

# 移民を伴うマッケンドリック方程式の漸近的振る舞い

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

## 概要

この記事の目的は、人口の年齢構造の進化に関する数学モデルで移民の影響を議論することです。未臨界のケースでは、年齢構造は定常状態に収束します。モデルをシミュレートし、フランスの人口の予測に使用されるプログラムを提示します。また、より複雑なモデルとのリンクも主張しています。

キーワード：人口統計学、人口構造、移民、偏微分方程式、ラプラス変換

## 1.はじめに

母集団を $K$ 個の部分母集団 ( $K \geq 1$ )。変数 $x$ と $t$ は年齢と時間を表します。

- $P_k(x, t)$  時間 $t$ における年齢 $x$ の部分母集団 $k$ の密度です。
- $M_k(x) \geq 0$  部分母集団 $k$ に入り、別の母集団から来る $x$ 歳の個人の到着を表します。
- $B_{k,l}(x) \geq 0$  タイプ $k$ の個体を出産する部分母集団 $l$ の個体の出生率です。
- $P_k^0(x)$  部分母集団 $k$ の初期年齢構造です。

私たちは定義します

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

とする  $B(x) = 0$  すべての $x$ に対して十分に大きい。  $d_k(x) \geq 0$  部分母集団 $k$ の個体が母集団を去る率です。以下のための  $K \neq L$ ,  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  は、亜集団 $l$ から亜集団 $k$ への個体の移動率です。私たちは定義します

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}(x) &= d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K, \\ \Delta_{k,l}(x) &= -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l, \end{aligned}$$

そして  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ 。  $P(x, t)$  マッケンドリック方程式の唯一の解

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

さらに、  $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ 。マトリックスを検討する

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x) S(0, x) dx,$$

と

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

そして  $S(\xi, \xi) = I$  (サイズ $K$ の単位行列)。のスペクトル半径 $\rho$ を  $\hat{G}(0)$  厳密に1未満です。

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \\ R &= (I - \hat{G}(0))^{-1} L. \end{aligned}$$

その時

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

つまり、時代ピラミッド  $x \mapsto P_k(x, t)$  次の場合、定常状態に収束します  $t \rightarrow +\infty$ 。

これらの結果はセクション2に示されています。  $P(x, t)$  積分方程式に戻ります

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$  そして  $G(x)$  既知の機能です。この問題は、方程式の場合にロトカ (1939) によって研究されました ( $K = 1$ )。連立方程式 ( $K > 1$ ) の場合、ベルマンとクック (1963) は、 $\int_0^\infty G(x) dx$  は、既約行列です (正行列のペロンおよびフロベニウス理論の意味で)。Crump (1970および1971) は、削減可能なケースを研究しました。これらの研究は、 $F(t) \rightarrow 0$  もし  $t \rightarrow \infty$ 。私たちのモデルでは、マッケンドリック方程式の不均一な項の移行は、 $F(t)$  ゼロ以外の制限がある場合  $t \rightarrow \infty$ 。定常状態を差し引くと、不均一な問題は均一な問題に減少し、その結果を存在と漸近的な振る舞いに適用できます。それにもかかわらず、2番目の結果を得るために、以下にデモを提案します。 ( $P(x, t) \geq 0$ ) そして、証明は亜臨界仮説  $\rho < 1$  で非常に簡単です。削減可能なケースと削減できないケースを区別する必要はありません。

セクション3では、人間の人口をモデル化する3つの例を示します。各例では、 $M(x)$  移民を表し、 $d_k(x)$  死亡率。これには移住率も含まれます。3番目の例では、 $\tau_{k,l}(x)$  外国人の国籍の変化率を表します。セクション4では、フランスからのデータを使用して、モデルとその3つの例への適用をシミュレートするプログラムを紹介し、セクション5では、ArinoとSmith (1998) によって研究されたより複雑なモデルとのリンクを作成します。より複雑なモデルは、実際の母集団をよりよく表します。ただし、これには、前のセクションの人間の母集団のデータがないため、推定が困難なパラメーターが含まれます。結論は、基本モデル (1) - (2) - (3) を動物集団に適用する方法を示しています。次に、方程式は別の意味になります。

最後に、移民モデリングに関するいくつかの研究に触れましょう。Barbu, IannelliおよびMartcheva (2001) は、年齢選択的移民を通じて人口の年齢構造の制御可能性を研究しました。Alvarado and Creedy (1998) では、離散モデルがあります。

