

# El comportamiento asintótico de la ecuación de McKendrick con la inmigración.

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

## resumen

El objetivo de este artículo es discutir la influencia de la inmigración en un modelo matemático para la evolución de la estructura de edad de la población. En el caso subcrítico, la estructura de edad converge a un estado estacionario. Presentamos un programa que simula el modelo y que se utiliza para proyecciones para la población de Francia. También insistimos en el enlace con un modelo más complejo.

Palabras clave: demografía, estructura de la población, inmigración, ecuaciones diferenciales parciales, transformación de Laplace

## 1. Introducción

Dividimos una población en  $K$  subpoblaciones ( $K \geq 1$ ). Las variables  $x$  y  $t$  representan la edad y el tiempo.

- $P_k(x, t)$  es la densidad de la subpoblación  $k$  de edad  $x$  en el tiempo  $t$ .
- $M_k(x) \geq 0$  representa la llegada de individuos de edad  $x$  que ingresan a la subpoblación  $k$  y provienen de otra población.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$  es la fertilidad de los individuos en la subpoblación  $l$  que dan a luz a individuos del tipo  $k$ .
- $P_k^0(x)$  es la estructura de edad inicial de la subpoblación  $k$ .

Definimos

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

Asumimos  $B(x) = 0$  para todo  $x$  suficientemente grande.  $d_k(x) \geq 0$  es la tasa a la cual los individuos en la subpoblación  $k$  abandonan la población. Para  $k \neq l$ ,  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  es la tasa de transferencia de individuos de la subpoblación  $l$  a la subpoblación  $k$ . Definimos

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

y  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ .  $P(x, t)$  es la única solución para las ecuaciones de McKendrick

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

De más,  $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ . Considera la matriz

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x) S(0, x) dx,$$

con

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

y  $S(\xi, \xi) = I$  (la matriz de identidad de tamaño  $K$ ). Suponemos que el radio espectral  $\rho$  de  $\hat{G}(0)$  es estrictamente menor que 1. Definimos

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx,$$

$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L.$$

Tenemos entonces

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

En otras palabras, la pirámide de edad  $x \mapsto P_k(x, t)$  converge a un estado estable si  $t \rightarrow +\infty$ .

Estos resultados se demuestran en la sección 2. El estudio del comportamiento asintótico de  $P(x, t)$  vuelve a la de una ecuación integral

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$  y  $G(x)$  son funciones conocidas Lotka (1939) estudió este problema en el caso de una ecuación ( $K = 1$ ) Para un sistema de ecuaciones ( $K > 1$ ), Bellman y Cooke (1963) estudiaron el caso donde  $\int_0^\infty G(x) dx$  es una matriz irreducible (en el sentido de la teoría de matrices positivas de Perron y Frobenius). Crump (1970 y 1971) estudió el caso reducible. Estos estudios se han centrado en el caso donde  $F(t) \rightarrow 0$  Si  $t \rightarrow \infty$ . En nuestro modelo, el término migración no homogénea en las ecuaciones de McKendrick implica que  $F(t)$  tiene un límite distinto de cero si  $t \rightarrow \infty$ . Si restamos el estado estacionario, el problema no homogéneo se reduce a un problema homogéneo, para lo cual podemos aplicar los resultados sobre la existencia y el comportamiento asintótico. Sin embargo, proponemos a continuación una demostración para obtener el segundo resultado. ( $P(x, t) \geq 0$ ) y porque la prueba es bastante simple con la hipótesis subcrítica  $\rho < 1$ . No hay necesidad de distinguir entre casos reducibles e irreducibles.

