

# Het asymptotische gedrag van de McKendrick-vergelijking met immigratie

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

## Overzicht

Het doel van dit artikel is om de invloed van immigratie te bespreken in een wiskundig model voor de evolutie van de leeftijdsopbouw van de bevolking. In het subkritische geval convergeert de leeftijdsopbouw naar een stationaire toestand. We presenteren een programma dat het model simuleert en dat wordt gebruikt voor projecties voor de Franse bevolking. We dringen ook aan op de koppeling met een complexer model.

Sleutelwoorden: demografie, bevolkingsstructuur, immigratie, partiële differentiaalvergelijkingen, Laplace-transformatie

## 1. Inleiding

We verdelen een populatie in  $K$ - subpopulaties ( $K \geq 1$ ). De variabelen  $x$  en  $t$  vertegenwoordigen leeftijd en tijd.

- $P_k(x, t)$  is de dichtheid van de subpopulatie  $k$  van leeftijd  $x$  op tijdstip  $t$ .
- $M_k(x) \geq 0$  staat voor de aankomst van individuen van  $x$  die de subpopulatie  $k$  binnenkomen en afkomstig zijn van een andere populatie.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$  is de vruchtbaarheid van individuen in subpopulatie  $l$  die individuen van type  $k$  baren.
- $P_k^0(x)$  is de initiële leeftijdsopbouw van de subpopulatie  $k$ .

We definiëren

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

Wij nemen aan  $B(x) = 0$  voor alle  $x$  voldoende groot.  $d_k(x) \geq 0$  is de snelheid waarmee individuen in subpopulatie  $k$  de populatie verlaten. Voor  $k \neq l$ ,  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  is de overdrachtsnelheid van individuen van subpopulatie  $l$  naar subpopulatie  $k$ . We definiëren

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$
$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

en  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ .  $P(x, t)$  is de enige oplossing voor de vergelijkingen van McKendrick

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

Bovendien  $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ . Overweeg de matrix

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x)S(0, x)dx,$$

met

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

en  $S(\xi, \xi) = I$  (de identiteitsmatrix van maat  $K$ ). We nemen aan dat de spectrale straal  $\rho$  van  $\hat{G}(0)$  is strikt minder dan 1. We definiëren

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x)M(u)du dx,$$
$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L.$$

We hebben dan

$$P(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x)M(u)du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

Met andere woorden, de leeftijdsopbouw  $x \mapsto P_k(x, t)$  convergeert naar een stabiele toestand als  $t \rightarrow +\infty$ .

Deze resultaten worden gedemonstreerd in rubriek 2. De studie van het asymptotische gedrag van  $P(x, t)$  keert terug naar die van een integraalvergelijking

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$  en  $G(x)$  zijn bekende functies. Dit probleem werd door Lotka (1939) bestudeerd in het geval van een vergelijking ( $K = 1$ ). Voor een systeem van vergelijkingen ( $K > 1$ ) bestudeerden Bellman en Cooke (1963) het geval waar  $\int_0^\infty G(x) dx$  is een onherleidbare matrix (in de zin van de Perron- en Frobenius-theorie van positieve matrices). Crump (1970 en 1971) bestudeerde de reduceerbare casus. Deze studies waren gericht op het geval waar  $F(t) \rightarrow 0$  als  $t \rightarrow \infty$ . In ons model impliceert de inhomogene term migratie in McKendrick-vergelijkingen dat  $F(t)$  heeft een limiet van nul als  $t \rightarrow \infty$ . Als we de steady state aftrekken, wordt het inhomogene probleem gereduceerd tot een homogeen probleem, waarvoor we de resultaten op bestaan en asymptotisch gedrag kunnen toepassen. Toch stellen we hieronder een demonstratie voor om het tweede resultaat te behalen ( $P(x, t) \geq 0$ ) en omdat het bewijs vrij eenvoudig is met de subkritische hypothese  $\rho < 1$ . Er hoeft geen onderscheid te worden gemaakt tussen reduceerbare en niet-reduceerbare gevallen.

