

# Il comportamento asintotico dell'equazione di McKendrick con l'immigrazione

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

## riassunto

L'obiettivo di questo articolo è discutere l'influenza dell'immigrazione in un modello matematico per l'evoluzione della struttura per età della popolazione. Nel caso subcritico, la struttura dell'età converge in uno stato stazionario. Presentiamo un programma che simula il modello e che viene utilizzato per le proiezioni per la popolazione della Francia. Insistiamo anche sul collegamento con un modello più complesso.

Parole chiave: demografia, struttura della popolazione, immigrazione, equazioni differenziali parziali, trasformazione di Laplace

## 1. Introduzione

Dividiamo una popolazione in  $K$  sottopopolazioni ( $K \geq 1$ ). Le variabili  $x$  e  $t$  rappresentano l'età e il tempo.

- $P_k(x, t)$  è la densità della sottopopolazione  $k$  di età  $x$  al tempo  $t$ .
- $M_k(x) \geq 0$  rappresenta l'arrivo di individui di età  $x$  che entrano nella sottopopolazione  $k$  e provengono da un'altra popolazione.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$  è la fertilità degli individui in sottopopolazione  $l$  che danno alla luce individui di tipo  $k$ .
- $P_k^0(x)$  è la struttura iniziale dell'età della sottopopolazione  $k$ .

Definiamo

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

Assumiamo  $B(x) = 0$  per tutti  $x$  sufficientemente grandi.  $d_k(x) \geq 0$  è la velocità con cui gli individui in sottopopolazione  $k$  lasciano la popolazione. Per  $k \neq l$ ,  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  è il tasso di trasferimento di individui da sottopopolazione  $l$  a sottopopolazione  $k$ . Definiamo

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

e  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ .  $P(x, t)$  è l'unica soluzione alle equazioni di McKendrick

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

Più,  $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ . Considera la matrice

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x) S(0, x) dx,$$

con

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

e  $S(\xi, \xi) = I$  (la matrice identità della dimensione  $K$ ). Partiamo dal presupposto che il raggio spettrale  $\rho$  di  $\hat{G}(0)$  è rigorosamente inferiore a 1. Definiamo

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx,$$

$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L.$$

Abbiamo quindi

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

In altre parole, la piramide dell'età  $x \mapsto P_k(x, t)$  converge in uno stato stabile se  $t \rightarrow +\infty$ .

Questi risultati sono dimostrati nella sezione 2. Lo studio del comportamento asintotico di  $P(x, t)$  ritorna a quello di un'equazione integrale

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$  e  $G(x)$  sono funzioni conosciute. Questo problema è stato studiato da Lotka (1939) nel caso di un'equazione ( $K = 1$ ). Per un sistema di equazioni ( $K > 1$ ), Bellman e Cooke (1963) hanno studiato il caso in cui  $\int_0^\infty G(x) dx$  è una matrice irriducibile (nel senso della teoria delle matrici positive di Perron e Frobenius). Crump (1970 e 1971) ha studiato il caso riducibile. Questi studi si sono concentrati sul caso in cui  $F(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$ . Nel nostro modello, il termine disomogeneo migrazione nelle equazioni di McKendrick implica questo  $F(t)$  ha un limite diverso da zero se  $t \rightarrow \infty$ . Se sottraggiamo lo stato stazionario, il problema disomogeneo si riduce a un problema omogeneo, per il quale possiamo applicare i risultati sull'esistenza e sul comportamento asintotico. Proponiamo tuttavia di seguito una dimostrazione per ottenere il secondo risultato ( $P(x, t) \geq 0$ ) e poiché la dimostrazione è abbastanza semplice con l'ipotesi subcritica  $\rho < 1$ . Non è necessario distinguere tra casi riducibili e casi irriducibili.

