

# O comportamento assintótico da equação de McKendrick com a imigração

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

## resumo

O objetivo deste artigo é discutir a influência da imigração em um modelo matemático para a evolução da estrutura etária da população. No caso subcrítico, a estrutura etária converge para um estado estacionário. Apresentamos um programa que simula o modelo e é usado para projeções para a população da França. Também insistimos no link com um modelo mais complexo.

Palavras-chave: demografia, estrutura populacional, imigração, equações diferenciais parciais, transformação de Laplace

## 1. Introdução

Dividimos uma população em  $K$  subpopulações ( $K \geq 1$ ). As variáveis  $x$  e  $t$  representam idade e tempo.

- $P_k(x, t)$  é a densidade da subpopulação  $k$  de idade  $x$  no tempo  $t$ .
- $M_k(x) \geq 0$  representa a chegada de indivíduos da idade  $x$  que entram na subpopulação  $k$  e provêm de outra população.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$  é a fertilidade de indivíduos na subpopulação  $l$  que dão à luz indivíduos do tipo  $k$ .
- $P_k^0(x)$  é a estrutura etária inicial da subpopulação  $k$ .

Nós definimos

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

Nós presumimos  $B(x) = 0$  para todos  $x$  suficientemente grandes.  $d_k(x) \geq 0$  é a taxa na qual os indivíduos na subpopulação  $k$  deixam a população. Para  $k \neq l$ ,  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  é a taxa de transferência de indivíduos da subpopulação  $l$  para a subpopulação  $k$ . Nós definimos

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

e  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ .  $P(x, t)$  é a única solução para as equações de McKendrick

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

Além disso,  $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ . Considere a matriz

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x) S(0, x) dx,$$

com

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

e  $S(\xi, \xi) = I$  (a matriz de identidade do tamanho  $K$ ). Assumimos que o raio espectral  $\rho$  de  $\hat{G}(0)$  é estritamente menor que 1. Definimos

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx,$$

$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L.$$

Nós temos então

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

Em outras palavras, a pirâmide etária  $x \mapsto P_k(x, t)$  converge para um estado estacionário se  $t \rightarrow +\infty$ .

Esses resultados são demonstrados na seção 2. O estudo do comportamento assintótico de  $P(x, t)$  retorna ao de uma equação integral

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$  e  $G(x)$  são funções conhecidas. Esse problema foi estudado por Lotka (1939) no caso de uma equação ( $K = 1$ ) Para um sistema de equações ( $K > 1$ ), Bellman e Cooke (1963) estudaram o caso em que  $\int_0^\infty G(x) dx$  é uma matriz irredutível (no sentido da teoria de Perron e Frobenius das matrizes positivas). Crump (1970 e 1971) estudou o caso redutível. Esses estudos se concentraram no caso em que  $F(t) \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow \infty$ . Em nosso modelo, o termo não homogêneo migração nas equações de McKendrick implica que  $F(t)$  tem um limite diferente de zero se  $t \rightarrow \infty$ . Se subtrairmos o estado estacionário, o problema não homogêneo é reduzido a um problema homogêneo, para o qual podemos aplicar os resultados sobre a existência e o comportamento assintótico. No entanto, propomos abaixo uma demonstração para obter o segundo resultado ( $P(x, t) \geq 0$ ) e porque a prova é bastante simples com a hipótese subcrítica  $\rho < 1$ . Não há necessidade de distinguir entre casos redutíveis e irredutíveis.

Na Seção 3, apresentamos três exemplos que modelam populações humanas. Em cada exemplo,  $M(x)$  representa imigração e  $d_k(x)$  mortalidade, que também poderia incluir a taxa de emigração. No terceiro exemplo,  $\tau_{k,l}(x)$  representa a taxa de mudança de nacionalidade para estrangeiros. A Seção 4 apresenta um programa que simula o modelo e sua aplicação nos três exemplos, usando dados da França. Na seção 5, fazemos a ligação com um modelo mais complexo estudado por Arino e Smith (1998). O modelo mais complexo representa melhor populações reais. No entanto, envolve parâmetros difíceis de estimar devido à falta de dados para as populações humanas nas seções anteriores. A conclusão indica como o modelo básico (1) - (2) - (3) pode ser aplicado às populações animais. As equações assumem um significado diferente.

