более того,  $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ , Рассмотрим матрицу

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x) S(0, x) dx,$$

с

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

а также  $S(\xi, \xi) = I$  (единичная матрица размера  $K$ ). Предположим, что спектральный радиус  $\hat{G}(0)$  строго меньше 1. Определяем

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx,$$

$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L.$$

У нас тогда

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

Другими словами, возрастная пирамида  $x \mapsto P_k(x, t)$  сходится к устойчивому состоянию, если  $t \rightarrow +\infty$ ,

Эти результаты продемонстрированы в разделе 2. Изучение асимптотического поведения  $P(x, t)$  возвращается к тому из интегрального уравнения

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$  а также  $G(x)$  являются известными функциями. Эта проблема была изучена Лоткой (1939) в случае уравнения ( $K = 1$ ). Для системы уравнений ( $K > 1$ ) Беллман и Кук (1963) изучили случай, когда  $\int_0^\infty G(x) dx$  является неприводимой матрицей (в смысле теории положительных матриц Перрона и Фробениуса). Крамп (1970 и 1971) изучал приводимый случай. Эти исследования были направлены на случай, когда  $F(t) \rightarrow 0$  если  $t \rightarrow \infty$ . В нашей модели неоднородная миграция членов в уравнениях Маккендрика подразумевает, что  $F(t)$  имеет ненулевой предел, если  $t \rightarrow \infty$ . Если вычесть установившееся состояние, неоднородная задача сведется к однородной задаче, для которой мы можем применить результаты о существовании и асимптотическом поведении. Тем не менее, ниже предлагается демонстрация для получения второго результата. ( $P(x, t) \geq 0$ ) и потому что доказательство довольно просто с докритической гипотезой  $\rho < 1$ . Нет необходимости проводить различие между приводимыми и неприводимыми случаями.

В разделе 3 мы представляем три примера, которые моделируют человеческие популяции. В каждом примере  $M(x)$  представляет иммиграцию и  $d_k(x)$  смертность, которая также может включать уровень эмиграции. В третьем примере  $\tau_{k,l}(x)$  представляет скорость изменения гражданства для иностранцев. В разделе 4 представлена программа, которая имитирует модель и ее применение для трех примеров, используя данные из Франции. В разделе 5 мы устанавливаем связь с более сложной моделью, изученной Арино и Смитом (1998). Более сложная модель лучше представляет реальное население. Однако он включает параметры, которые трудно оценить из-за отсутствия данных о человеческом населении в предыдущих разделах. Заключение показывает, как базовая модель (1) - (2) - (3) может быть применена к популяциям животных. Тогда уравнения приобретают иной смысл.

Наконец, позвольте нам упомянуть некоторые исследования по моделированию иммиграции. Barbu, Iannelli и Martcheva (2001) изучали контролируемость возрастной структуры населения с помощью возрастной иммиграции. В Alvarado и Creedy (1998) существуют дискретные модели.

## 2. Демонстрация результатов

### Формулировка как интегральное уравнение

Система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка вдоль характеристических кривых. У нас есть таким образом

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

Мы определяем  $\Phi(t) = P(0, t)$ , У нас есть

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

Из формул, полученных для  $x > t$  и  $x < t$ , следует, что  $\Phi(x, t)$  является решением интегрального уравнения

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$  это матрица

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$  это вектор

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

Уравнение (1) имеет единственное решение, как видно из метода последовательных приближений (Беллман и Кук, 1963). Таким образом, исходное уравнение в частных производных также имеет единственное решение. Однако элементы на диагонали  $\Delta$  положительны или равны нулю, а элементы вне диагонали отрицательны или равны нулю. Это подразумевает, что если  $a \leq b$ ,  $S(a, b)$  является матрицей с положительными или нулевыми коэффициентами (Berghman and Plemmons, 1994, глава 6, §3.12). Итак, мы имеем  $F(t) \geq 0$  а также  $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ , Согласно методу последовательных приближений,  $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ , Согласно (5) и (6),  $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ , Это демонстрирует первые два результата.