Nella sezione 3, presentiamo tre esempi che modellano le popolazioni umane. In ogni esempio,  $M(x)$  rappresenta l'immigrazione e  $d_k(x)$  mortalità, che potrebbe includere anche il tasso di emigrazione. Nel terzo esempio,  $\tau_{k,l}(x)$  rappresenta il tasso di variazione della nazionalità per gli stranieri. La sezione 4 presenta un programma che simula il modello e la sua applicazione ai tre esempi, utilizzando i dati provenienti dalla Francia. Nella sezione 5, creiamo il collegamento con un modello più complesso studiato da Arino e Smith (1998). Il modello più complesso rappresenta meglio le popolazioni reali. Tuttavia, coinvolge parametri che sono difficili da stimare a causa della mancanza di dati per le popolazioni umane nelle sezioni precedenti. La conclusione indica come il modello base (1) - (2) - (3) potrebbe essere applicato alle popolazioni animali. Le equazioni assumono quindi un significato diverso.

Infine, citiamo alcuni studi sulla modellizzazione dell'immigrazione. Barbu, Iannelli e Martcheva (2001) hanno studiato la controllabilità della struttura per età di una popolazione attraverso l'immigrazione selettiva per età. In Alvarado e Creedy (1998), ci sono modelli discreti.

## 2. Dimostrazione dei risultati

### Formulazione come equazione integrale

Il sistema di equazioni differenziali parziali lineari del primo ordine è ridotto a un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie del primo ordine lungo le curve caratteristiche. Abbiamo così

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

Definiamo  $\Phi(t) = P(0, t)$ . abbiamo

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

Dalle formule ottenuti per  $x > t$  e  $x < t$  che  $\Phi(x, t)$  è la soluzione di un'equazione integrale

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$  è la matrice

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$  è il vettore

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

L'equazione (1) ha una soluzione unica, come si può vedere con il metodo delle approssimazioni successive (Bellman e Cooke, 1963). Quindi anche l'equazione differenziale parziale iniziale ha una soluzione unica. Tuttavia, gli elementi sulla diagonale di  $\Delta$  sono positivi o zero e quelli esterni alla diagonale sono negativi o zero. Ciò implica che se  $a \leq b$ ,  $S(a, b)$  è una matrice con coefficienti positivi o zero (Berman e Plemmons, 1994 cap. 6 §3.12). Quindi abbiamo  $F(t) \geq 0$  e  $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Secondo il metodo delle approssimazioni successive,  $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ . Secondo (5) e (6),  $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Ciò dimostra i primi due risultati.

### Trasformazione di Laplace

$\xi_0(\Phi)$  è il numero reale più piccolo in modo tale che il seguente integrale vettoriale sia assolutamente convergente

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > \xi_0.$$

È la trasformata di Laplace di  $\Phi$ . Definiamo  $\xi_0(F)$  e  $\xi_0(G)$  nello stesso modo.  $B(x)$  è una funzione il cui supporto è compatto.  $G(x)$  è quindi anche una funzione con un supporto compatto e  $\xi_0(G) = -\infty$ . Quindi abbiamo

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

$I$  è la matrice identità di dimensione  $K$ . Abbiamo quindi

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

Prendiamo  $z \in \mathbb{C}$  con  $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ . abbiamo

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

Secondo Horn e Johnson (1985, §8.1.18 e 8.1.19), abbiamo per i corrispondenti raggi spettrali

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

e  $I - \hat{G}(z)$  è reversibile. Abbiamo così

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

Prendiamo la trasformata inversa di Laplace. Otteniamo qualsiasi numero reale  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  e  $\forall t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

Definiamo  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ . Formula (8) dà

$$F(t) = L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

Con  $z \in \mathbb{C}$  e  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Se  $L \neq 0$ , allora  $z = 0$  è il polo di  $\hat{F}$  con la parte reale più grande e  $L$  è il residuo in  $z = 0$ . Quindi  $z = 0$  è anche il polo di  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  con la parte reale più grande e  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L$  è il residuo in  $z = 0$ . La formula del residuo applicata a (9) dà

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Questo rimane vero se  $L = 0$ , perché allora tutti i poli di  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  sono nel semipiano sinistro del piano complesso.  $\Phi(t)$  converge quindi a 0 se  $t \rightarrow \infty$ . In tutti i casi, risulta da (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

Questo è il terzo risultato.

### 3. Esempi

Gli esempi in questa sezione sono progettati per rappresentare le popolazioni umane:  $M_k(x)$  è immigrazione e  $d_k(x)$  mortalità. Se c'è emigrazione, cambia solo  $d_k(x)$ .