Por fim, mencionemos alguns estudos sobre modelagem de imigração. Barbu, Iannelli e Martcheva (2001) estudaram a controlabilidade da estrutura etária de uma população por imigração seletiva por idade. Em Alvarado e Creedy (1998), existem modelos discretos.

## 2. Demonstração de resultados

### Formulação como uma equação integral

O sistema de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem é reduzido a um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem comuns ao longo das curvas características. Temos assim

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

Nós definimos  $\Phi(t) = P(0, t)$ . Nós temos

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

Resulta das fórmulas obtidos para  $x > t$  e  $x < t$  que  $\Phi(x, t)$  é solução de uma equação integral

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$  é a matriz

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$  é o vetor

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

A equação (1) tem uma solução única, como pode ser visto com o método de aproximações sucessivas (Bellman e Cooke, 1963). Portanto, a equação diferencial parcial também tem uma solução única. No entanto, os elementos na diagonal de  $\Delta$  são positivos ou zero e os que estão fora da diagonal são negativos ou zero. Isso implica que se  $a \leq b$ ,  $S(a, b)$  é uma matriz com coeficientes positivos ou nulos (Berman e Plemmons, 1994 cap. 6 §3.12). Então nós temos  $F(t) \geq 0$  e  $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . De acordo com o método de aproximações sucessivas,  $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ . De acordo com (5) e (6),  $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Isso demonstra os dois primeiros resultados.

### Transformação de Laplace

$\xi_0(\Phi)$  é o menor número real, de modo que a integral de vetor a seguir é absolutamente convergente

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \xi_0.$$

É a transformação de Laplace de  $\Phi$ . Nós definimos  $\xi_0(F)$  e  $\xi_0(G)$  do mesmo jeito.  $B(x)$  é uma função cujo suporte é compacto.  $G(x)$  é, portanto, também uma função com suporte compacto e  $\xi_0(G) = -\infty$ . Então nós temos

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

$I$  representa a matriz identidade de tamanho  $K$ . Nós temos então

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

Nós levamos  $z \in \mathbb{C}$  com  $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ . Nós temos

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

De acordo com Horn e Johnson (1985, §8.1.18 e 8.1.19), temos para os raios espectrais correspondentes

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

e  $I - \hat{G}(z)$  é reversível. Temos assim

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

Tomamos a transformação inversa de Laplace. Recebemos qualquer número real  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  e  $\forall t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

Nós definimos  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ . A fórmula (8) fornece

$$F(t) = L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

Com  $z \in \mathbb{C}$  e  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Se  $L \neq 0$ , então  $z = 0$  é o polo de  $\hat{F}$  com a maior parte real, e  $L$  é o resíduo em  $z = 0$ . Então  $z = 0$  também é o polo de  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  com a maior parte real e  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L$  é o resíduo em  $z = 0$ . A fórmula do resíduo aplicada em (9) fornece

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Isso permanece verdadeiro se  $L = 0$ , porque todos os polos de  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  estão no semiplano esquerdo do plano complexo.  $\Phi(t)$  portanto, converge para 0 se  $t \rightarrow \infty$ . Em todos os casos, resulta de (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

Este é o terceiro resultado.

### 3. Exemplos

Os exemplos nesta seção são projetados para representar populações humanas:  $M_k(x)$  é imigração e  $d_k(x)$  mortalidade. Se houver emigração, apenas as alterações  $d_k(x)$ .

#### Primeiro exemplo

A população é dividida entre homens ( $k = 1$ ) e mulheres ( $k = 2$ ). Nós presumimos

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

o que significa que o número de nascimentos depende do número de mulheres, mas não do número de homens. Para simplificar as fórmulas, suponha que  $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ . Essa suposição significa que as chances de um recém-nascido ser menino ou menina são iguais (na prática, isso é quase verdade).