### Преобразование Лапласа

$\xi_0(\Phi)$  наименьшее действительное число такое, что следующий векторный интеграл абсолютно сходится

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \xi_0.$$

Это преобразование Лапласа  $\Phi$ . Мы определяем  $\xi_0(F)$  а также  $\xi_0(G)$  таким же образом.  $B(x)$  это функция, поддержка которой компактна.  $G(x)$  поэтому также функция с компактной поддержкой и  $\xi_0(G) = -\infty$ , Итак, мы имеем

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

$I$  единичная матрица размера  $K$ . У нас тогда

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

Мы принимаем  $z \in \mathbb{C}$  с  $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ , У нас есть

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

Согласно Horn и Johnson (1985, §8.1.18 и 8.1.19), мы имеем для соответствующих спектральных лучей

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

а также  $I - \hat{G}(z)$  обратим. У нас есть таким образом

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

Возьмем обратное преобразование Лапласа. Мы получаем за любой реальный номер  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  а также  $\forall t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

Мы определяем  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ , Формула (8) дает

$$F(t) = L = \int_0^{\infty} B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

С  $z \in \mathbb{C}$  а также  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Если  $L \neq 0$ , то  $z = 0$  является полюсом  $\hat{F}$  с наибольшей действительной частью, а  $L$  - остаток при  $z = 0$ . Таким образом,  $z = 0$  также является полюсом  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  с самой большой реальной частью и  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L$  является остатком при  $z = 0$ . Формула остатка, примененная к (9), дает

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Это остается верным, если  $L = 0$ , потому что тогда все полюсы  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости.  $\Phi(t)$  поэтому сходится к 0, если  $t \rightarrow \infty$ , Во всех случаях это вытекает из (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

Это третий результат.

### 3. Примеры

Примеры в этом разделе предназначены для представления населения:  $M_k(x)$  это иммиграция и  $d_k(x)$  смертность. Если есть эмиграция, только изменения  $d_k(x)$ ,

#### Первый пример

Население делится на мужчин ( $k = 1$ ) и женщин ( $k = 2$ ). Мы предполагаем

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

Это означает, что число рождений зависит от количества женщин, но не от числа мужчин. Для упрощения формул предположим, что  $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ , Это предположение означает, что шансы новорожденного быть мальчиком или девочкой равны (на практике это почти верно).

Поскольку  $B$  является высшей треугольной матрицей,  $\hat{G}(0)$  имеет такую же структуру. Таким образом, спектральный радиус

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Мы предполагаем  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ , Вектор  $R$  легко вычисляется:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

У нас тогда  $\forall x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du. \end{aligned}$$

## Второй пример

Население делится на мужчин, родившихся в стране ( $k = 1$ ), женщин, родившихся в стране ( $k = 2$ ), и иммигрантов первого поколения, мужчин ( $k = 3$ ) или женщин ( $k = 4$ ). Мы предполагаем

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

Это означает, что женщины-иммигранты рожают детей в стране, причем этот показатель отличается от показателя рождаемости женщин в стране. Предположим также, что  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  а также  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ , Потому что  $B$  и  $\hat{G}(0)$  верхние треугольные матрицы,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$  не зависит от  $b_4$ , В этой модели высокий коэффициент рождаемости для иммигрантов не может превратить докритическую ситуацию в сверхкритическую ситуацию ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ ). Мы предполагаем  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ , Вектор  $R$  все еще легко вычисляется:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

У нас тогда  $\forall x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что этот второй пример дает первый пример снова, если  $d_1 = d_3$ ,  $d_2 = d_4$  а также  $b_2 = b_4$  то есть, если иммигранты первого поколения немедленно следуют местным показателям рождаемости и смертности. Верно,  $P_1 + P_3$  Заменяет  $P_1$  а также  $P_2 + P_4$  Заменяет  $P_2$ ,

## Третий пример

Население делится на граждан: мужчин ( $k = 1$ ) или женщин ( $k = 2$ ) и иностранцев, мужчин ( $k = 3$ ) или женщин ( $k = 4$ ). Мы предполагаем

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

Это означает, что женщины-иностранки рожают детей-иностранцев, но иностранцы могут менять свою национальность (они переводятся из группы 3 или 4 в группу 1 или 2). Для упрощения примем  $d_1 = d_3$  а также  $d_2 = d_4$ : смертность иностранцев такая же, как и у граждан. Мы также предполагаем,  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  а также  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ , У нас тогда

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

c

$$S_{1,1}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du},$$

$$S_{3,3}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du},$$

а также

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz,$$

$$S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

У нас есть таким образом

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$  верхняя треугольная матрица,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dx \right\}.$$

Мы предполагаем  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ , Вектор  $R$  все еще легко вычисляется. Мы определяем

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx$$

$$L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

У нас есть  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  а также

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Наконец, у нас есть  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

Обратите внимание, что этот третий пример сводится к первому примеру, если  $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$  то есть, если подгруппы  $\{1,2\}$  и  $\{3,4\}$  не смешиваются.