En la Sección 3, presentamos tres ejemplos que modelan las poblaciones humanas. En cada ejemplo,  $M(x)$  representa la inmigración y  $d_k(x)$  mortalidad, que también podría incluir la tasa de emigración. En el tercer ejemplo,  $\tau_{k,l}(x)$  representa la tasa de cambio de nacionalidad para extranjeros. La Sección 4 presenta un programa que simula el modelo y su aplicación a los tres ejemplos, utilizando datos de Francia. En la sección 5, hacemos el enlace con un modelo más complejo estudiado por Arino y Smith (1998). El modelo más complejo representa mejor a las poblaciones reales. Sin embargo, involucra parámetros que son difíciles de estimar debido a la falta de datos para las poblaciones humanas en las secciones anteriores. La conclusión indica cómo el modelo básico (1) - (2) - (3) podría aplicarse a las poblaciones animales. Las ecuaciones luego adquieren un significado diferente.

Finalmente, mencionemos algunos estudios sobre modelos de inmigración. Barbu, Iannelli y Martcheva (2001) estudiaron la capacidad de control de la estructura de edad de una población mediante la inmigración selectiva por edad. En Alvarado y Creedy (1998), hay modelos discretos.

## 2. Demostración de resultados.

### La formulación como una ecuación integral.

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden a lo largo de las curvas características. Así tenemos

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

Definimos  $\Phi(t) = P(0, t)$ . Se tiene

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

De las fórmulas obtenidas para  $x > t$  y  $x < t$  se deduce que  $\Phi(x, t)$  es la solución de una ecuación integral

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$  es la matriz

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$  es el vector

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

La ecuación (1) tiene una solución única, como se puede ver con el método de aproximaciones sucesivas (Bellman y Cooke, 1963). Entonces, la ecuación diferencial parcial inicial también tiene una solución única. Sin embargo, los elementos en la diagonal de  $\Delta$  son positivos o cero y los que están fuera de la diagonal son negativos o cero. Esto implica que si  $a \leq b$ ,  $S(a, b)$  es una matriz con coeficientes positivos o cero (Berman y Plemmons, 1994 cap. 6 §3.12). Entonces tenemos  $F(t) \geq 0$  y  $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Según el método de aproximaciones sucesivas,  $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ . De acuerdo con (5) y (6),  $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ . Esto demuestra los dos primeros resultados.

### Transformación de Laplace

$\xi_0(\Phi)$  es el número real más pequeño de modo que la siguiente integral vectorial es absolutamente convergente

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > \xi_0.$$

Es la transformada de Laplace de  $\Phi$ . Definimos  $\xi_0(F)$  y  $\xi_0(G)$  de la misma forma.  $B(x)$  es una función cuyo soporte es compacto.  $G(x)$  Por lo tanto, también es una función con un soporte compacto y  $\xi_0(G) = -\infty$ . Entonces tenemos

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

$I$  es la matriz identidad de tamaño  $K$ . Tenemos entonces

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

Se toma  $z \in \mathbb{C}$  con  $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$ . Se tiene

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

Según Horn y Johnson (1985, §8.1.18 y 8.1.19), tenemos para los rayos espectrales correspondientes

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

y  $I - \hat{G}(z)$  Es reversible. Así tenemos

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

Tomamos la transformada inversa de Laplace. Obtenemos cualquier número real  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  y  $\forall t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

Definimos  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ . La fórmula (8) da

$$F(t) = L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

Con  $z \in \mathbb{C}$  y  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Si  $L \neq 0$ , entonces  $z = 0$  es el polo de  $\hat{F}$  con la mayor parte real, y  $L$  es el residuo en  $z = 0$ . Entonces  $z = 0$  es también el polo de  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  con la mayor parte real y  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L$  es el residuo en  $z = 0$ . La fórmula residual aplicada a (9) da

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Esto sigue siendo cierto si  $L = 0$ , porque entonces todos los polos de  $(I - \hat{G}(z))^{-1}\hat{F}(z)$  están en el semiplano izquierdo del plano complejo.  $\Phi(t)$  por lo tanto converge a 0 si  $t \rightarrow \infty$ . En todos los casos, resulta de (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

Este es el tercer resultado.