## 2.結果の実証

### 積分方程式としての定式化

一次線形偏微分方程式のシステムは、特性曲線に沿った通常の一次線形微分方程式のシステムに還元されます。このように

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

私たちは定義します  $\Phi(t) = P(0, t)$ 。我々は持っています

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

$x > t$  と  $x < t$  について得られた式から、 $\Phi(x, t)$  積分方程式の解です

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$  行列です

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$  ベクトルです

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

方程式 (1) には、逐次近似法 (Bellman and Cooke, 1963) でわかるように、独自の解があります。したがって、最初の偏微分方程式にも独自の解があります。ただし、 $\Delta$  の対角線上の要素は正またはゼロであり、対角線の外側の要素は負またはゼロです。これは、 $a \leq b$ 、 $S(a, b)$  正またはゼロの係数を持つ行列です (Berman and Plemmons, 1994 chap. 6§3.12)。だから私たちは  $F(t) \geq 0$  そして  $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ 。逐次近似法によれば、 $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ 。(5) と (6) によれば、 $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ 。これは、最初の2つの結果を示しています。

## ラプラス変換

$\xi_0(\Phi)$  次のベクトル積分が完全に収束するような最小の実数

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \xi_0.$$

$\Phi$  のラプラス変換です。私たちは定義します  $\xi_0(F)$  そして  $\xi_0(G)$  同じやり方で。  $B(x)$  サポートがコンパクトな関数です。  $G(x)$  したがって、コンパクトなサポートを備えた機能であり、  $\xi_0(G) = -\infty$ 。だから私たちは

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

$I$  サイズ  $k$  の単位行列です。その時

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

私たちは取る  $z \in \mathbb{C}$  と  $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ 。我々は持っています

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

Horn and Johnson (1985, §8.1.18 および 8.1.19) によると、対応するスペクトル光線

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

そして  $I - \hat{G}(z)$  リバーシブルです。このように

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

逆ラプラス変換を行います。任意の実数を取得します  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  そして  $\forall t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

私たちは定義します  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ 。式 (8) は

$$F(t) = L = \int_0^{\infty} B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

と  $z \in \mathbb{C}$  そして  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

場合  $L \neq 0$ 、次いで、 $Z=0$  の極であります  $\hat{F}$  最大の实数部を持ち、 $L$  は  $z=0$  での剰余です。つまり、 $z=0$  は  $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$  最大の实数部と  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L z=0$  での残差です。(9) に適用される剰余の式は

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

これは、 $L=0$  の場合にも当てはまります。 $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$  複素平面の左半平面にあります。 $\Phi(t)$  したがって、次の場合は0に収束します。 $t \rightarrow \infty$ 。すべての場合において、(6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x) R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

これは3番目の結果です。

## 3.例

このセクションの例は、人間の人口を表すように設計されています。 $M_k(x)$  移民であり、 $d_k(x)$  死亡。移住がある場合は、変更のみ  $d_k(x)$ 。

### 最初の例

人口は男性 ( $k=1$ ) と女性 ( $k=2$ ) に分かれています。とする

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

つまり、出生数は女性の数に依存しますが、男性の数には依存しません。式を簡略化するために、 $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ 。この仮定は、新生児が男の子または女の子になる可能性が等しいことを意味します（実際には、これはほぼ真実です）。

なぜなら $B$ が高い三角行列であり、 $\hat{G}(0)$ 同じ構造です。したがって、スペクトル半径は

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

とする  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ 。ベクトル $R$ は簡単に計算されます：

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

その時  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du.$$

## 2番目の例

人口は、国で生まれた男性 ( $k=1$ )、国で生まれた女性 ( $k=2$ )、および第一世代の移民、男性 ( $k=3$ ) または女性 ( $k=4$ ) に分かれています。とする

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

これは、移民女性が国で子供を産むことを意味し、国で生まれた女性とは異なる割合で出産します。それも仮定します  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  そして  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ 。ので、 $B$ と $\hat{G}(0)$ 上三角行列であり、

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$ に依存しない  $b_4$ 。このモデルでは、移民の出生率が高いために、垂臨界状態を超臨界状態 ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ )。とする  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ 。ベクトル $R$ はまだ簡単に計算されます：

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

その時  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du,$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du.$$