#### Primo esempio

La popolazione è divisa tra uomini ( $k = 1$ ) e donne ( $k = 2$ ). Assumiamo

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

il che significa che il numero di nascite dipende dal numero di donne ma non dal numero di uomini. Per semplificare le formule, supponiamo che  $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ . Questo presupposto significa che le probabilità che un neonato sia un maschio o una femmina sono uguali (in pratica, questo è quasi vero).

Poiché  $B$  è una matrice triangolare più alta,  $\hat{G}(0)$  ha la stessa struttura. Quindi il raggio spettrale è

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Assumiamo  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . Il vettore  $R$  è facilmente calcolabile:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

Abbiamo quindi  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du.$$

## Secondo esempio

La popolazione è divisa tra uomini nati nel paese ( $k = 1$ ), donne nate nel paese ( $k = 2$ ) e immigrati di prima generazione, uomini ( $k = 3$ ) o donne ( $k = 4$ ). Assumiamo

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

il che significa che le donne immigrate danno alla luce bambini nel paese, con un tasso diverso da quello delle donne nate nel paese. Supponiamo anche che  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  e  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ . Perché  $B$  e  $\hat{G}(0)$  sono matrici triangolari superiori,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$  non dipende da  $b_4$ . In questo modello, un alto tasso di fertilità per gli immigrati non può trasformare una situazione subcritica in una situazione supercritica ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ ). Assumiamo  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . Il vettore  $R$  è ancora facilmente calcolabile:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

Abbiamo quindi  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du,$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du.$$

Si noti che questo secondo esempio fornisce di nuovo il primo esempio se  $d_1 = d_3$ ,  $d_2 = d_4$  e  $b_2 = b_4$ , cioè se gli immigrati di prima generazione seguono immediatamente i tassi di fertilità e mortalità locali. In effetti,  $P_1 + P_3$  sostituisce  $P_1$  e  $P_2 + P_4$  sostituisce  $P_2$ .

## Terzo esempio

La popolazione è divisa in cittadini, uomini ( $k = 1$ ) o donne ( $k = 2$ ) e stranieri, uomini ( $k = 3$ ) o donne ( $k = 4$ ). Assumiamo

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

ciò significa che le donne straniere danno alla luce bambini stranieri, ma gli stranieri possono cambiare la loro nazionalità (vengono trasferiti dalla sottopopolazione 3 o 4 alla sottopopolazione 1 o 2). Per semplificare, supponiamo  $d_1 = d_3$  e  $d_2 = d_4$ : la mortalità degli stranieri è la stessa di quella dei cittadini. Assumiamo anche  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  e  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ . Abbiamo quindi

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

con

$$S_{1,1}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du},$$

$$S_{3,3}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du},$$

e

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz,$$

$$S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

Abbiamo così

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$  è una matrice triangolare superiore,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} ; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

Assumiamo  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . Il vettore  $R$  è ancora facilmente calcolabile. Definiamo

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx$$

$$L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

abbiamo  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  e

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Finalmente abbiamo  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

Si noti che questo terzo esempio è ridotto al primo esempio se  $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ , vale a dire se le sottopopolazioni  $\{1,2\}$  e  $\{3,4\}$  non si mescolano.

## 4. Software

Per illustrare questo studio, abbiamo scritto un programma che funziona nell'ambiente Scilab, un software gratuito per il calcolo numerico disponibile su [www-rocq.inria.fr/scilab](http://www-rocq.inria.fr/scilab). Il programma, chiamato `census.sci`, può essere trovato con i file che contengono i dati per la Francia all'indirizzo [www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html](http://www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html). Risolve il sistema di equazioni differenziali parziali usando il metodo della differenza finita. Noi scegliamo  $\delta t > 0$  e  $\delta x > 0$ .  $P_k^{i,j}$  è il valore di  $P_k(x, t)$  Se  $x = i \delta x$  e  $t = j \delta t$ . Usiamo notazioni simili per  $\Delta_{k,l}$ ,  $M_k$ ,  $B_{k,l}$  e  $P_k^0$ . Abbiamo quindi

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^\infty B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Si noti la discretizzazione, progressiva rispetto al tempo e retrograda rispetto all'età. Le equazioni sono in effetti equazioni di avanzamento, quindi dobbiamo tenere conto della direzione delle curve caratteristiche per avere uno schema convergente. La condizione  $\delta t \leq \delta x$  deve anche essere rispettato. Nel programma, abbiamo sempre preso  $\delta x$  pari a un anno.