Porque  $B$  é uma matriz triangular mais alta,  $\hat{G}(0)$  tem a mesma estrutura. Então o raio espectral é

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Nós presumimos  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . O vetor  $R$  é facilmente calculado:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

Nós temos então  $\forall x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du. \end{aligned}$$

## Segundo exemplo

A população é dividida entre homens nascidos no país ( $k = 1$ ), mulheres nascidas no país ( $k = 2$ ) e imigrantes de primeira geração, homens ( $k = 3$ ) ou mulheres ( $k = 4$ ). Nós presumimos

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

o que significa que as mulheres imigrantes dão à luz filhos no país, com uma taxa diferente da das mulheres nascidas no país. Suponha também que  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  e  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ . Porque  $B$  e  $\hat{G}(0)$  são matrizes triangulares superiores,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$  não depende de  $b_4$ . Nesse modelo, uma alta taxa de fertilidade para imigrantes não pode transformar uma situação subcrítica em uma situação supercrítica ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ ). Nós presumimos  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . O vetor  $R$  ainda é facilmente calculado:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

Nós temos então  $\forall x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

Observe que este segundo exemplo fornece o primeiro exemplo novamente se  $d_1 = d_3$ ,  $d_2 = d_4$  e  $b_2 = b_4$ , isto é, se os imigrantes de primeira geração seguem imediatamente as taxas locais de fertilidade e mortalidade. De fato,  $P_1 + P_3$  substitui  $P_1$  e  $P_2 + P_4$  substitui  $P_2$ .

## Terceiro exemplo

A população é dividida em nacionais, homens ( $k = 1$ ) ou mulheres ( $k = 2$ ) e estrangeiros, homens ( $k = 3$ ) ou mulheres ( $k = 4$ ). Nós presumimos

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

o que significa que as mulheres estrangeiras dão à luz filhos estrangeiros, mas as estrangeiras podem mudar de nacionalidade (elas são transferidas da subpopulação 3 ou 4 para a subpopulação 1 ou 2). Para simplificar, assumimos  $d_1 = d_3$  e  $d_2 = d_4$ : a mortalidade de estrangeiros é igual à de nacionais. Também assumimos  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  e  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ . Nós temos então

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} S_{1,1}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du}, & S_{2,2}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_2(u) du}, \\ S_{3,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, & S_{4,4}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du}, \end{aligned}$$

e

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz,$$

$$S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

Temos assim

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$  é uma matriz triangular superior,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} ; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

Nós presumimos  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . O vetor  $R$  ainda é facilmente calculado. Nós definimos

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx$$

$$L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

Nós temos  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  e

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Finalmente, temos  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

Observe que este terceiro exemplo é reduzido ao primeiro exemplo se  $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ , ou seja, se as subpopulações  $\{1,2\}$  e  $\{3,4\}$  não se misturam.

## 4. Software

Para ilustrar este estudo, escrevemos um programa que roda no ambiente Scilab, software livre para cálculo numérico disponível em [www.rocq.inria.fr/scilab](http://www.rocq.inria.fr/scilab). O programa, denominado census.sci, pode ser encontrado com os arquivos que contêm os dados da França em [www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html](http://www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html). Resolve o sistema de equações diferenciais parciais usando o método das diferenças finitas. Nós escolhemos  $\delta t > 0$  e  $\delta x > 0$ .  $P_k^{i,j}$  é o valor de  $P_k(x, t)$  E se  $x = i \delta x$  e  $t = j \delta t$ . Usamos notações semelhantes para  $\Delta_{k,l}$ ,  $M_k$ ,  $B_{k,l}$  e  $P_k^0$ . Nós temos então

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^\infty B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Observe as discretizações, progressivas em relação ao tempo e retrógradas em relação à idade. As equações são, na verdade, equações de advecção, portanto, devemos levar em consideração a direção das curvas características para ter um esquema convergente. A condição  $\delta t \leq \delta x$  também deve ser respeitado. No programa, sempre levamos  $\delta x$  igual a um ano.

## Explicação

A sintaxe é a seguinte:

census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers).