In paragraaf 3 presenteren we drie voorbeelden die menselijke populaties modelleren. In elk voorbeeld  $M(x)$  staat voor immigratie en  $d_k(x)$  sterfte, waaronder ook de emigratiegraad kan vallen. In het derde voorbeeld,  $\tau_{k,l}(x)$  vertegenwoordigt de mate van verandering van nationaliteit voor buitenlanders. Hoofdstuk 4 presenteert een programma dat het model en de toepassing ervan simuleert op de drie voorbeelden, met gebruikmaking van gegevens uit Frankrijk. In paragraaf 5 leggen we de link met een complexer model bestudeerd door Arino en Smith (1998). Het complexere model vertegenwoordigt de echte populaties beter. Het gaat echter om parameters die moeilijk te schatten zijn vanwege het gebrek aan gegevens voor de menselijke populaties in de voorgaande secties. De conclusie geeft aan hoe het basismodel (1) - (2) - (3) kan worden toegepast op dierpulaties. De vergelijkingen krijgen dan een andere betekenis.

Laten we tot slot enkele studies noemen over immigratiemodellering. Barbu, Iannelli en Martcheva (2001) bestudeerden de beheersbaarheid van de leeftijdsopbouw van een bevolking door leeftijdselectieve immigratie. In Alvarado en Creedy (1998) zijn er discrete modellen.

## 2. Demonstratie van resultaten

### Formulering als een integraalvergelijking

Het systeem van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde wordt gereduceerd tot een systeem van gewone lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde langs de karakteristieke curven. We hebben dus

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

We definiëren  $\Phi(t) = P(0, t)$ . Men heeft

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

Uit de voor  $x > t$  en  $x < t$  verkregen formules volgt dat  $\Phi(x, t)$  is oplossing van een integraalvergelijking

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$  is de matrix

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$  is de vector

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

Vergelijking (1) heeft een unieke oplossing, zoals blijkt uit de methode van opeenvolgende benaderingen (Bellman en Cooke, 1963). De initiële partiële differentiaalvergelijking heeft dus ook een unieke oplossing. De elementen op de diagonaal van  $\Delta$  zijn echter positief of nul en die buiten de diagonaal zijn negatief of nul. Dit houdt in dat als  $a \leq b$ ,  $S(a, b)$  is een matrix met positieve of nulcoëfficiënten (Berman en Plemmons, 1994, hoofdstuk 6, §3.12). Dus we hebben  $F(t) \geq 0$  en  $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Volgens de methode van opeenvolgende benaderingen,  $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ . Volgens (5) en (6),  $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Dit toont de eerste twee resultaten aan.

### Laplace-transformatie

$\xi_0(\Phi)$  is het kleinste reële getal zodat de volgende vectorintegraal absoluut convergent is

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \xi_0.$$

Het is de Laplace-transformatie van  $\Phi$ . We definiëren  $\xi_0(F)$  en  $\xi_0(G)$  op dezelfde manier.  $B(x)$  is een functie waarvan de ondersteuning compact is.  $G(x)$  is daarom ook een functie met een compacte ondersteuning en  $\xi_0(G) = -\infty$ . Dus we hebben

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

$I$  is de identiteitsmatrix grootte  $K$ . We hebben dan

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

We nemen  $z \in \mathbb{C}$  met  $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ . Men heeft

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

Volgens Horn en Johnson (1985, § 8.1.18 en 8.1.19) hebben we voor de corresponderende spectrale stralen

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

en  $I - \hat{G}(z)$  is omkeerbaar. We hebben dus

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

We nemen de omgekeerde Laplace-transformatie. We krijgen voor elk echt nummer  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  en  $\forall t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

We definiëren  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ . Formule (8) geeft

$$F(t) = L = \int_0^{\infty} B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

Met  $z \in \mathbb{C}$  en  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Als  $L \neq 0$ , dan is  $z = 0$  de pool van  $\hat{F}$  met het grootste reële deel, en  $L$  is het residu bij  $z = 0$ . Dus  $z = 0$  is ook de pool van  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  met het grootste reële deel en  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L$  is het residu bij  $z = 0$ . De residuformule toegepast op (9) geeft

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Dit blijft waar als  $L = 0$ , omdat dan alle polen van  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  bevinden zich in het linker halve vlak van het complexe vlak.  $\Phi(t)$  daarom convergeert naar 0 als  $t \rightarrow \infty$ . In alle gevallen is het resultaat van (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

Dit is het derde resultaat.

### 3. Voorbeelden

De voorbeelden in deze sectie zijn bedoeld om menselijke populaties weer te geven:  $M_k(x)$  is immigratie en  $d_k(x)$  sterfte. Als er emigratie is, verandert alleen  $d_k(x)$ .