## Spiegazione

La sintassi è la seguente:

census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers).

definizioni:

- X, K: numeri interi positivi
- annees: vettore di numeri interi positivi o zero
- gauche,droit: Matrici di colonne K di numeri reali
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: vettori di stringhe di caratteri
- bindices, dindices: matrici a due colonne di numeri interi positivi  $\leq K$
- mindices: vettore di numeri interi positivi  $\leq K$ .

Senso:

- X: età massima
- K: numero di sottopopolazioni
- annees: tempi in cui verrà disegnata la popolazione
- gauche, droite: le linee a sinistra (rispettivamente a destra) definiscono le combinazioni lineari di  $(P_1, \dots, P_K)$ , che sono rappresentati a sinistra (rispettivamente a destra) nella figura
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: nomi di file che contengono i dati; questi file sono vettori di colonna
- bindices, dindices: le righe di queste matrici danno gli indici (riga e colonna) dei coefficienti diversi da zero delle matrici  $B$  e  $\Delta$ , il cui valore è indicato in bfichiers e dfichiers. Il numero di righe di bindices (Resp. dindices) è quindi uguale alla lunghezza del vettore bfichiers (Resp. dfichiers)
- mindices: Gli indici di coefficienti non-nulli del vettore  $M$ . Il valore è in mfichiers.

### Primo esempio

Come dati iniziali per le popolazioni maschili e femminili, prendiamo i risultati del censimento del 1999 in Francia. I tassi di fertilità e mortalità sono calcolati con i dati dello stesso anno (Beaume, Doisneau e Vatan, 2001): vedere la Figura 1 (a). Se l'immigrazione è zero, allora