Definições:

- $X, K$ : números inteiros positivos
- `annees`: vetor de números inteiros positivos ou zero
- `gauche, droit`: Matrizes da coluna  $K$  de números reais
- `pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers`: vetores de cadeias de caracteres
- `bindices, dindices`: matrizes de duas colunas de números inteiros positivos  $\leq K$
- `mindices`: vetor de inteiros positivos  $\leq K$ .

Significado:

- $X$ : idade máxima
- $K$ : número de subpopulações
- `annees`: horários em que a população será sorteada
- `gauche, droite`: as linhas à esquerda (resp. à direita) definem as combinações lineares de  $(P_1, \dots, P_K)$ , representados à esquerda (resp. à direita) na figura
- `pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers`: nomes de arquivos que contêm os dados; esses arquivos são vetores de coluna
- `bindices, dindices`: as linhas dessas matrizes fornecem os índices (linha e coluna) dos coeficientes diferentes de zero das matrizes  $B$  e  $\Delta$ , cujo valor é dado em `bfichiers` e `dfichiers`. O número de linhas de `bindices` (resp. `dindices`) é, portanto, igual ao comprimento do vetor `bfichiers` (resp. `dfichiers`)
- `mindices`: Índices de coeficientes diferentes de zero do vetor  $M$ . O valor está em `mfichiers`.

## Primeiro exemplo

Como dados iniciais para as populações masculina e feminina, tomamos os resultados do censo de 1999 na França. As taxas de fertilidade e mortalidade são calculadas com dados do mesmo ano (Beaume, Doisneau e Vatan, 2001): veja a Figura 1 (a). Se a imigração é zero, então