#### Eerste voorbeeld

De populatie is verdeeld tussen mannen ( $k = 1$ ) en vrouwen ( $k = 2$ ). Wij nemen aan

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

wat betekent dat het aantal geboorten afhangt van het aantal vrouwen maar niet van het aantal mannen. Veronderstel dat om de formules te vereenvoudigen  $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ . Deze aanname betekent dat de kans dat een pasgeborene een jongen of een meisje is, gelijk is (in de praktijk is dit bijna waar).

Omdat  $B$  een hogere driehoekige matrix is,  $\hat{G}(0)$  heeft dezelfde structuur. Dus de spectrale straal is

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^{\infty} b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Wij nemen aan  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . De vector  $R$  is eenvoudig te berekenen:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

We hebben dan  $\forall x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du. \end{aligned}$$

## Tweede voorbeeld

De bevolking is verdeeld tussen in het land geboren mannen ( $k = 1$ ), in het land geboren vrouwen ( $k = 2$ ) en immigranten van de eerste generatie, mannen ( $k = 3$ ) of vrouwen ( $k = 4$ ). Wij nemen aan

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

wat betekent dat allochtone vrouwen in het land kinderen baren, met een ander percentage dan dat van in het land geboren vrouwen. Veronderstel ook dat  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  en  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ . Omdat  $B$  en  $\hat{G}(0)$  zijn bovenste driehoekige matrices,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$  is niet afhankelijk van  $b_4$ . In dit model kan een hoog vruchtbaarheidscijfer voor immigranten een subkritische situatie niet veranderen in een superkritische situatie ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ ). Wij nemen aan  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . De vector  $R$  is nog steeds gemakkelijk te berekenen:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

We hebben dan  $\forall x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

Merk op dat dit tweede voorbeeld het eerste voorbeeld opnieuw geeft als  $d_1 = d_3$ ,  $d_2 = d_4$  en  $b_2 = b_4$ , dat wil zeggen, als immigranten van de eerste generatie onmiddellijk de lokale vruchtbaarheid en sterftecijfers volgen. Inderdaad,  $P_1 + P_3$  vervangt  $P_1$  en  $P_2 + P_4$  vervangt  $P_2$ .

## Derde voorbeeld

De bevolking is onderverdeeld in onderdanen, mannen ( $k = 1$ ) of vrouwen ( $k = 2$ ) en buitenlanders, mannen ( $k = 3$ ) of vrouwen ( $k = 4$ ). Wij nemen aan

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

wat betekent dat buitenlandse vrouwen buitenlandse kinderen baren, maar buitenlanders hun nationaliteit kunnen veranderen (ze worden overgebracht van subpopulatie 3 of 4 naar subpopulatie 1 of 2). Om het te vereenvoudigen, gaan we ervan uit  $d_1 = d_3$  en  $d_2 = d_4$ : de sterfte onder buitenlanders is gelijk aan die onder de onderdanen. We nemen ook aan  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  en  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ . We hebben dan

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

met

$$S_{1,1}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du},$$

$$S_{3,3}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du},$$

en

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz,$$

$$S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

We hebben dus

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$  is een bovenste driehoekige matrix,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du}; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

Wij nemen aan  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . De vector  $R$  is nog steeds gemakkelijk te berekenen. We definiëren

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx$$

$$L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

Men heeft  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  en

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4/(1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Eindelijk hebben we  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

Merk op dat dit derde voorbeeld is gereduceerd tot het eerste voorbeeld als  $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ , dat wil zeggen als de subpopulaties  $\{1,2\}$  en  $\{3,4\}$  niet samengaan.

## 4. Software

Om deze studie te illustreren, schreven we een programma dat draait in de Scilab-omgeving, gratis software voor numerieke berekening beschikbaar op [www-rocq.inria.fr/scilab](http://www-rocq.inria.fr/scilab). Het programma, genaamd `census.sci`, is te vinden met de bestanden die de gegevens voor Frankrijk bevatten op het adres [www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html](http://www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html). Het lost het systeem van partiële differentiaalvergelijkingen op met behulp van de eindige verschilmethode. We kiezen  $\delta t > 0$  en  $\delta x > 0$ .  $P_k^{i,j}$  is de waarde van  $P_k(x, t)$  als  $x = i \delta x$  en  $t = j \delta t$ . We gebruiken vergelijkbare notaties voor  $\Delta_{k,l}$ ,  $M_k$ ,  $B_{k,l}$  en  $P_k^0$ . We hebben dan

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^\infty B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Let op de discretisaties, progressief in vergelijking met tijd en retrograde in vergelijking met leeftijd. De vergelijkingen zijn in feite adviesvergelijkingen, dus we moeten rekening houden met de richting van de karakteristieke curven om een convergerende regeling te hebben. De conditie  $\delta t \leq \delta x$  moet ook worden gerespecteerd. In het programma namen we altijd  $\delta x$  gelijk aan een jaar.