### 3. Ejemplos

Los ejemplos en esta sección están diseñados para representar poblaciones humanas:  $M_k(x)$  es inmigración y  $d_k(x)$  mortalidad. Si hay emigración, solo cambia  $d_k(x)$ .

#### Primer ejemplo

La población se divide entre hombres ( $k = 1$ ) y mujeres ( $k = 2$ ). Asumimos

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

lo que significa que el número de nacimientos depende del número de mujeres pero no del número de hombres. Para simplificar las fórmulas, suponga que  $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ . Esta suposición significa que las posibilidades de que un recién nacido sea niño o niña son iguales (en la práctica, esto es casi cierto).

Debido a que  $B$  es una matriz triangular más alta,  $\hat{G}(0)$  Tiene la misma estructura. Entonces el radio espectral es

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Asumimos  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . El vector  $R$  se calcula fácilmente:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

Tenemos entonces  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du.$$

## Segundo ejemplo

La población se divide entre hombres nacidos en el país ( $k = 1$ ), mujeres nacidas en el país ( $k = 2$ ) e inmigrantes de primera generación, hombres ( $k = 3$ ) o mujeres ( $k = 4$ ). Asumimos

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

lo que significa que las mujeres inmigrantes dan a luz a niños locales, con una tasa diferente a la de las mujeres nativas. Supongamos también que  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  y  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ . Porque  $B$  y  $\hat{G}(0)$  son matrices triangulares superiores,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$  no depende de  $b_4$ . En este modelo, una alta tasa de fertilidad para los inmigrantes no puede cambiar una situación subcrítica en una situación supercrítica ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ ) Asumimos  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . El vector  $R$  todavía se calcula fácilmente:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

Tenemos entonces  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du,$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du.$$

Tenga en cuenta que este segundo ejemplo da el primer ejemplo nuevamente si  $d_1 = d_3$ ,  $d_2 = d_4$  y  $b_2 = b_4$ , es decir, si los inmigrantes de primera generación siguen inmediatamente las tasas locales de fertilidad y mortalidad. En efecto,  $P_1 + P_3$  reemplaza  $P_1$  y  $P_2 + P_4$  reemplaza  $P_2$ .

## Tercer ejemplo

La población se divide en nacionales, hombres ( $k = 1$ ) o mujeres ( $k = 2$ ), y extranjeros, hombres ( $k = 3$ ) o mujeres ( $k = 4$ ). Asumimos

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

lo que significa que las mujeres extranjeras dan a luz a niños extranjeros, pero las extranjeras pueden cambiar su nacionalidad (son transferidas de la subpoblación 3 o 4 a la subpoblación 1 o 2). Para simplificar, asumimos  $d_1 = d_3$  y  $d_2 = d_4$ : la mortalidad de los extranjeros es la misma que la de los nacionales. También asumimos  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  y  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ . Tenemos entonces

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

con

$$S_{1,1}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du},$$

$$S_{3,3}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du},$$

y

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz,$$

$$S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

Así tenemos

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$  es una matriz triangular superior

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} ; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

Asumimos  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . El vector  $R$  todavía se calcula fácilmente. Definimos

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx$$

$$L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

Se tiene  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  y

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Finalmente tenemos  $\forall x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

Tenga en cuenta que este tercer ejemplo se reduce al primer ejemplo si  $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ , es decir, si las subpoblaciones  $\{1,2\}$  y  $\{3,4\}$  no se mezclan.