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaledeath.dat'],[],[])
```

mostra a Figura 1 (b), onde a população eventualmente converge para 0, mas muito lentamente.

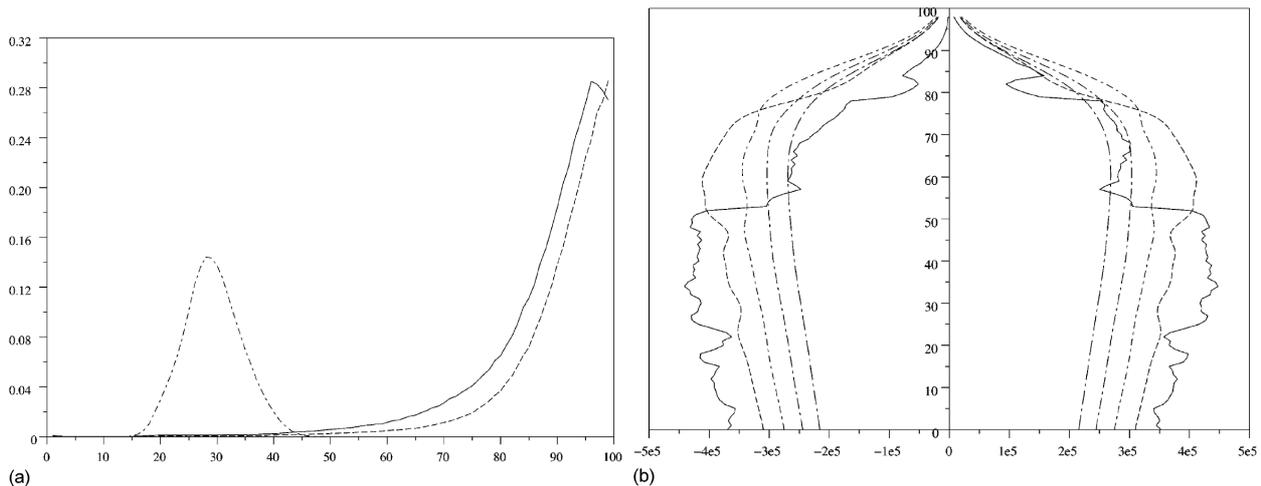


Figura 1. Sem imigração. a) Total de nascimentos:  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ . Mortalidade:  $x \mapsto d_1(x)$  e  $x \mapsto d_2(x)$ . b) Esquerda:  $P_1(x, t)$ . Para a direita:  $P_2(x, t)$ . Linha contínua: situação em 1999. Linhas pontilhadas: projeções após 25, 50, 75 e 100 anos.

A imigração está agora incluída  $M(x)$ . Dinh (1994) calculado  $M(x)$  usando os resultados de dois censos consecutivos e os dados de nascimentos e mortes entre esses dois censos. O método deu resultados razoáveis até a década de 1980. Mas entre 1990 e 1999, a imigração total foi da mesma ordem que os erros nos censos, de modo que os cálculos não deram um resultado razoável. Outro método é usar os dados anuais do Office for International Migration (1999), resumidos na Figura 2 (a). Imigração total é a soma de trabalhadores imigrantes, imigrantes que obtiveram uma autorização de residência e imigrantes no contexto do reagrupamento familiar. Encontramos dados por idade para imigrantes que obtiveram uma autorização de residência (daí a função de escada na Figura 2 (a)), mas não para adultos no contexto do reagrupamento familiar. Para os cálculos, apenas as curvas externas da figura 2 (a) são úteis. Então a instrução

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaledeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produz a figura 2 (b). A estrutura da população converge lentamente para um estado estacionário com uma pequena população total (não mostrada na figura).

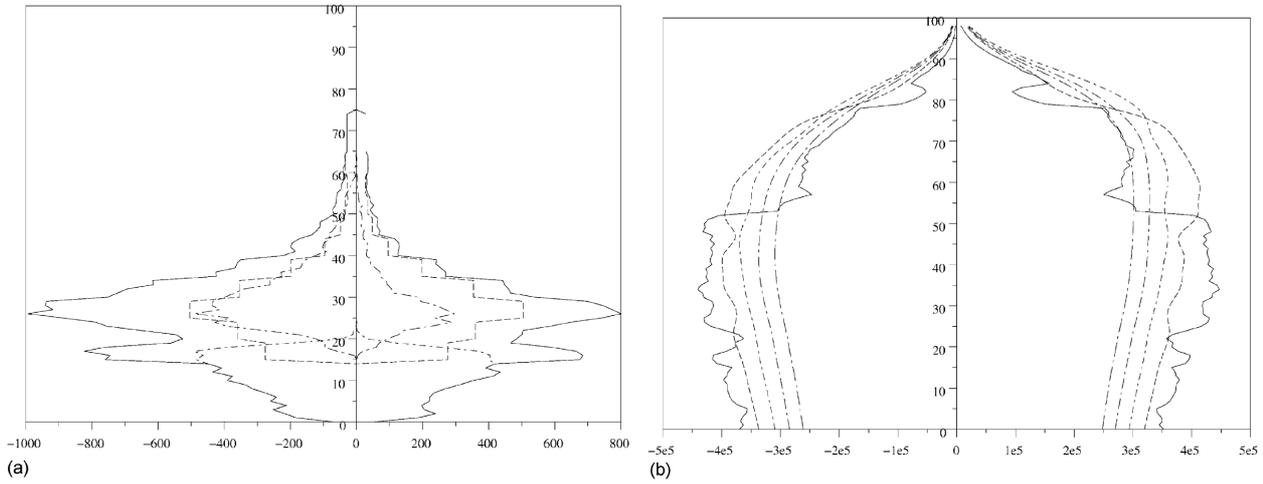


Figura 2. Influência da imigração. (a) Imigração total e seus três componentes. Para a esquerda:  $x \mapsto M_1(x)$ . Para a direita:  $x \mapsto M_2(x)$ . (b) Esquerda:  $P_1(x, t)$ . Para a direita:  $P_2(x, t)$ . Linha contínua: situação em 1999. Linha pontilhada: projeções após 25, 50, 75 e 100 anos.

Este tipo de modelo (com  $K = 2$ ) é semelhante às versões discretas usadas pelo INSEE (Brutel, 2001). É fácil criticar esse modelo. Por um lado, usamos números de imigração razoavelmente baixos. Por outro lado, os dados atuais são usados para calcular a taxa de natalidade. Atualmente, essa taxa é bastante alta. Isso se deve em parte à alta porcentagem de imigrantes na população e ao fato de os imigrantes terem taxas de fertilidade mais altas do que os franceses. Isso nos leva aos seguintes dois modelos.

### Segundo exemplo

Como dados iniciais para as populações masculinas e femininas nascidas na França ou imigrantes, tomamos os resultados do censo de 1999 (INSEE, 2001). Usamos o mesmo perfil de imigração que no primeiro exemplo. Para estimar as taxas de fertilidade, suponha que exista um número  $\varepsilon > 0$  com  $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  e  $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  para todos  $x$ . Conhecemos o número total de crianças nascidas de mães estrangeiras (que são mais ou menos um subconjunto de mulheres imigrantes) e também o número de mulheres estrangeiras. Nós obtemos  $\varepsilon = 0,6$ , assim

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'fmalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'fmalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maleddeath.dat' 'fmaleddeath.dat' 'maleddeath.dat' 'fmaleddeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']]);
```