この2番目の例は、次の場合にも最初の例を示します。  $d_1 = d_3$ 、 $d_2 = d_4$  そして  $b_2 = b_4$  つまり、第一世代の移民が地元の出生率と死亡率にすぐに従う場合。確かに、 $P_1 + P_3$  代わる  $P_1$  そして  $P_2 + P_4$  代わる  $P_2$ 。

## 3番目の例

人口は、国民（男性 ( $k=1$ ) または女性 ( $k=2$ )）と外国人（男性 ( $k=3$ ) または女性 ( $k=4$ )）に分けられます。とする

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

つまり、外国人の女性は外国人の子供を出産しますが、外国人は国籍を変えることができます（彼らはサブ母集団3または4からサブ母集団1または2に移されます）。簡単にするために、 $d_1 = d_3$  そして  $d_2 = d_4$  : 外国人の死亡率は国民の死亡率と同じです。また、 $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  そして  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ 。その時

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

と

$$S_{1,1}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du}, \\ S_{3,3}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du},$$

そして

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz, \\ S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

このように

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$  上三角行列です。

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dx \right\}.$$

とする  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ 。ベクトル  $R$  はまだ簡単に計算されます。私たちは定義します

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx \\ L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

我々は持っています  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  そして

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

最後に、 $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du \\ P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

この3番目の例は、次の場合に最初の例に縮小されることに注意してください。 $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ 、つまり、サブ母集団  $\{1,2\}$  と  $\{3,4\}$  が混合しない場合です。

## 4.ソフトウェア

この研究を説明するために、アドレスwww-rocq.inria.fr/scilabから入手できる数値計算用の無料ソフトウェアであるScilab環境で実行されるプログラムを作成しました。census.sciという名前のプログラムは、www.ann.jussieu.fr/~bacaer / Prog / Immigration / immigration / immigration.htmlのフランスのデータを含むファイルに含まれています。有限差分法を使用して偏微分方程式系を解きます。我々が選択しました  $\delta t > 0$  そして  $\delta x > 0$ 。  $P_k^{i,j}$  の値です  $P_k(x, t)$  もし  $x = i \delta x$  そして  $t = j \delta t$ 。同様の表記を使用します  $\Delta_{k,l}$ 、  $M_k$ 、  $B_{k,l}$  そして  $P_k^0$ 。その時

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$
$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^{\infty} B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$
$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

時間と比較して漸進的であり、年齢と比較して逆行性である離散化に注意してください。方程式は実際には移流方程式であるため、収束スキームを作成するには特性曲線の方法を考慮する必要があります。状態  $\delta t \leq \delta x$  また尊重されなければなりません。プログラムでは、私たちは常に  $\delta x$  1年に等しい。

### 説明

構文は次のとおりです。

```
census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers)。
```

定義：

- X、K：正の整数
- annees：正またはゼロの整数のベクトル
- gauche、droit：実数のK列行列
- pfichiers、bfichiers、dfichiers、mfichiers：文字列のベクトル
- bindices、dindices：正の整数の2つの列行列  $\leq K$
- mindices：正の整数のベクトル  $\leq K$ 。

意味：

- X：最大年齢
- K：部分母集団の数
- annees：人口が描かれる時期
- gauche、droite：左側（右側）の線は、次の線形結合を定義します  $(P_1, \dots, P_K)$ 、これは図の左側（それぞれ右側）に表されています
- pfichiers、bfichiers、dfichiers、mfichiers：データを含むファイル名。これらのファイルは列ベクトルです
- bindices、dindices：これらの行列の行は、行列Bと $\Delta$ の非ゼロ係数のインデックス（行と列）を与えます。その値はbfichiersそしてdfichiers。の行数bindices（それぞれdindices）したがって、ベクトルの長さに等しいbfichiers（それぞれdfichiers）
- mindices：ベクトルMの非ゼロ係数のインデックス。値はmfichiers。

### 最初の例

男性と女性の人口の初期データとして、フランスの1999年の国勢調査の結果を取り上げます。出生率と死亡率は同じ年のデータを使用して計算されます（Beaume, Doisneau, およびVatan, 2001）。図1 (a) を参照してください。移民がゼロの場合、