## 4. Software

Para ilustrar este estudio, escribimos un programa que se ejecuta en el entorno Scilab, un software gratuito para el cálculo numérico disponible en la dirección [www-rocq.inria.fr/scilab](http://www-rocq.inria.fr/scilab). El programa, denominado `census.sci`, se puede encontrar con los archivos que contienen los datos de Francia en la dirección [www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html](http://www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html). Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales parciales utilizando el método de diferencia finita. Nosotros elegimos  $\delta t > 0$  y  $\delta x > 0$ .  $P_k^{i,j}$  es el valor de  $P_k(x, t)$  Si  $x = i \delta x$  y  $t = j \delta t$ . Usamos notaciones similares para  $\Delta_{k,l}$ ,  $M_k$ ,  $B_{k,l}$  y  $P_k^0$ . Tenemos entonces

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^\infty B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Tenga en cuenta las discretizaciones, progresivas en comparación con el tiempo y retrógradas en comparación con la edad. Las ecuaciones son, de hecho, ecuaciones de advección, por lo que debemos tener en cuenta la dirección de las curvas características para tener un esquema convergente. La condición  $\delta t \leq \delta x$  También debe ser respetado. En el programa, siempre tomamos  $\delta x$  igual a un año.

## Explicación

La sintaxis es la siguiente:

census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers).

Definiciones:

- X, K: enteros positivos
- annees: vector de enteros positivos o cero
- gauche,droit: Matrices de columnas K de números reales
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: vectores de cadenas de caracteres
- bindices, dindices: matrices de dos columnas de enteros positivos  $\leq K$
- mindices: vector de enteros positivos  $\leq K$ .

Sentido:

- X: edad máxima
- K: número de subpoblaciones
- annees: tiempos en que se dibujará la población
- gauche, droite: las líneas a la izquierda (respectivamente a la derecha) definen las combinaciones lineales de  $(P_1, \dots, P_K)$ , que se representan a la izquierda (resp. a la derecha) en la figura
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: nombres de archivo que contienen los datos; estos archivos son vectores de columna
- bindices, dindices: las filas de estas matrices dan los índices (fila y columna) de los coeficientes distintos de cero de las matrices B y  $\Delta$ , cuyo valor se da en bfichiers y dfichiers. El número de líneas de bindices (resp. dindices) es igual a la longitud del vector bfichiers (resp. dfichiers)
- mindices: Índices de coeficientes no nulos del vector M. El valor está en mfichiers.

### Primer ejemplo

Como datos iniciales para las poblaciones masculina y femenina, tomamos los resultados del censo de 1999 en Francia. Las tasas de fertilidad y mortalidad se calculan con datos del mismo año (Beaume, Doisneau y Vatan, 2001): ver Figura 1 (a). Si la inmigración es cero, entonces