## Uitleg

De syntaxis is als volgt:

```
census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers).
```

Definities:

- X, K: positieve gehele getallen
- annees: vector met positieve of nul gehele getallen
- gauche,droit: K kolommatrices van reële getallen
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: vectoren van tekenreeksen
- bindices, dindices: twee kolommatrices van positieve gehele getallen  $\leq K$
- mindices: vector van positieve gehele getallen  $\leq K$ .

Betekenis:

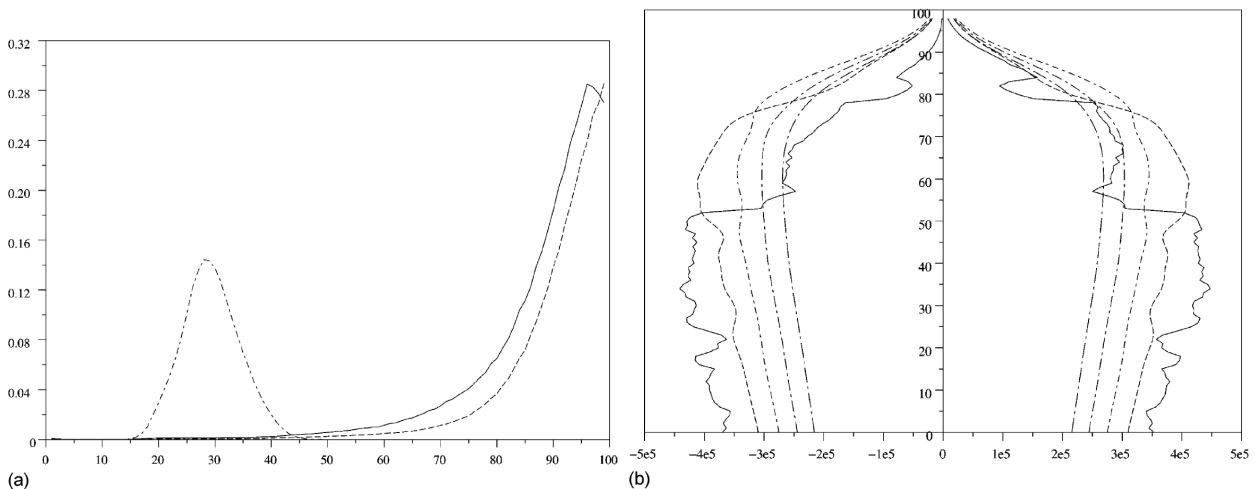
- X: maximale leeftijd
- K: aantal subpopulaties
- annees: tijden waarop de populatie zal worden getrokken
- gauche, droite: de lijnen links (resp. rechts) definiëren de lineaire combinaties van  $(P_1, \dots, P_K)$ , die in de figuur links (resp. rechts) worden weergegeven
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: bestandsnamen die de gegevens bevatten; deze bestanden zijn kolomvectoren
- bindices, dindices: de rijen van deze matrices geven de indices (rij en kolom) van de niet-nulcoëfficiënten van de matrices  $B$  en  $\Delta$ , waarvan de waarde wordt gegeven in bfichiers en dfichiers. Het aantal regels van bindices (resp. dindices) is dus gelijk aan de lengte van de vector bfichiers (resp. dfichiers)
- mindices: Indexen van niet-nul coëfficiënten van de vector  $M$ . De waarde is binnen mfichiers.