## 4. Программное обеспечение

Чтобы проиллюстрировать это исследование, мы написали программу, которая работает в среде Scilab, бесплатное программное обеспечение для численных расчетов доступно по адресу [www-gocq.inria.fr/scilab](http://www-gocq.inria.fr/scilab). Программу с именем `sensus.sci` можно найти с файлами, которые содержат данные для Франции, по адресу [www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html](http://www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html). Он решает систему уравнений в частных производных с использованием метода конечных разностей. Мы выбираем  $\delta t > 0$  а также  $\delta x > 0$ ,  $P_k^{i,j}$  это значение  $P_k(x, t)$  если  $x = i \delta x$  а также  $t = j \delta t$ , Мы используем аналогичные обозначения для  $\Delta_{k,l}$ ,  $M_k$ ,  $B_{k,l}$  а также  $P_k^0$ , У нас тогда

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^{\infty} B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Обратите внимание на дискретизацию, прогрессивную по сравнению со временем и ретроградную по сравнению с возрастом. Эти уравнения на самом деле являются уравнениями адвекции, поэтому мы должны учитывать направление характеристических кривых, чтобы иметь сходящуюся схему. Условие  $\delta t \leq \delta x$  также должны соблюдаться. В программе мы всегда брали  $\delta x$  равный одному году.

## объяснение

Синтаксис выглядит следующим образом:

```
census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers),
```

Определения:

- X, K: натуральные числа
- annees: вектор положительных или нулевых целых
- gauche,droit: Матрицы столбцов K действительных чисел
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: векторы символьных строк
- bindices, dindices: две столбцовые матрицы натуральных чисел  $\leq K$
- mindices: вектор натуральных чисел  $\leq K$ ,

Смысл:

- X: максимальный возраст
- K: количество подгрупп населения
- annees: времена, когда население будет привлечено
- gauche, droite: линии слева (соответственно справа) определяют линейные комбинации  $(P_1, \dots, P_K)$ , которые представлены слева (соответственно справа) на рисунке
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: имена файлов, которые содержат данные; эти файлы являются векторами столбцов
- bindices, dindices: строки этих матриц дают индексы (строка и столбец) ненулевых коэффициентов матриц B и Δ, значение которых дано в bfichiers а также dfichiers, Количество строк bindices (Соотв. dindices), таким образом, равна длине вектора bfichiers (Соотв. dfichiers)
- mindices: Индексы ненулевых коэффициентов вектора M. Значение в mfichiers,

## Первый пример

В качестве исходных данных для мужского и женского населения мы берем результаты переписи 1999 года во Франции. Коэффициенты рождаемости и смертности рассчитываются по данным за тот же год (Бомель, Дуано и Ватан, 2001): см. Рисунок 1 (а). Если иммиграция равна нулю, то