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[1 1; 2 2],[ 'maledath.dat', 'femaledeath.dat'],[],[])
```

図1 (b) に、人口は最終的に0に収束しますが、かなりゆっくりと収束します。

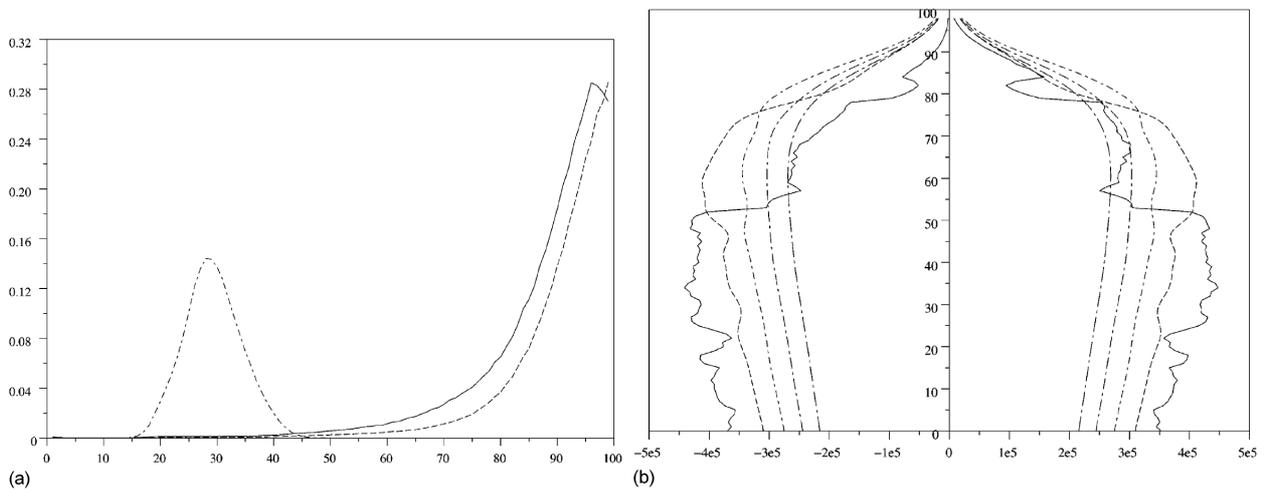


図1.移民なし。(a) 総出産:  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ 。死亡:  $x \mapsto d_1(x)$  そして  $x \mapsto d_2(x)$ 。(b) 左:  $P_1(x, t)$ 。右の方へ:  $P_2(x, t)$ 。実線: 1999年の状況。点線: 25、50、75、100年後の予測。

移民は今含まれています  $M(x)$ 。ディン (1994) 計算  $M(x)$  2つの連続したセンサスの結果と、これら2つのセンサス間の出生と死亡に関するデータを使用します。この方法では1980年代までは妥当な結果が得られましたが、1990年から1999年の間に、移民の総数は国勢調査のエラーと同じオーダーであり、計算では妥当な結果が得られませんでした。別の方法は、図2 (a) に要約されている国際移住局 (1999) の年次データを使用することです。総移民は、移民労働者、居住許可を取得した移民、および家族の再統合の文脈での移民の合計です。居住許可を取得した移民の年齢別データを見つけました (したがって、図2 (a) の階段機能)。しかし、家族の統一の文脈での大人のためではありません。計算には、図2 (a) の外部曲線のみが役立ちます。だから命令

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaledeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']];
```