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maledath.dat' 'femaledeath.dat'],[],[])
```

dà la Figura 1 (b), dove la popolazione alla fine converge a 0, ma abbastanza lentamente.

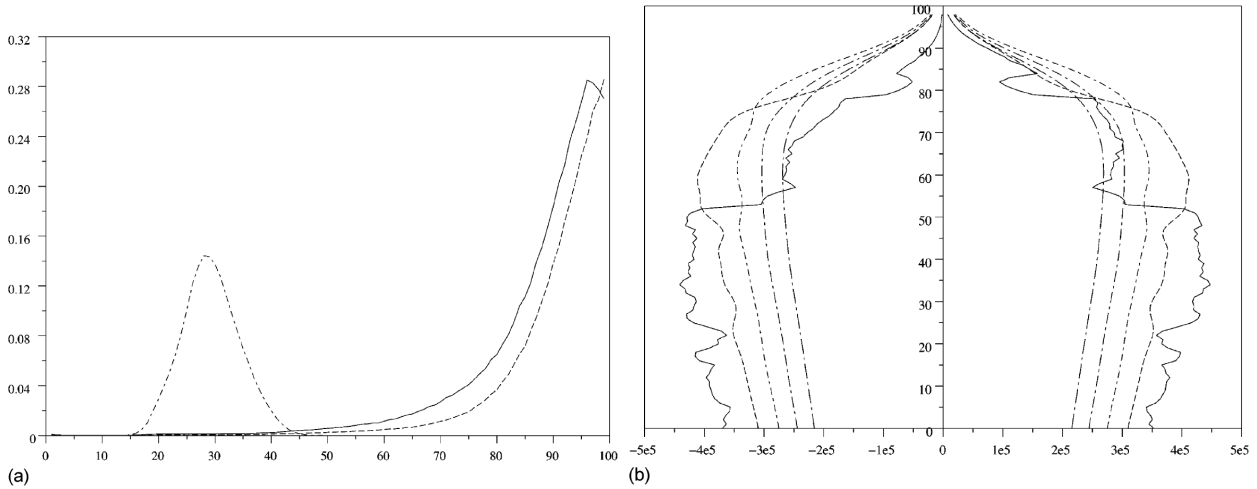


Figura 1. Senza immigrazione. a) nascite totali:  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ . Mortalità:  $x \mapsto d_1(x)$  e  $x \mapsto d_2(x)$ . (b) Sinistra:  $P_1(x, t)$ . A destra:  $P_2(x, t)$ . Linea continua: situazione nel 1999. Linee tratteggiate: proiezioni dopo 25, 50, 75 e 100 anni.

L'immigrazione è ora inclusa  $M(x)$ . Dinh (1994) calcolato  $M(x)$  utilizzando i risultati di due censimenti consecutivi e i dati su nascite e morti tra questi due censimenti. Il metodo ha dato risultati ragionevoli fino agli anni 80. Ma tra il 1990 e il 1999, l'immigrazione totale era dello stesso ordine degli errori sui censimenti, quindi i calcoli non hanno dato un risultato ragionevole. Un altro metodo consiste nell'utilizzare i dati annuali dell'Ufficio per le migrazioni internazionali (1999), che è sintetizzato nella Figura 2 (a). L'immigrazione totale è la somma dei lavoratori immigrati, degli immigrati che hanno ottenuto un permesso di soggiorno e degli immigrati nel contesto del ricongiungimento familiare. Abbiamo trovato i dati per età per gli immigrati che hanno ottenuto un permesso di soggiorno (da cui la funzione scala nella Figura 2 (a)), ma non per gli adulti nel contesto del ricongiungimento familiare. Per i calcoli, sono utili solo le curve esterne di figura 2 (a). Quindi le istruzioni

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maledath.dat' 'femaledeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produce la Figura 2 (b). La struttura della popolazione converge lentamente in uno stato stazionario con una piccola popolazione totale (non mostrata nella figura).

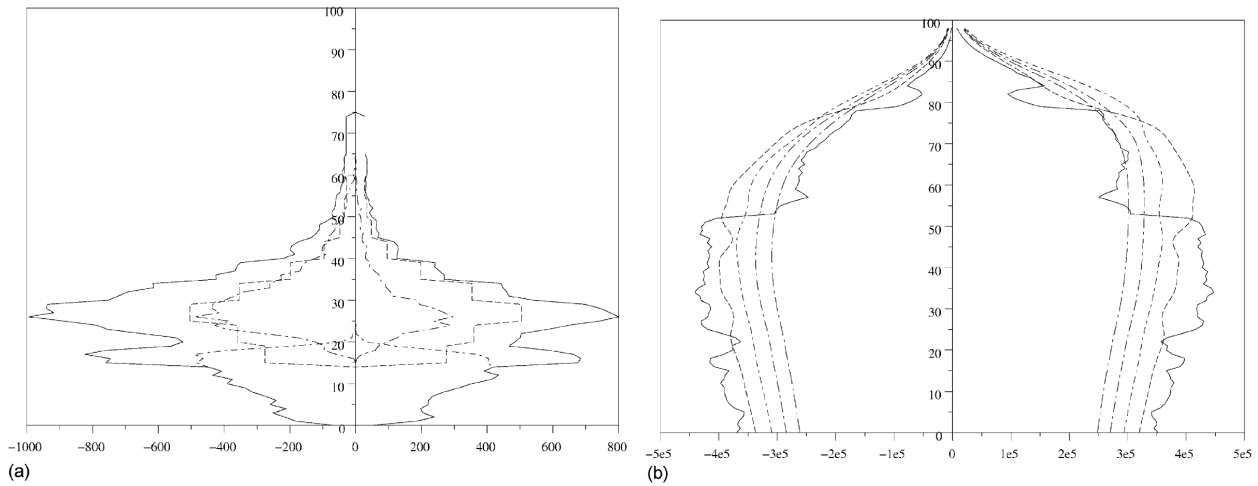


Figura 2. Influenza dell'immigrazione. (a) Immigrazione totale e le sue 3 componenti. A sinistra:  $x \mapsto M_1(x)$ . A destra:  $x \mapsto M_2(x)$ . (b) Sinistra:  $P_1(x, t)$ . A destra:  $P_2(x, t)$ . Linea continua: situazione nel 1999. Linea tratteggiata: proiezioni dopo 25, 50, 75 e 100 anni.

Questo tipo di modello (con  $K = 2$ ) è simile alle versioni discrete utilizzate da INSEE (Brutel, 2001). È facile criticare questo modello. Da un lato, utilizziamo dati sull'immigrazione piuttosto bassi. D'altra parte, i dati attuali vengono utilizzati per calcolare il tasso di natalità. Attualmente, questo tasso è piuttosto elevato. Ciò è in parte dovuto all'elevata percentuale di immigrati nella popolazione e al fatto che gli immigrati hanno tassi di fertilità più elevati rispetto ai francesi. Questo ci porta ai seguenti due modelli.