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat', 'femaledeath.dat'],[],[])
```

дает рисунок 1 (б), где население в конечном итоге сходится к 0, но довольно медленно.

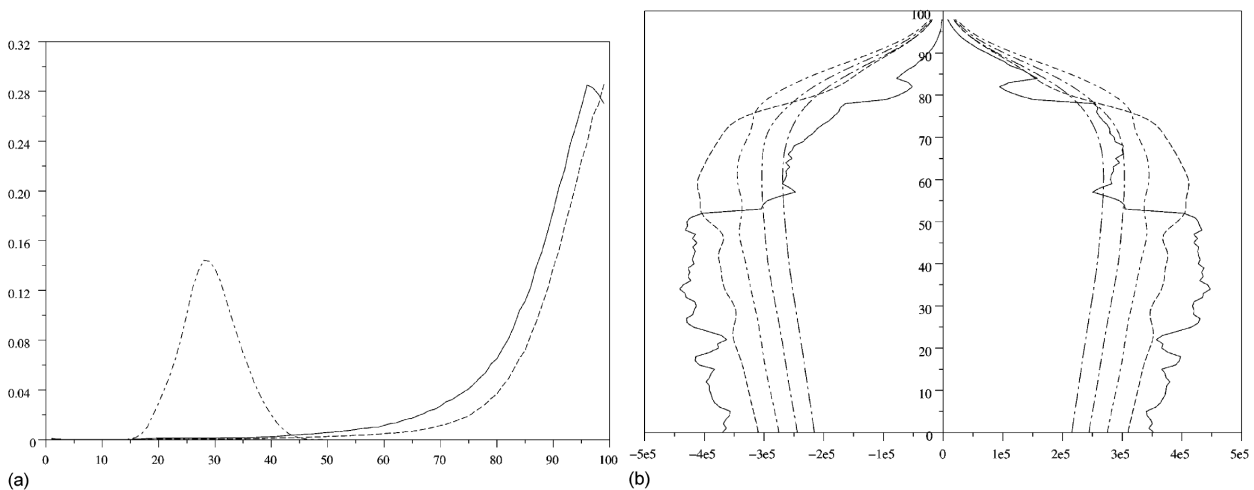


Рисунок 1. Без иммиграции. (а) Всего рождений:  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ , Смертность:  $x \mapsto d_1(x)$  а также  $x \mapsto d_2(x)$ , (б) Слева:  $P_1(x, t)$ , Направо:  $P_2(x, t)$ , Непрерывная линия: ситуация в 1999 году. Пунктирные линии: прогнозы через 25, 50, 75 и 100 лет.

Иммиграция теперь включена  $M(x)$ , Dinh (1994) рассчитано  $M(x)$  используя результаты двух последовательных переписей и данные о рождении и смерти между этими двумя переписями. Этот метод давал разумные результаты вплоть до 1980-х годов. Но в период с 1990 по 1999 год общая иммиграция была того же порядка, что и ошибки в переписях, поэтому расчеты не дали разумного результата. Другой метод заключается в использовании годовых данных Управления по международной миграции (1999), которые обобщены на рисунке 2 (а). Общая иммиграция - это сумма рабочих-иммигрантов, иммигрантов, которые получили вид на жительство, и иммигрантов в контексте воссоединения семьи. Мы нашли данные по возрасту для иммигрантов, которые получили вид на жительство (следовательно, функция лестницы на рисунке 2 (а)), но не для взрослых в контексте воссоединения семьи. Для расчетов пригодны только внешние кривые на рисунке 2 (а). Итак, инструкция

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

производит рисунок 2 (б). Структура населения медленно сходится к устойчивому состоянию с небольшой общей численностью населения (не показано на рисунке).

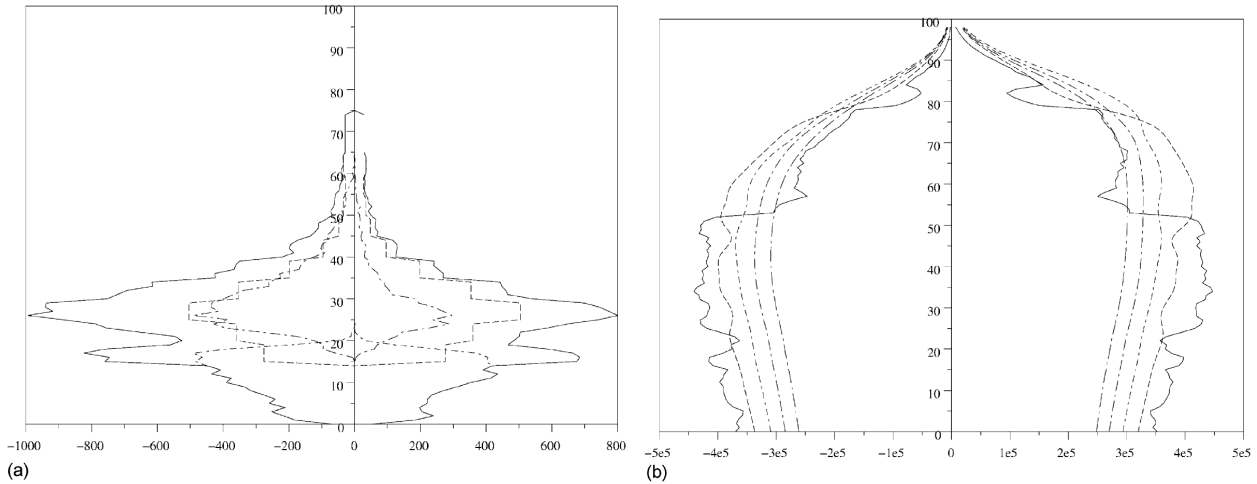


Рисунок 2. Влияние иммиграции. (а) Тотальная иммиграция и ее 3 компонента. Слева:  $x \mapsto M_1(x)$ , Направо:  $x \mapsto M_2(x)$ , (б) Слева:  $P_1(x, t)$ , Направо:  $P_2(x, t)$ , Непрерывная линия: ситуация в 1999 году. Пунктирная линия: прогнозы через 25, 50, 75 и 100 лет.

Этот тип модели (с  $K = 2$ ) аналогична дискретным версиям, используемым INSEE (Brutel, 2001). Легко критиковать эту модель. С одной стороны, мы используем довольно низкие показатели по иммиграции. С другой стороны, текущие данные используются для расчета уровня рождаемости. В настоящее время этот показатель довольно высок. Отчасти это связано с высоким процентом иммигрантов среди населения и тем, что иммигранты имеют более высокий уровень рождаемости, чем французы. Это приводит нас к следующим двум моделям.