### Eerste voorbeeld

Als eerste gegevens voor de mannelijke en vrouwelijke bevolking nemen we de resultaten van de volkstelling van 1999 in Frankrijk. Vruchtbaarheid en sterftecijfers worden berekend met gegevens uit hetzelfde jaar (Beaumel, Doisneau en Vatan, 2001): zie figuur 1 (a). Als immigratie nul is, dan

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[],[])
```

geeft Figuur 1 (b), waar de populatie uiteindelijk convergeert naar 0, maar vrij langzaam.

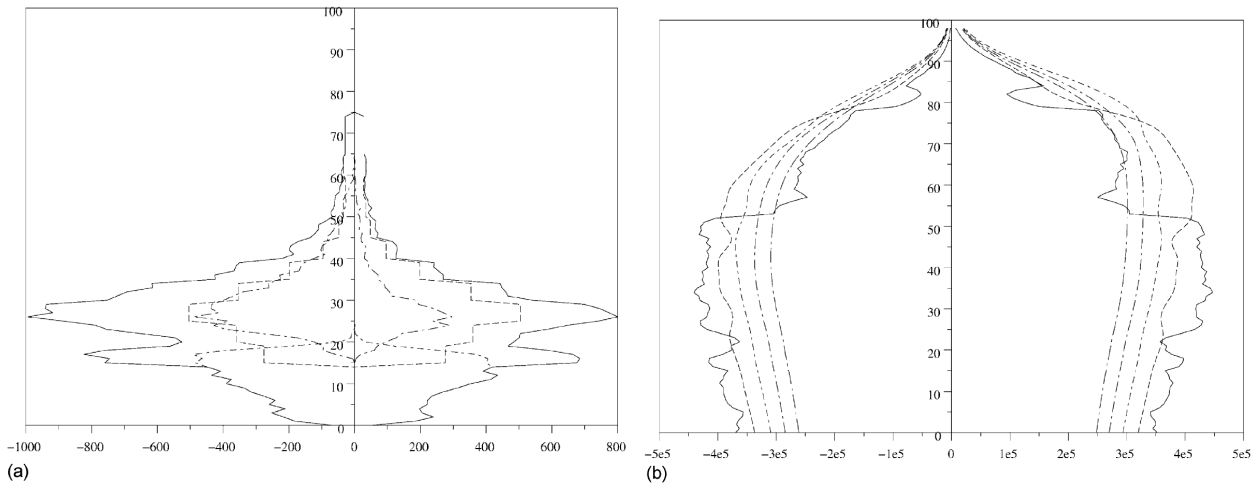


Figuur 1. Zonder immigratie. (a) Totaal aantal geboorten:  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ . Sterfte:  $x \mapsto d_1(x)$  en  $x \mapsto d_2(x)$ . (b) Links:  $P_1(x, t)$ . Naar rechts:  $P_2(x, t)$ . Doorlopende lijn: situatie in 1999. Gestippelde lijnen: projecties na 25, 50, 75 en 100 jaar.

Immigratie is nu inbegrepen  $M(x)$ . Dinh (1994) berekend  $M(x)$  gebruikmakend van de resultaten van twee opeenvolgende tellingen en de gegevens over geboorten en sterfgevallen tussen deze twee tellingen. De methode leverde redelijke resultaten op tot de jaren 80. Maar tussen 1990 en 1999 was de totale immigratie van dezelfde orde als de fouten op de volkstellingen, zodat de berekeningen geen redelijk resultaat opleverden. Een andere methode is om de jaarlijkse gegevens van het Office for International Migration (1999) te gebruiken, die is samengevat in figuur 2 (a). Totale immigratie is de som van allochtone werknemers, immigranten die een verblijfsvergunning hebben verkregen en immigranten in het kader van gezinshereniging. We vonden gegevens naar leeftijd voor immigranten die een verblijfsvergunning verkregen (vandaar de trapfunctie in figuur 2 (a)), maar niet voor volwassenen in het kader van gezinshereniging. Voor de berekeningen zijn alleen de externe curven van figuur 2 (a) nuttig. Dus de instructie

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produceert Figuur 2 (b). De populatiestructuur convergeert langzaam naar een stabiele toestand met een kleine totale populatie (niet weergegeven in de figuur).



Figuur 2. Invloed van immigratie. (a) Totale immigratie en zijn 3 componenten. Naar links:  $x \mapsto M_1(x)$ . Naar rechts:  $x \mapsto M_2(x)$ . (b) Links:  $P_1(x, t)$ . Naar rechts:  $P_2(x, t)$ . Doorlopende lijn: situatie in 1999. Gestippelde lijn: projecties na 25, 50, 75 en 100 jaar.

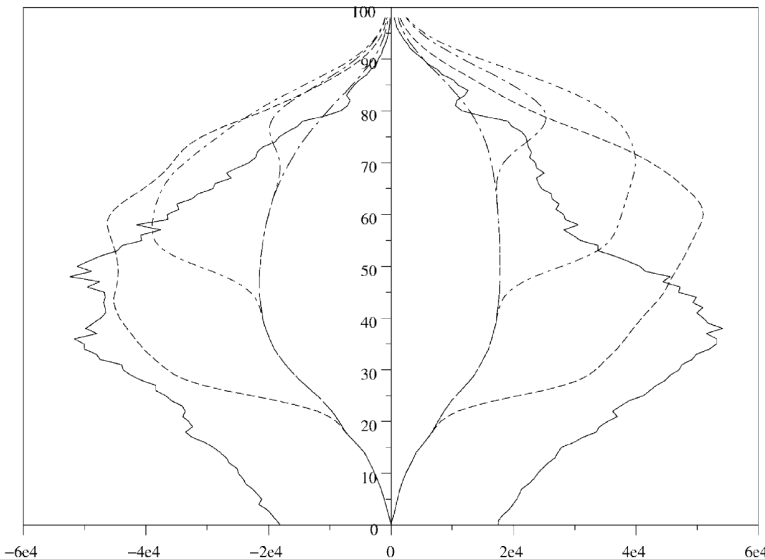