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaledeath.dat'],[],[])
```

da la Figura 1 (b), donde la población finalmente converge a 0, pero muy lentamente.

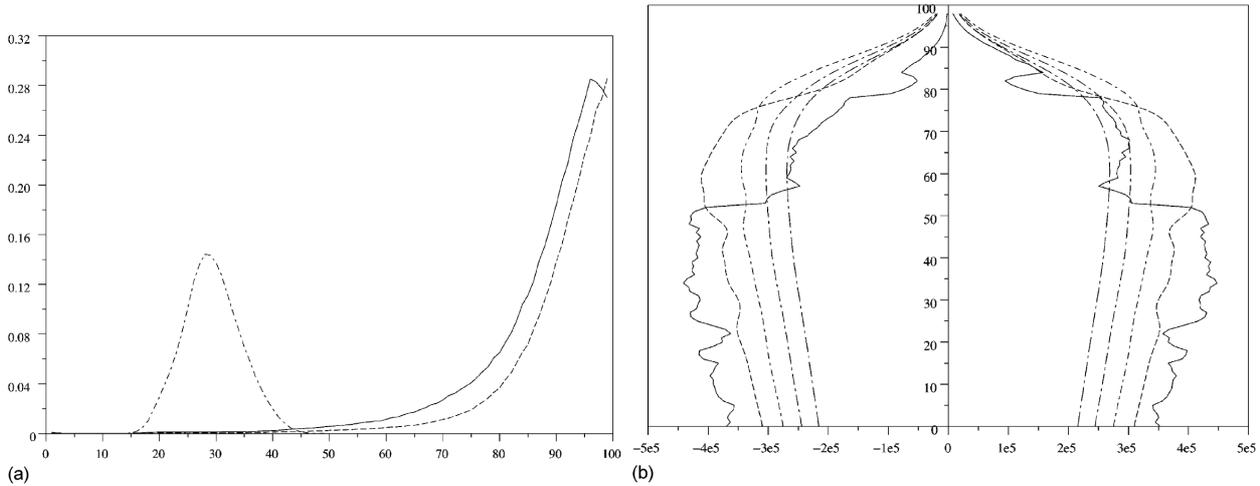


Figura 1. Sin inmigración. (a) Total de nacimientos:  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ . Mortalidad:  $x \mapsto d_1(x)$  y  $x \mapsto d_2(x)$ . (b) Izquierda:  $P_1(x, t)$ . A la derecha:  $P_2(x, t)$ . Línea continua: situación en 1999. Líneas de puntos: proyecciones después de 25, 50, 75 y 100 años.

La inmigración ahora está incluida  $M(x)$ . Dinh (1994) calculado  $M(x)$  utilizando los resultados de dos censos consecutivos y los datos sobre nacimientos y defunciones entre estos dos censos. El método dio resultados razonables hasta la década de 1980. Pero entre 1990 y 1999, la inmigración total fue del mismo orden que los errores en los censos, por lo que los cálculos no dieron un resultado razonable. Otro método es utilizar los datos anuales de la Oficina de Migración Internacional (1999), que se resumen en la Figura 2 (a). La inmigración total es la suma de trabajadores inmigrantes, inmigrantes que han obtenido un permiso de residencia e inmigrantes en el contexto de la reunificación familiar. Encontramos datos por edad para los inmigrantes que obtuvieron un permiso de residencia (de ahí la función de escalera en la Figura 2 (a)), pero no para adultos en el contexto de la reunificación familiar. Para los cálculos, solo son útiles las curvas externas de la figura 2 (a). Entonces la instrucción

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaledeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produce la figura 2 (b). La estructura de la población converge lentamente a un estado estable con una pequeña población total (no se muestra en la figura).

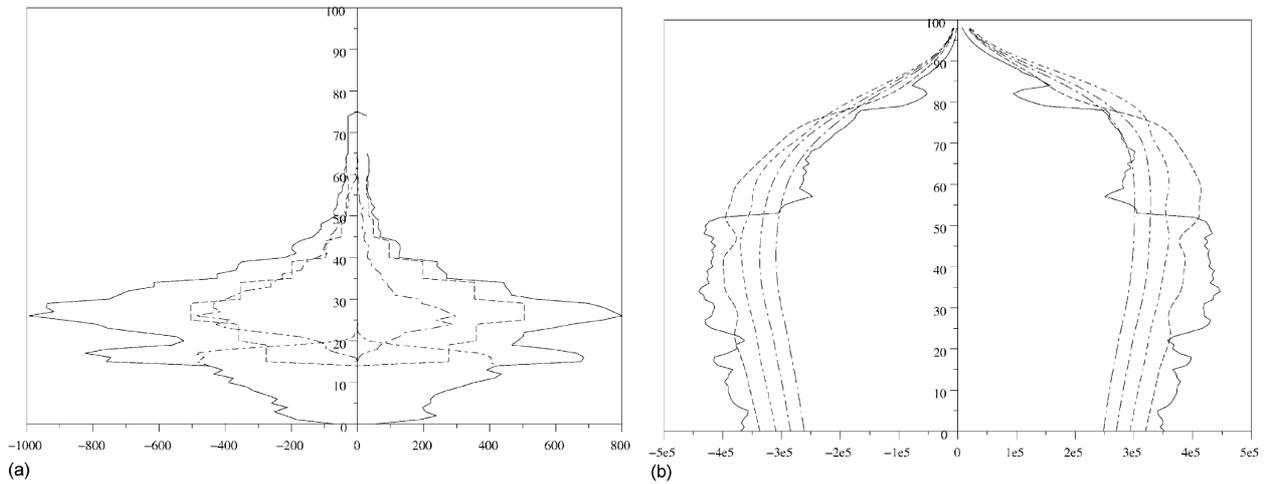


Figura 2. Influencia de la inmigración. (a) Inmigración total y sus 3 componentes. A la izquierda:  $x \mapsto M_1(x)$ . A la derecha:  $x \mapsto M_2(x)$ . (b) Izquierda:  $P_1(x, t)$ . A la derecha:  $P_2(x, t)$ . Línea continua: situación en 1999. Línea de puntos: proyecciones después de 25, 50, 75 y 100 años.