produz a Figura 3 para as pirâmides etárias dos imigrantes. A pirâmide converge rapidamente (após 100 anos) para um estado estacionário.

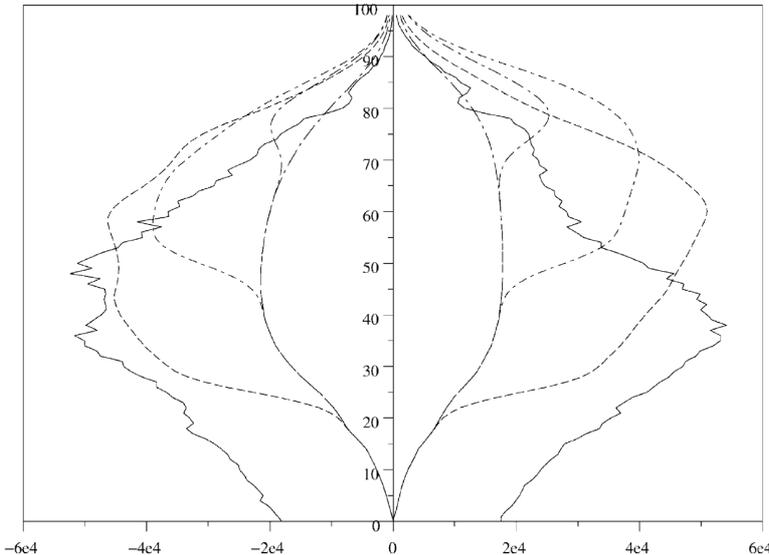


Figura 3. Pessoas nascidas na França e imigrantes com diferentes taxas de fertilidade. Para a esquerda:  $P_3(x, t)$  (homens imigrantes). Para a direita:  $P_4(x, t)$  (mulheres imigrantes).

### Terceiro exemplo

Como dados iniciais para a população masculina e feminina de nacionalidade francesa e estrangeira, tomamos os resultados do censo de 1999 (INSEE, 2001). Usamos o mesmo perfil de imigração que no primeiro exemplo. Para estimar as taxas de fertilidade, ainda assumimos que existe um número  $\varepsilon > 0$  com  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  e  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  para todos  $x$ . Conhecendo o número total de filhos de mães estrangeiras, obtemos  $\varepsilon = 0,56$ . Para taxas de mudança de nacionalidade, assume-se que  $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ . Com dados do Ministério da Justiça (2001), temos uma estimativa de  $\tau(x)$ . Veja a figura 4 (a). Essa estimativa resume as contribuições de três tipos de procedimentos, também mostrados na Figura 4 (a): sem formalidade ou antecedência (crianças estrangeiras nascidas na França que se tornam

cidadãos aos 18 anos), por decreto (estrangeiros que viveram muito tempo em França e seus filhos) e por declaração (casamento com um cidadão francês). Em todos os casos em que a estrutura etária é dada apenas por faixa etária, usamos as funções de escada como uma aproximação. Então a instrução

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produz a Figura 4 (b) para as pirâmides etárias de estrangeiros. A pirâmide converge após 100 anos em um estado estacionário.