Dit type model (met  $K = 2$ ) is vergelijkbaar met de afzonderlijke versies die worden gebruikt door INSEE (Brutel, 2001). Dit model is gemakkelijk te bekritisieren. Enerzijds hanteren we vrij lage immigratiecijfers. Aan de andere kant worden huidige gegevens gebruikt om het geboortecijfer te berekenen. Momenteel is dit percentage vrij hoog. Dit komt mede door het hoge percentage immigranten in de bevolking en het feit dat immigranten hogere vruchtbaarheidscijfers hebben dan de Fransen. Dit brengt ons bij de volgende twee modellen.

## Tweede voorbeeld

Als eerste gegevens voor de mannelijke en vrouwelijke populaties geboren in Frankrijk of immigranten, nemen we de resultaten van de telling van 1999 (INSEE, 2001). We gebruiken hetzelfde immigratieprofiel als in het eerste voorbeeld. Om de vruchtbaarheidscijfers te schatten, gaat u ervan uit dat er een getal is  $\varepsilon > 0$  met  $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  en  $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  voor alle  $x$ . We kennen het totale aantal kinderen van een buitenlandse moeder (die min of meer een subgroep van allochtone vrouwen vormt) en ook het aantal buitenlandse vrouwen. We verkrijgen  $\varepsilon = 0,6$ . Dus

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat' 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produceert Figuur 3 voor de leeftijdspiramides van immigranten. De piramide convergeert snel (na 100 jaar) naar een stationaire toestand.



Figuur 3. Mensen geboren in Frankrijk en immigranten met verschillende vruchtbaarheidscijfers. Naar links:  $P_3(x, t)$  (allochtone mannen). Naar rechts:  $P_4(x, t)$  (allochtone vrouwen).

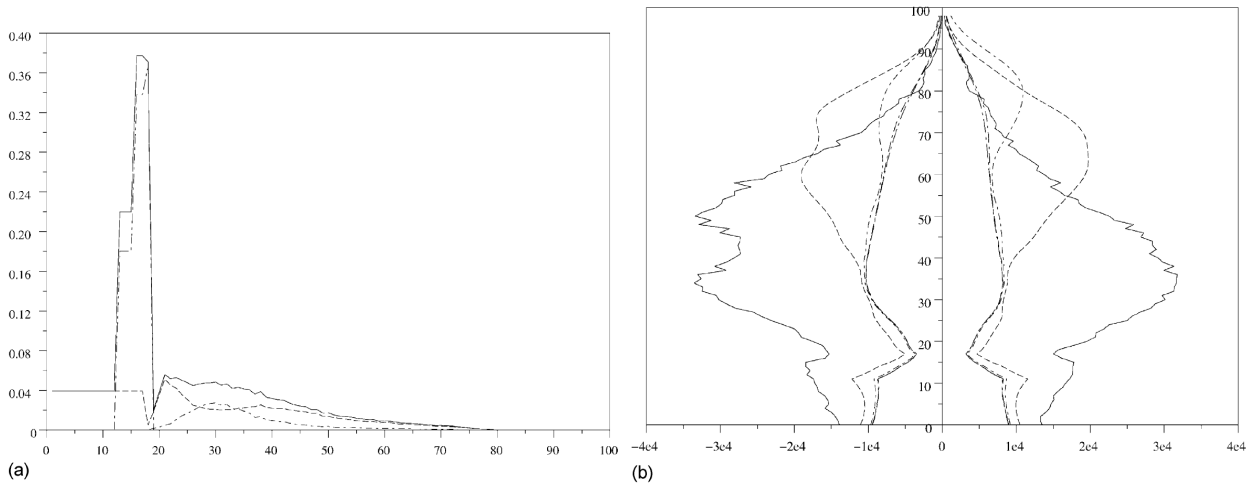
## Derde voorbeeld

Als eerste gegevens voor de mannelijke en vrouwelijke bevolking van Franse en buitenlandse nationaliteit, nemen we de resultaten van de telling van 1999 (INSEE, 2001). We gebruiken hetzelfde immigratieprofiel als in het eerste voorbeeld. Om de vruchtbaarheidscijfers te schatten, gaan we er nog steeds van uit dat er een aantal is  $\varepsilon > 0$  met  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  en  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  voor alle  $x$ . Als we het totale aantal kinderen van buitenlandse moeders kennen, krijgen we  $\varepsilon = 0,56$ . Voor tarieven voor verandering van nationaliteit wordt aangenomen dat  $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ . Met gegevens van het Ministerie van Justitie (2001) hebben we een schatting van  $\tau(x)$ . Zie figuur 4 (a). Deze schatting vat de bijdragen samen van drie soorten procedures, ook weergegeven in figuur 4 (a): zonder formaliteit of vooraf (buitenlandse kinderen geboren in Frankrijk die op 18-jarige leeftijd burgers worden), bij decreet (buitenlanders die lang in Frankrijk