Este tipo de modelo (con  $K = 2$ ) es similar a las versiones discretas utilizadas por INSEE (Brutel, 2001). Es fácil criticar este modelo. Por un lado, utilizamos cifras de inmigración bastante bajas. Por otro lado, los datos actuales se utilizan para calcular la tasa de natalidad. Actualmente, esta tasa es bastante alta. Esto se debe en parte al alto porcentaje de inmigrantes en la población y al hecho de que los inmigrantes tienen tasas de fertilidad más altas que los franceses. Esto nos lleva a los siguientes dos modelos.

### Segundo ejemplo

Como datos iniciales para las poblaciones masculinas y femeninas nacidas en Francia o inmigrantes, tomamos los resultados del censo de 1999 (INSEE, 2001). Usamos el mismo perfil de inmigración que en el primer ejemplo. Para estimar las tasas de fertilidad, suponga que hay un número  $\varepsilon > 0$  con  $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  y  $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  para todo  $x$ . Conocemos el número total de niños nacidos de madres extranjeras (que son más o menos un subconjunto de mujeres inmigrantes) y también el número de mujeres extranjeras. Obtenemos  $\varepsilon = 0,6$ . Entonces

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'fmalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'fmalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maledath.dat' 'fmaledath.dat' 'maledath.dat' 'fmaledath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

Produce la Figura 3 para las pirámides de edad de los inmigrantes. La pirámide converge rápidamente (después de 100 años) a un estado estacionario.

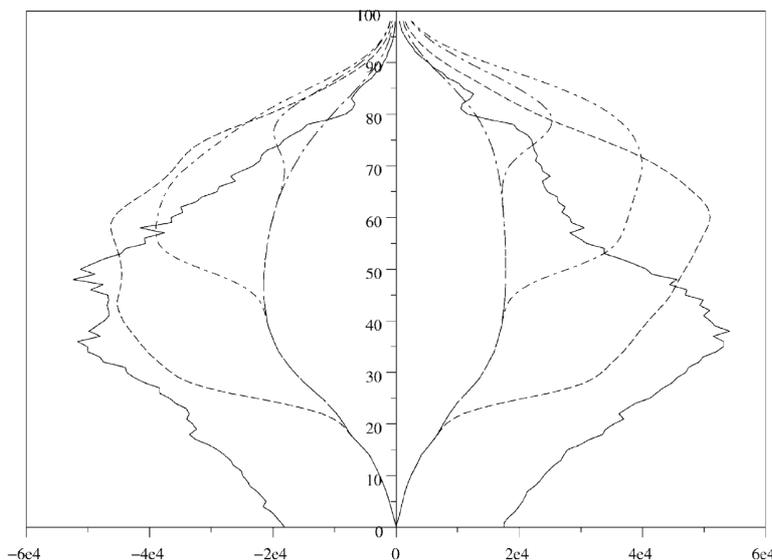


Figura 3. Personas nacidas en Francia e inmigrantes con diferentes tasas de fertilidad. A la izquierda:  $P_3(x, t)$  (hombres inmigrantes). A la derecha:  $P_4(x, t)$  (mujeres inmigrantes).