### Secondo esempio

Come dati iniziali per le popolazioni maschili e femminili nate in Francia o immigrate, prendiamo i risultati del censimento del 1999 (INSEE, 2001). Usiamo lo stesso profilo di immigrazione del primo esempio. Per stimare i tassi di fertilità, supponiamo che ci sia un numero  $\varepsilon > 0$  con  $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  e  $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  per tutti  $x$ . Conosciamo il numero totale di bambini nati da madri straniere (che sono più o meno un sottoinsieme di donne immigrate) e anche il numero di donne straniere. Otteniamo  $\varepsilon = 0,6$ . Allora

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maledeath.dat' 'femaledeath.dat' 'maledeath.dat' 'femaledeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produce la Figura 3 per le piramidi di età degli immigrati. La piramide converge rapidamente (dopo 100 anni) in uno stato stazionario.

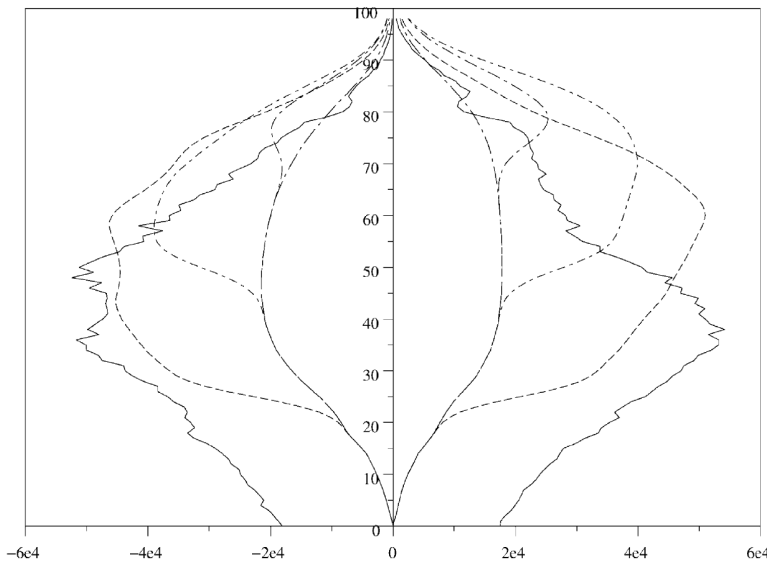


Figura 3. Persone nate in Francia e immigrati con diversi tassi di fertilità. A sinistra:  $P_3(x, t)$  (uomini immigrati). A destra:  $P_4(x, t)$  (donne immigrate).

### Terzo esempio

Come dati iniziali per la popolazione maschile e femminile di nazionalità francese e straniera, prendiamo i risultati del censimento del 1999 (INSEE, 2001). Usiamo lo stesso profilo di immigrazione del primo esempio. Per stimare i tassi di fertilità, supponiamo ancora che ci sia un numero  $\varepsilon > 0$  con  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  e  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  per tutti  $x$ . Conoscendo il numero totale di bambini nati da madri straniere, otteniamo  $\varepsilon = 0,56$ . Per i tassi di cambio di nazionalità, si presume che  $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ . Con i dati del Ministero della Giustizia (2001), abbiamo una stima di  $\tau(x)$ . Vedi figura 4 (a). Questa stima riassume i contributi di tre tipi di procedure, mostrati anche nella Figura 4 (a): senza formalità o in anticipo (bambini stranieri nati in Francia che diventano cittadini a 18 anni), per decreto (stranieri che

hanno vissuto a lungo in Francia e i loro figli) e mediante dichiarazione (matrimonio con un cittadino francese). In tutti i casi in cui la struttura per età è data solo dalla fascia di età, abbiamo usato le funzioni della scala come approssimazione. Quindi le istruzioni