en hun kinderen) en bij verklaring (huwelijk met een Frans staatsburger). In alle gevallen waarin de leeftijdsstructuur alleen per leeftijdsgroep wordt gegeven, hebben we trapfuncties als benadering gebruikt. Dus de instructie

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

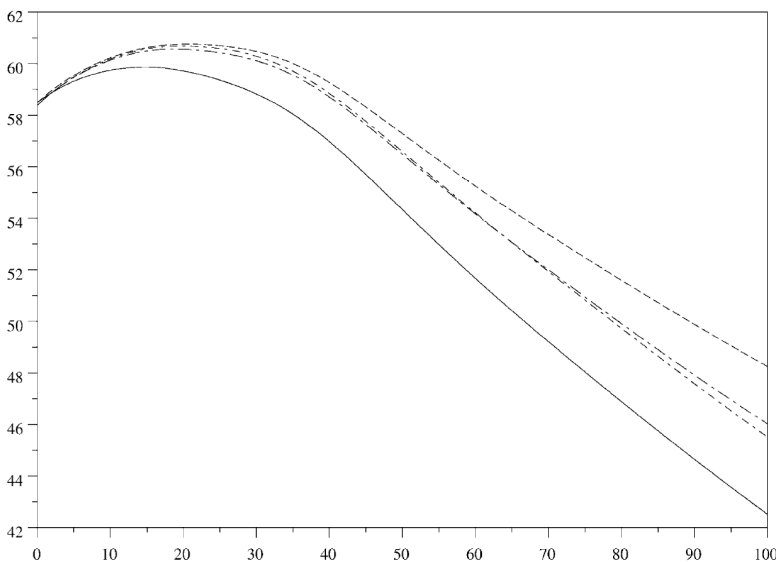
produceert Figuur 4 (b) voor de leeftijdspiramides van buitenlanders. De piramide komt na 100 jaar samen in een stationaire toestand.



Figuur 4. Fransen en buitenlanders met verschillende vruchtbaarheid. (a) Verkrijgen van de Franse nationaliteit. Overdrachtssnelheid  $\tau(x)$  en de 3 componenten. (b) Links:  $P_3(x, t)$  (buitenlandse mannen). Naar rechts:  $P_4(x, t)$  (buitenlandse vrouwen).

### Vergelijking

Om de verschillende modellen te vergelijken, toont Figuur 5 de projecties voor de totale bevolking. De laagste curve is die zonder immigratie. De hoogste curve is die met immigratie, maar zonder verschil in vruchtbaarheid (eerste voorbeeld). De twee zeer nauwe tussenliggende curves komen overeen met het tweede en derde voorbeeld, waarbij in Frankrijk geboren personen (resp. Franse staatsburgers) worden onderscheiden van immigranten (resp. Buitenlanders). Het verschil voor de totale bevolking tussen deze laatste twee modellen en het eerste voorbeeld met immigratie is na 50 jaar ongeveer 0,7 miljoen en na 100 jaar ongeveer 2,5 miljoen.



Figuur 5. Projecties voor de totale bevolking (in miljoenen) onder verschillende aannames.

## 5. Link naar een complexer model

Arino en Smith (1998) bestudeerden een complexer model met nog een variabele, die als volgt generaliseert. Elk van de  $K$ -subpopulaties is verdeeld in twee:

- er zijn individuen die sinds de geboorte in deze subpopulatie zitten.  $Q_k(x, t)$  is hun dichtheid.
- individuen die eerder in een andere subpopulatie zijn geweest.  $R_k(x, y, t)$  is de dichtheid van deze personen van leeftijd  $x$  op tijdstip  $t$ , die in de sub-bevolking zijn geweest  $k$  voor  $y$  jaar ( $y < x$ ).

Pasgeborenen behoren tot het eerste type, terwijl overgedragen personen en immigranten tot het tweede type behoren. Vandaar het model



$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

Matrices  $\Delta^Q$  en  $\Delta^R$  zijn diagonaal en

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

Dit model, toegepast op het derde voorbeeld van secties 3 en 4, geeft een systeem van acht partiële differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden voor

- Fransen van geboorte,
- de Fransen door overname,
- buitenlanders geboren in Frankrijk,
- buitenlanders die in het buitenland zijn geboren.