### Tercer ejemplo

Como datos iniciales para la población masculina y femenina de nacionalidad francesa y extranjera, tomamos los resultados del censo de 1999 (INSEE, 2001). Usamos el mismo perfil de inmigración que en el primer ejemplo. Para estimar las tasas de fertilidad, todavía asumimos que hay un número  $\varepsilon > 0$  con  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  y  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  para todo  $x$ . Conociendo el número total de niños nacidos de madres extranjeras, obtenemos  $\varepsilon = 0,56$ . Para tasas de cambio de nacionalidad, se supone que  $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ . Con datos del Ministerio de Justicia (2001), tenemos una estimación de  $\tau(x)$ . Ver figura 4 (a). Esta estimación resume las contribuciones de

tres tipos de procedimientos, que también se muestran en la Figura 4 (a): sin formalidad o por adelantado (niños extranjeros nacidos en Francia que se convierten en ciudadanos a los 18 años), por decreto (extranjeros que han vivido mucho tiempo en Francia y sus hijos) y por declaración (matrimonio con un ciudadano francés). En todos los casos donde la estructura de edad se da solo por grupo de edad, utilizamos las funciones de escalera como una aproximación. Entonces la instrucción

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produce la Figura 4 (b) para las pirámides de edad de los extranjeros. La pirámide converge después de 100 años en un estado estacionario.

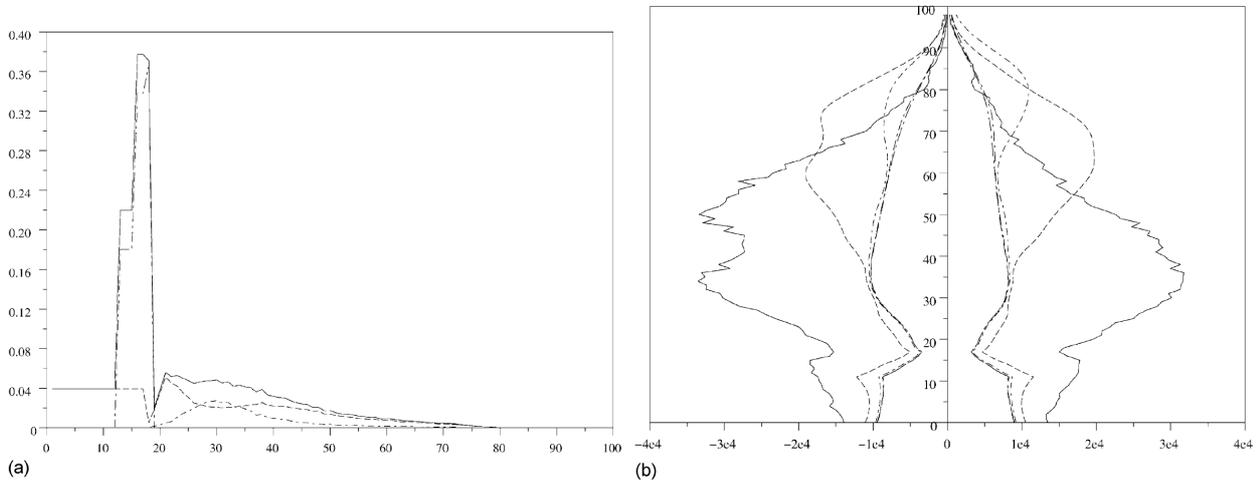


Figura 4. Franceses y extranjeros con diferente fertilidad. (a) Obtención de la nacionalidad francesa. Ratio de transferencia  $\tau(x)$  y los 3 componentes. (b) Izquierda:  $P_3(x, t)$  (hombres extranjeros). A la derecha:  $P_4(x, t)$  (mujeres extranjeras).

## Comparación

Para comparar los diferentes modelos, la Figura 5 muestra las proyecciones para la población total. La curva más baja es aquella sin inmigración. La curva más alta es aquella con inmigración pero sin diferencia en fertilidad (primer ejemplo). Las dos curvas intermedias muy cercanas corresponden al segundo y tercer ejemplo, donde las personas nacidas en Francia (respectivamente ciudadanos franceses) se distinguen de los inmigrantes (respectivamente extranjeros). La diferencia para la población total entre estos dos últimos modelos y el primer ejemplo con la inmigración es de alrededor de 0.7 millones después de 50 años y alrededor de 2.5 millones después de 100 años.