図2 (b) を生成します。人口構造は、総人口が少ない定常状態にゆっくりと収束します (図には示されていません)。

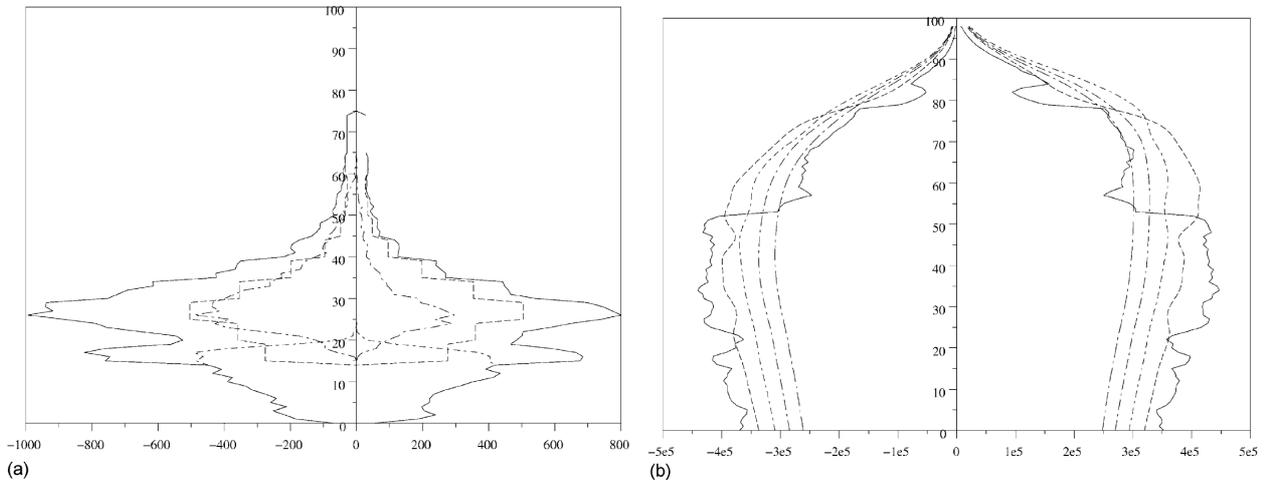


図2.移民の影響。(a) 総移民とその3つのコンポーネント。左に:  $x \mapsto M_1(x)$ 。右の方へ:  $x \mapsto M_2(x)$ 。(b) 左:  $P_1(x, t)$ 。右の方へ:  $P_2(x, t)$ 。実線: 1999年の状況。点線: 25、50、75、100年後の予測。

このタイプのモデル ( $K = 2$ ) は、INSEE (Brutel, 2001) で使用される個別のバージョンに似ています。このモデルを批判するのは簡単です。一方では、かなり低い移民の数字を使用しています。一方、出生率の計算には現在のデータが使用されません。現在、この率は非常に高いです。これは、人口に占める移民の割合が高いことと、移民が出生率がフランス人よりも高いという事実に一部起因しています。これは、次の2つのモデルにつながります。

## 2番目の例

フランスや移民で生まれた男女の初期データとして、1999年の国勢調査の結果を取り上げます (INSEE, 2001)。最初の例と同じ移民プロファイルを使用します。出生率を推定するために、数があると仮定します  $\epsilon > 0$  と  $B_{1,4}(x) = (1 + \epsilon)B_{1,2}(x)$  そして  $B_{2,4}(x) = (1 + \epsilon)B_{2,2}(x)$  すべての  $x$  に対して。私たちは外国人の母親 (多かれ少なかれ移民女性のサブセットです) から生まれた子供の総数と外国人女性の数を知っています。私達は手に入れました  $\epsilon = 0,6$ 。そう

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother.dat' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat' 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