## Второй пример

В качестве исходных данных для мужского и женского населения, родившегося во Франции или иммигрантов, мы берем результаты переписи 1999 года (INSEE, 2001). Мы используем тот же профиль иммиграции, что и в первом примере. Для оценки уровня рождаемости предположим, что существует ряд  $\varepsilon > 0$  с  $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  а также  $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  для всех  $x$ . Мы знаем общее число детей, рожденных матерями-иностранками (которые являются более или менее подгруппой женщин-иммигрантов), а также количество женщин-иностранок. Мы получаем  $\varepsilon = 0,6$ , Так

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat' 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

Рисунок 3 для возрастных пирамид иммигрантов. Пирамида быстро сходится (через 100 лет) к стационарному состоянию.

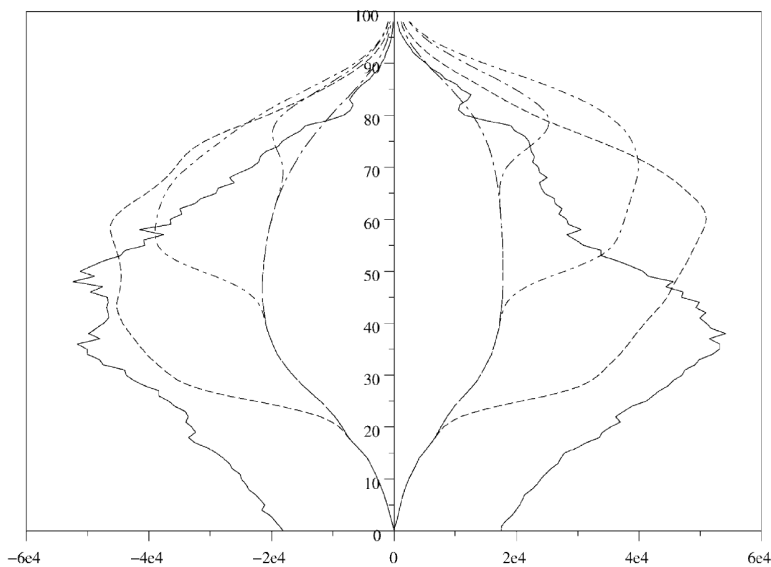


Рисунок 3. Люди, родившиеся во Франции и иммигранты с разным уровнем рождаемости. Слева:  $P_3(x, t)$  (иммигранты мужчины). Направо:  $P_4(x, t)$  (женщины-иммигранты).

### Третий пример

В качестве исходных данных для мужского и женского населения французского и иностранного гражданства мы берем результаты переписи 1999 года (INSEE, 2001). Мы используем тот же профиль иммиграции, что и в первом примере. Для оценки уровня рождаемости мы по-прежнему предполагаем, что существует ряд  $\varepsilon > 0$  с  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  а также  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  для всех  $x$ . Зная общее количество детей, рожденных от матерей-иностранок, мы получаем  $\varepsilon = 0,56$ . Для показателей изменения национальности предполагается, что  $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ . С данными Министерства юстиции (2001), у нас есть оценка  $\tau(x)$ . Смотрите рисунок 4 (а). Эта оценка суммирует вклад трех типов процедур, также показанных на рисунке 4 (а): без формальности или заранее (иностранные дети, родившиеся во Франции, которые становятся гражданами в 18 лет), по указу (иностранцы, которые жили в Франция и их дети) и по декларации (брак с французским гражданином). Во всех случаях, когда возрастная структура дается только по возрастной группе, мы использовали лестничные функции в качестве приближения. Итак, инструкция

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']];
```