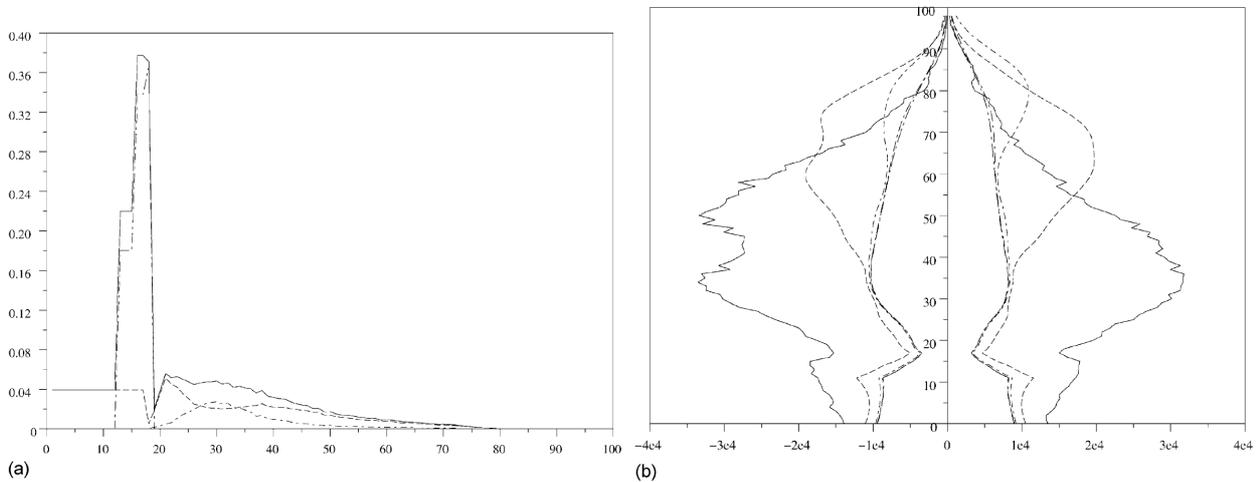


Figura 4. Franceses e estrangeiros com fertilidade diferente. a) Obtenção da nacionalidade francesa. Taxa de transferência  $\tau(x)$  e os 3 componentes. b) Esquerda:  $P_3(x, t)$  (homens estrangeiros). Para a direita:  $P_4(x, t)$  (mulheres estrangeiras).

## Comparação

Para comparar os diferentes modelos, a Figura 5 mostra as projeções para a população total. A curva mais baixa é aquela sem imigração. A curva mais alta é a da imigração, mas sem diferença na fertilidade (primeiro exemplo). As duas curvas intermediárias muito próximas correspondem ao segundo e terceiro exemplo, onde as pessoas nascidas na França (respectivamente cidadãos franceses) se distinguem dos imigrantes (respectivamente estrangeiros). A diferença para a população total entre esses dois últimos modelos e o primeiro exemplo com imigração é de cerca de 0,7 milhões após 50 anos e de 2,5 milhões após 100 anos.

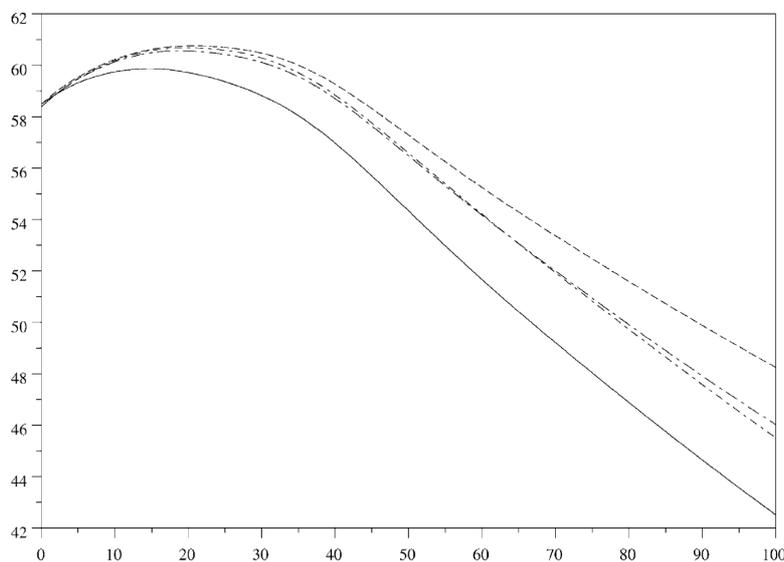


Figura 5. Projeções para a população total (em milhões) sob diferentes premissas.