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produce la Figura 4 (b) per le piramidi di età degli stranieri. La piramide converge dopo 100 anni in uno stato stazionario.

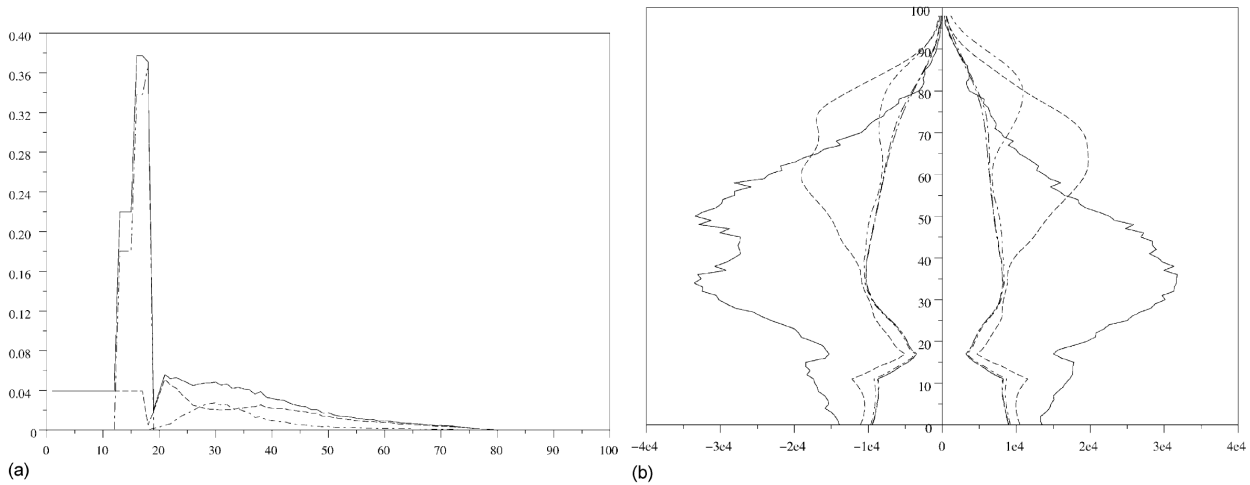


Figura 4. Francesi e stranieri con diversa fertilità. (a) Ottenere la nazionalità francese. Tasso di trasferimento  $\tau(x)$  e i 3 componenti. (b) Sinistra:  $P_3(x, t)$  (uomini stranieri). A destra:  $P_4(x, t)$  (donne straniere).

### Confronto

Per confrontare i diversi modelli, la Figura 5 mostra le proiezioni per la popolazione totale. La curva più bassa è quella senza immigrazione. La curva più alta è quella con l'immigrazione ma senza differenze di fertilità (primo esempio). Le due curve intermedie molto vicine corrispondono al secondo e al terzo esempio, in cui le persone nate in Francia (resp. Cittadini francesi) si distinguono dagli immigrati (resp. Stranieri). La differenza per la popolazione totale tra questi ultimi due modelli e il primo esempio di immigrazione è di circa 0,7 milioni dopo 50 anni e di circa 2,5 milioni dopo 100 anni.

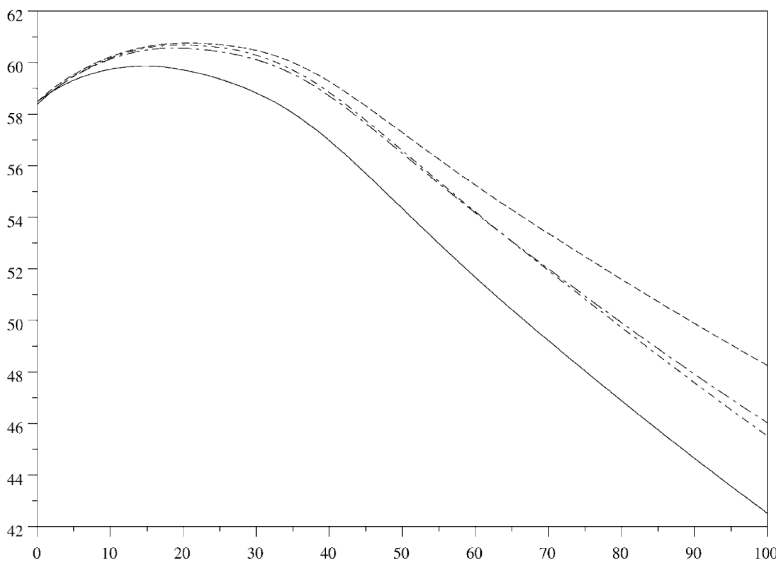


Figura 5. Proiezioni per la popolazione totale (in milioni) con ipotesi diverse.

## 5. Collegamento a un modello più complesso

Arino e Smith (1998) hanno studiato un modello più complesso con un'altra variabile, che si generalizza come segue. Ciascuna delle sottopopolazioni  $K$  è divisa in due:

- ci sono individui che sono stati in questa sotto-popolazione sin dalla nascita.  $Q_k(x, t)$  è la loro densità.
- individui che sono stati in un'altra sottopopolazione prima.  $R_k(x, y, t)$  è la densità di questi individui di età  $x$  al tempo  $t$ , che sono stati in sub-popolazione di  $k$  per  $y$  anni ( $y < x$ ).

I neonati appartengono al primo tipo, mentre gli individui trasferiti e gli immigrati sono del secondo tipo. Da qui il modello



$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

matrici  $\Delta^Q$  e  $\Delta^R$  sono diagonali e

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

Questo modello, applicato al terzo esempio delle sezioni 3 e 4, fornisce un sistema di otto equazioni differenziali parziali e condizioni di fronte per

- I francesi per nascita,
- i francesi per acquisizione,
- gli stranieri nati in Francia,
- gli stranieri nati all'estero.