производит рисунок 4 (б) для возрастных пирамид иностранцев. Пирамида сходится через 100 лет в стационарное состояние.

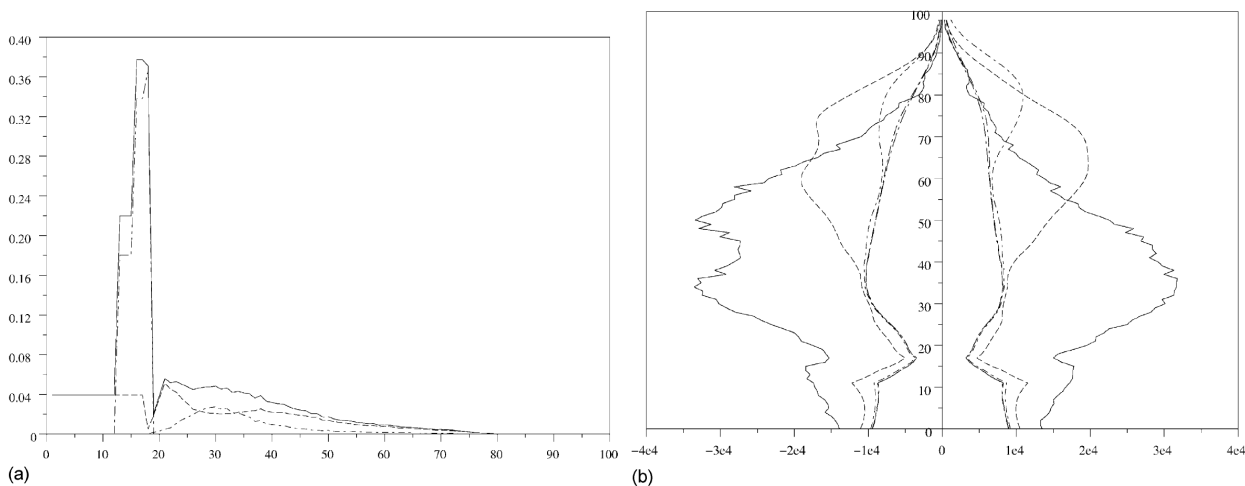


Рисунок 4. Французы и иностранцы с разной рождаемостью. а) получение французского гражданства. Скорость передачи  $\tau(x)$  и 3 компонента. (б) Слева:  $P_3(x, t)$  (иностранцы мужчины). Направо:  $P_4(x, t)$  (иностранцы женщины).

### сравнение

Для сравнения различных моделей на рис. 5 показаны прогнозы для всего населения. Самая низкая кривая - это без иммиграции. Самая высокая кривая - с иммиграцией, но без различий в фертильности (первый пример). Две очень близкие промежуточные кривые соответствуют второму и третьему примеру, где люди, родившиеся во Франции (соответственно, французские граждане), отличаются от иммигрантов (соответственно, иностранцев). Разница в общей численности населения между этими двумя последними моделями и первым примером с иммиграцией составляет около 0,7 млн. Через 50 лет и около 2,5 млн. Через 100 лет.