## 5. Link para um modelo mais complexo

Arino e Smith (1998) estudaram um modelo mais complexo com mais uma variável, que generaliza da seguinte forma. Cada uma das subpopulações  $K$  é dividida em duas:

- existem indivíduos que estão nesta subpopulação desde o nascimento.  $Q_k(x, t)$  é a densidade deles.
- indivíduos que já estiveram em outra subpopulação antes.  $R_k(x, y, t)$  é a densidade desses indivíduos da idade  $x$  no tempo  $t$ , que estão na subpopulação  $k$  há  $y$  anos ( $y < x$ ).

Os recém-nascidos pertencem ao primeiro tipo, enquanto os indivíduos e imigrantes transferidos são do segundo tipo. Daí o modelo

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

Matrizes  $\Delta^Q$  e  $\Delta^R$  são diagonais e

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

Este modelo, aplicado ao terceiro exemplo das seções 3 e 4, fornece um sistema de oito equações diferenciais parciais e condições de aresta para

- Franceses de nascimento,
- os franceses por aquisição,
- estrangeiros nascidos na França,
- estrangeiros nascidos no exterior.

Matrizes de nascimento e transferência  $B^Q, B^R, \tau^Q$  e  $\tau^R$  tem a mesma forma da seção 3: por exemplo,  $\tau_{1,3}^R$  e  $\tau_{2,4}^R$  são os únicos coeficientes diferentes de zero  $\tau^R$ . O modelo pode representar com precisão as taxas de transferência. Quase todos os estrangeiros nascidos na França se tornam cidadãos franceses aos 18 anos de idade.  $\tau_{1,3}^Q(x)$  e  $\tau_{2,4}^Q(x)$  portanto, tenha um pico se  $x = 18$  anos. Os estrangeiros nascidos no exterior geralmente não podem se tornar franceses se tiverem menos de 18 anos de idade ou se morarem na França há menos de cinco anos (de acordo com a lei).  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  e  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  portanto, estão próximos de zero se  $x < 18$  ou  $y < 5$ .

Embora o modelo siga corretamente os processos evolutivos, é difícil de implementar porque os dados não são conhecidos, como por exemplo  $R_k^0(x, y)$  para  $1 \leq k \leq 4$ . Esses dados podem estar disponíveis no mega-arquivo do censo de 1999, mas não foram publicados.

Uma maneira de contornar esse problema é assumir que  $\Delta^R, B^R$  e  $\tau^R$  não dependa de  $y$ . Mas isso reduz mais ou menos o modelo complexo ao da seção 3.3. De fato, definimos

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$  é a única solução do sistema (1) - (2) - (3) com

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Para este último modelo, há dados disponíveis para fazer os cálculos. O resultado não seria muito diferente daquele da Figura 4.

## 6. Conclusão

O modelo linear (1) - (2) - (3) pode ser útil para outros problemas, por exemplo, para populações de peixes. Subpopulações não podem residir no mesmo local. Pode-se imaginar subpopulações em locais diferentes, com migrações como em Arino e Smith (1998). Função  $d_k(x)$  pode incluir pesca.  $M_k(x)$  pode representar a reintrodução de peixes de espécies ameaçadas de extinção, como o salmão na França.

Pode-se também desenvolver versões não lineares ou não homogêneas do modelo, como em Hoppensteadt (1975), Webb (1985) ou Cushing (1998).

### Referências bibliográficas

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) *Differential – difference Equations*. New York : Academic Press.
- Berman A., Plemmons R. J. (1994) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) An Introduction to Structured Population Dynamics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. Économie et Statistique 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A. , Johnson C.R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
- OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics. New York : Marcel Dekker.