移民のピラミッドの年齢について図3を作成します。ピラミッドはすぐに（100年後に）定常状態に収束します。

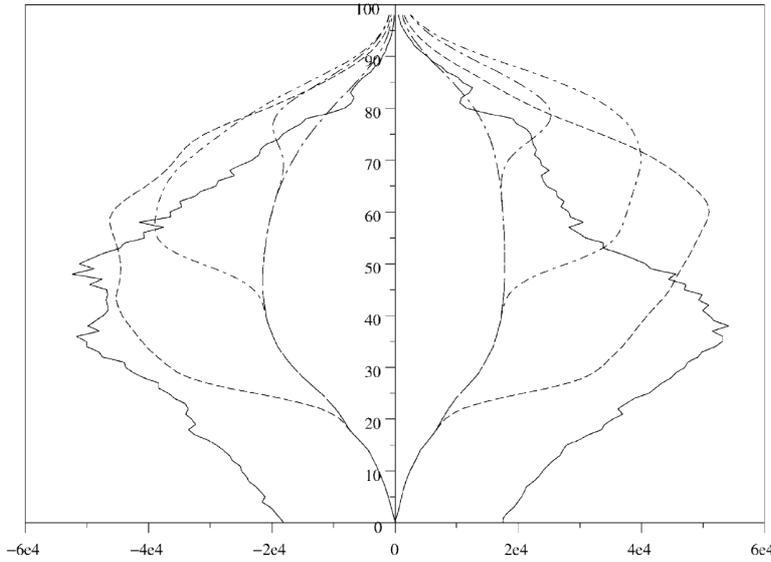


図3.フランスで生まれた人々と出生率の異なる移民。左に： $P_3(x,t)$ （移民男性）。右の方へ： $P_4(x,t)$ （移民女性）。

### 3番目の例

フランスと外国の男性と女性の人口の初期データとして、1999年の国勢調査の結果を使用します（INSEE、2001）。最初の例と同じ移民プロファイルを使用します。出生率を推定するために、我々はまだ数があると仮定します  $\varepsilon > 0$  と  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  そして  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  すべての  $x$  に対して。外国人の母親から生まれた子供の総数を知ること、 $\varepsilon = 0,56$ 。国籍の変化率については、 $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ 。法務省（2001）のデータから、 $\tau(x)$ 。図4（a）を参照してください。この見積もりは、図4（a）にも示されている3つのタイプの手続きの寄与を合計したものです。正式な規定なしで、または事前に（18歳で市民となるフランス生まれの外国人の子供）フランスとその子供たちと宣言（フランス市民との結婚）。年齢構造が年齢グループによってのみ与えられるすべてのケースで、近似として階段関数を使用しました。だから命令

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

外国人の年齢ピラミッドの図4（b）を生成します。ピラミッドは100年後に定常状態に収束します。

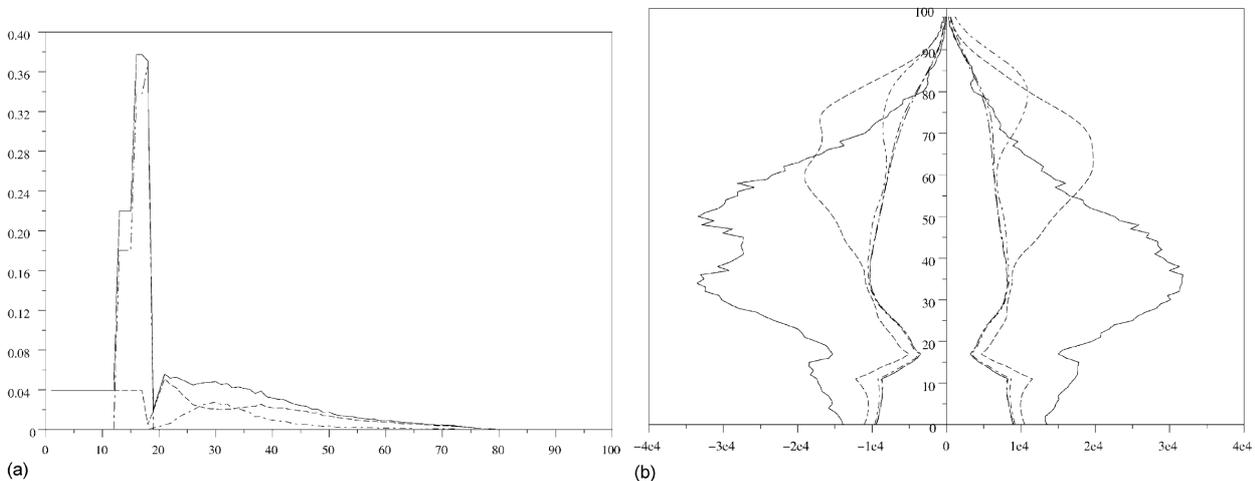


図4.出生率が異なるフランス人と外国人。(a) フランス国籍を取得する。転送速度  $\tau(x)$  そして3つのコンポーネント。(b) 左： $P_3(x,t)$ （外国人男性）。右の方へ： $P_4(x,t)$ （外国人女性）。

### 比較

さまざまなモデルを比較するために、図5に総人口の予測を示します。最も低い曲線は、移民なしの曲線です。最も高い曲線は、移民ありで出生率に違いがない曲線です（最初の例）。2つの非常に近い中間曲線は2番目と3番目の例に対応しており、フランスで生まれた人々（フランス市民）は移民（外国人）と区別されています。これらの最後の2つのモデルと移民の最初の例との間の総人口の差は、50年後に約70万人、100年後に約250万人です。