Matrici di nascita e trasferimento  $B^Q, B^R, \tau^Q$  e  $\tau^R$  ha la stessa forma della sezione 3: ad esempio,  $\tau_{1,3}^R$  e  $\tau_{2,4}^R$  sono gli unici coefficienti diversi da zero di  $\tau^R$ . Il modello può rappresentare con precisione le velocità di trasferimento. Quasi tutti gli stranieri nati in Francia diventano cittadini francesi a 18 anni.  $\tau_{1,3}^Q(x)$  e  $\tau_{2,4}^Q(x)$  quindi avere un picco se  $x = 18$  anni. Gli stranieri nati all'estero non possono generalmente diventare francesi se hanno meno di 18 anni o se hanno vissuto in Francia per meno di cinque anni (secondo la legge).  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  e  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  sono quindi vicini a zero se  $x < 18$  o  $y < 5$ .

Sebbene il modello segua correttamente i processi evolutivi, è difficile da implementare perché i dati non sono noti, come ad esempio  $R_k^0(x, y)$  per  $1 \leq k \leq 4$ . Questi dati potrebbero essere disponibili attraverso il mega file del censimento del 1999, ma non sono stati pubblicati.

Un modo per aggirare questo problema è ipotizzarlo  $\Delta^R, B^R$  e  $\tau^R$  non dipendere da  $y$ . Ma questo riduce più o meno il modello complesso a quello della sezione 3.3. Anzi, definiamo

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$  è l'unica soluzione del sistema (1) - (2) - (3) con

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Per quest'ultimo modello, sono disponibili dati per effettuare i calcoli. Il risultato non sarebbe molto diverso da quello della Figura 4.

## 6. Conclusione

Il modello lineare (1) - (2) - (3) potrebbe essere utile per altri problemi, ad esempio per le popolazioni di pesci. Le sottopopolazioni potrebbero non risiedere nello stesso posto. Si possono immaginare sottopopolazioni in siti diversi, con migrazioni come in Arino e Smith (1998). Funzione  $d_k(x)$  può includere la pesca.  $M_k(x)$  potrebbe rappresentare la reintroduzione di pesci di una specie in via di estinzione, come il salmone in Francia.

Si possono anche sviluppare versioni non lineari o non omogenee del modello, come in Hoppensteadt (1975), Webb (1985) o Cushing (1998).

### Riferimenti bibliografici

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) *Differential – difference Equations*. New York : Academic Press.

- Berman A. , Plemmons R. J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) An Introduction to Structured Population Dynamics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. Économie et Statistique 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A. , Johnson C. R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
- OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics. New York : Marcel Dekker.