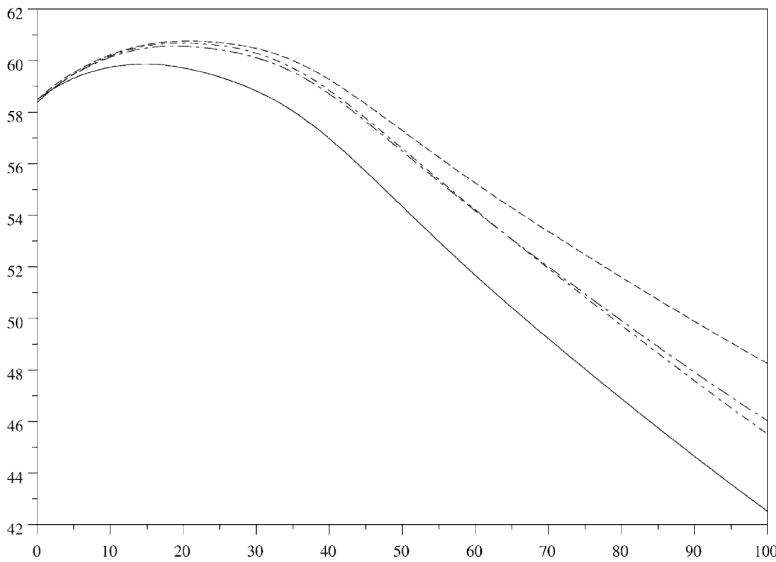


Рисунок 5. Прогнозы для общей численности населения (в миллионах) при различных допущениях.

## 5. Ссылка на более сложную модель

Арино и Смит (1998) изучили более сложную модель с еще одной переменной, которая обобщается следующим образом. Каждая из  $K$  подгрупп населения делится на две части:

- Есть люди, которые были в этой подгруппе с рождения.  $Q_k(x, t)$  это их плотность.
- лица, которые были в другой подгруппе ранее.  $R_k(x, y, t)$  является плотностью этих людей возраста  $x$  в момент времени  $t$ , которые были в подгруппе  $k$  в течение  $y$  лет ( $y < x$ ).

Новорожденные относятся к первому типу, а переведенные лица и иммигранты относятся ко второму типу. Отсюда и модель

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

Матрицы  $\Delta^Q$  а также  $\Delta^R$  диагонали и

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

Эта модель, примененная к третьему примеру разделов 3 и 4, дает систему из восьми уравнений в частных производных и краевых условий для

- Французы по рождению,
- французы по приобретению,
- иностранцы, родившиеся во Франции,
- иностранцы, родившиеся за границей.

Матрицы рождения и передачи  $B^Q$ ,  $B^R$ ,  $\tau^Q$  а также  $\tau^R$  имеют ту же форму, что и в разделе 3: например,  $\tau_{1,3}^R$  а также  $\tau_{2,4}^R$  являются единственными ненулевыми коэффициентами  $\tau^R$ . Модель может точно представлять скорости передачи. Почти все иностранцы, родившиеся во Франции, становятся гражданами Франции в возрасте 18 лет.  $\tau_{1,3}^Q(x)$  а также  $\tau_{2,4}^Q(x)$  поэтому есть пик, если  $x = 18$  лет. Иностранцы, родившиеся за границей, обычно не могут стать французами, если им не исполнилось 18 лет или если они прожили во Франции менее пяти лет (согласно закону).  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  а также  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  поэтому близки к нулю, если  $x < 18$  или  $y < 5$ .

Хотя модель правильно следует эволюционным процессам, ее трудно реализовать, поскольку данные неизвестны, как, например,  $R_k^0(x, y)$  для  $1 \leq k \leq 4$ . Эти данные могут быть доступны через мега-файл переписи 1999 года, но они не были опубликованы.

Одним из способов решения этой проблемы является предположение, что  $\Delta^R$ ,  $B^R$  а также  $\tau^R$  не зависит от  $y$ . Но это более или менее сводит сложную модель к разделу 3.3. Действительно, мы определяем

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy \quad , \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$  является единственным решением системы (1) - (2) - (3) с

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Для этой последней модели доступны данные для расчетов. Результат не сильно отличается от рисунка 4.

## 6. Заключение

Линейная модель (1) - (2) - (3) может быть полезна для других задач, например, для популяций рыб. Субпопуляции не могут находиться в одном и том же месте. Можно представить группы населения в разных местах, с миграциями, как в Арино и Смит (1998). функция  $d_k(x)$  может включать в себя рыбалку.  $M_k(x)$  может представлять реинтродукцию рыбы исчезающих видов, таких как лосось во Франции.

Можно также разработать нелинейные или неоднородные версии модели, как в Hoppensteadt (1975), Webb (1985) или Cushing (1998).

### Библиографические ссылки

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. Journal of Mathematical Analysis and Applications 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) Differential – difference Equations. New York : Academic Press.
- Berman A., Plemmons R. J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) An Introduction to Structured Population Dynamics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. Économie et Statistique 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A., Johnson C. R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
- OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics. New York : Marcel Dekker.