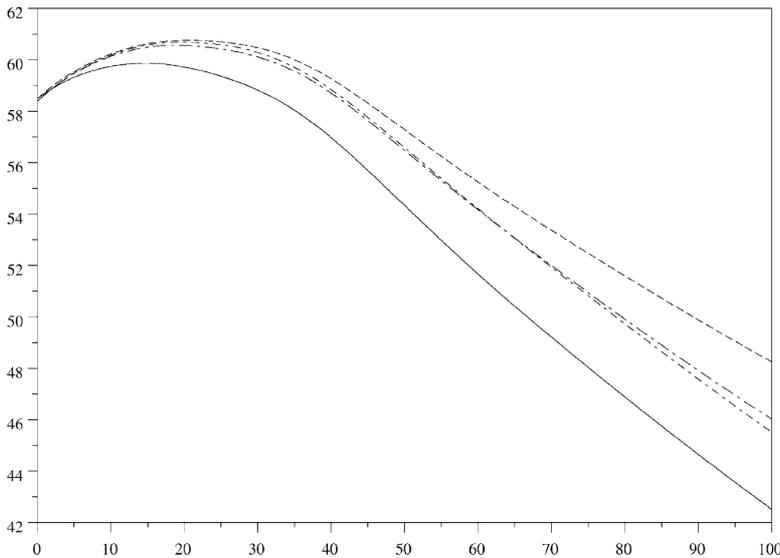


図5.さまざまな仮定の下での総人口（数百万単位）の予測。

## 5.より複雑なモデルにリンクする

Arino and Smith (1998) は、次のように一般化される、もう1つの変数を持つより複雑なモデルを研究しました。 $K$ の各サブ母集団は2つに分けられます。

- 誕生以来この亜集団にいる個人がいます。  $Q_k(x, t)$  それらの密度です。
- 以前に別の部分母集団にいたことがある個人。  $R_k(x, y, t)$   $y$ 年間亜集団 $k$ にいる ( $y < x$ ) 時間 $t$ における $x$ 歳のこれらの個人の密度です。

新生児は最初のタイプに属し、移住した個人と移民は2番目のタイプです。したがって、モデル

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

行列  $\Delta^Q$  そして  $\Delta^R$  対角線であり、

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

このモデルは、セクション3と4の3番目の例に適用され、8つの偏微分方程式とエッジ条件のシステムを提供します。

- フランス人の出生、
- 買収によるフランス人、
- フランス生まれの外国人、
- 海外で生まれた外国人。

出生と転送行列  $B^Q$ 、 $B^R$ 、 $\tau^Q$  そして  $\tau^R$  セクション3と同じ形式です。たとえば、 $\tau_{1,3}^R$  そして  $\tau_{2,4}^R$  の唯一の非ゼロ係数です  $\tau^R$ 。モデルは転送速度を正確に表すことができます。フランスで生まれたほとんどすべての外国人は18歳でフランス市民になり

ます。  $\tau_{1,3}^Q(x)$  として  $\tau_{2,4}^Q(x)$  したがって、  $x = 18$  年の場合にピークがあります。海外で生まれた外国人は、18歳未満であるか、フランスに5年未満しか住んでいない場合は（法律により）、一般的にフランス人になることはできません。  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  として  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  したがって、  $x < 18$  または  $y < 5$  の場合、0に近くなります。

モデルは進化のプロセスに正しく従いますが、たとえば次のようなデータが不明であるため、実装は困難です。  $R_k^0(x, y) \leq 1$  のための  $k \leq 4$ 。これらのデータは1999年の国勢調査メガファイルから入手できる場合がありますが、公開されていません。

この問題を回避する1つの方法は、  $\Delta^R$ 、  $B^R$  として  $\tau^R y$  に依存しないでください。しかし、これは多かれ少なかれ、複雑なモデルをセクション3.3のモデルに減らします。確かに、我々は定義します

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$  システムの唯一のソリューションです (1) - (2) - (3)

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

この後者のモデルの場合、データを使用して計算を行うことができます。結果は図4の結果とそれほど変わらないでしょう。

## 6.まとめ

線形モデル (1) - (2) - (3) は、魚の個体数など、他の問題に役立ちます。部分母集団は同じ場所に存在しない場合があります。Arino and Smith (1998) のように移住することで、さまざまなサイトのサブポピュレーションを想像できます。関数  $d_k(x)$  釣りを含めることができます。  $M_k(x)$  フランスのサケのような絶滅危惧種からの魚の再導入を表すことができます。

Hoppensteadt (1975)、Webb (1985)、Cushing (1998) のように、モデルの非線形または非均質バージョンを開発することもできます。

## 参考文献

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) *Differential – difference Equations*. New York : Academic Press.
- Berman A., Plemmons R. J. (1994) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) Projections de population à l’horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) *An Introduction to Structured Population Dynamics*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l’horizon 2050. *Économie et Statistique* 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A., Johnson C. R. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. *Tableaux thématiques – exploitation complémentaire*. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l’espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. *Études et Statistiques Justice*, 17.
- OMISTATS (1999) *Annuaire des migrations 1999*. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) *Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics*. New York : Marcel Dekker.