Matrices voor geboorte en overdracht  $B^Q$ ,  $B^R$ ,  $\tau^Q$  en  $\tau^R$  hetzelfde formulier hebben als in sectie 3: bijvoorbeeld  $\tau_{1,3}^R$  en  $\tau_{2,4}^R$  zijn de enige niet-nulcoëfficiënten van  $\tau^R$ . Het model kan overdrachtssnelheden nauwkeurig weergeven. Bijna alle in Frankrijk geboren buitenlanders worden op 18-jarige leeftijd Frans staatsburger.  $\tau_{1,3}^Q(x)$  en  $\tau_{2,4}^Q(x)$  hebben daarom een piek als  $x = 18$  jaar. Buitenlanders die in het buitenland zijn geboren, kunnen over het algemeen geen Frans worden als ze jonger zijn dan 18 jaar of als ze minder dan vijf jaar in Frankrijk hebben gewoond (volgens de wet).  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  en  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  zijn daarom bijna nul als  $x < 18$  of  $y < 5$ .

Hoewel het model de evolutieprocessen correct volgt, is het moeilijk te implementeren omdat er geen gegevens bekend zijn, zoals bijvoorbeeld  $R_k^0(x, y)$  voor  $1 \leq k \leq 4$ . Deze gegevens zijn mogelijk beschikbaar via het megadossier van 1999, maar ze zijn niet gepubliceerd.

Een manier om dit probleem te omzeilen is om dat aan te nemen  $\Delta^R$ ,  $B^R$  en  $\tau^R$  niet afhankelijk van  $y$ . Maar dit reduceert het complexe model min of meer tot dat van paragraaf 3.3. We definiëren inderdaad

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$  is de enige oplossing van het systeem (1) - (2) - (3) met

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Voor dit laatste model zijn gegevens beschikbaar om de berekeningen te maken. Het resultaat zou niet veel verschillen van dat van figuur 4.

## 6. Conclusie

Het lineaire model (1) - (2) - (3) kan nuttig zijn voor andere problemen, bijvoorbeeld voor vispopulaties. Subpopulaties mogen niet op dezelfde plaats wonen. Men kan zich subpopulaties op verschillende sites voorstellen, met migraties zoals in Arino en Smith (1998). Functie  $d_k(x)$  kan vissen omvatten.  $M_k(x)$  zou de herintroductie van vis van een bedreigde diersoort, zoals zalm in Frankrijk, kunnen vertegenwoordigen.

Men kan ook niet-lineaire of niet-homogene versies van het model ontwikkelen, zoals in Hoppensteadt (1975), Webb (1985) of Cushing (1998).

### Bibliografische referenties

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) *Differential – difference Equations*. New York : Academic Press.

- Berman A. , Plemmons R. J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) An Introduction to Structured Population Dynamics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. Économie et Statistique 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A. , Johnson C. R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
- OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics. New York : Marcel Dekker.