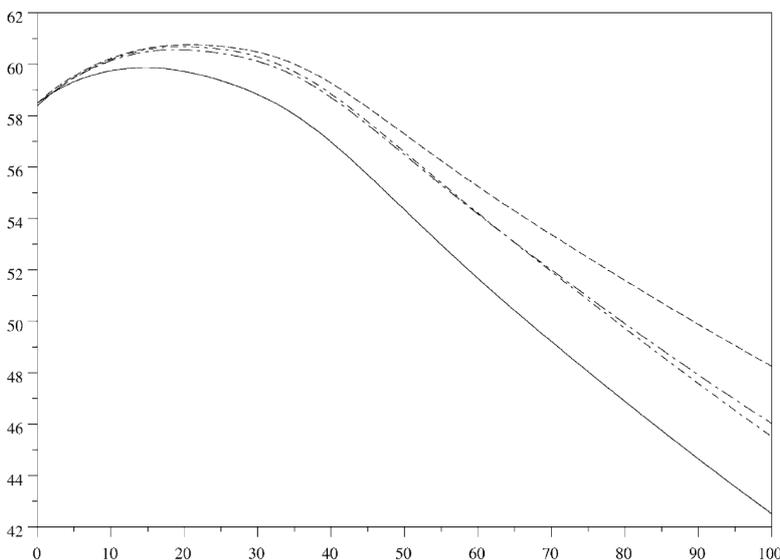


Figura 5. Proyecciones para la población total (en millones) bajo diferentes supuestos.

## 5. Enlace a un modelo más complejo

Arino y Smith (1998) estudiaron un modelo más complejo con una variable más, que se generaliza de la siguiente manera. Cada una de las subpoblaciones  $K$  se divide en dos:

- hay individuos que han estado en esta subpoblación desde su nacimiento.  $Q_k(x, t)$  es su densidad
- individuos que han estado en otra subpoblación antes.  $R_k(x, y, t)$  es la densidad de estos individuos de edad  $x$  en el tiempo  $t$ , que han estado en la subpoblación  $k$  durante  $y$  años ( $y < x$ ).

Los recién nacidos pertenecen al primer tipo, mientras que los individuos transferidos y los inmigrantes son del segundo tipo. De ahí el modelo

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

Las matrices  $\Delta^Q$  y  $\Delta^R$  son diagonales y

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

Este modelo, aplicado al tercer ejemplo en las secciones 3 y 4, proporciona un sistema de ocho ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de borde para

- Franceses de nacimiento,
- los franceses por adquisición,
- extranjeros nacidos en Francia
- extranjeros nacidos en el extranjero

Matrices de nacimiento y transferencia.  $B^Q$ ,  $B^R$ ,  $\tau^Q$  y  $\tau^R$  tener la misma forma que en la sección 3: por ejemplo,  $\tau_{1,3}^R$  y  $\tau_{2,4}^R$  son los únicos coeficientes distintos de cero  $\tau^R$ . El modelo puede representar con precisión las tasas de transferencia. Casi todos los extranjeros nacidos en Francia se convierten en ciudadanos franceses a los 18 años.  $\tau_{1,3}^Q(x)$  y  $\tau_{2,4}^Q(x)$  por lo tanto tener un pico si  $x = 18$  años. Los extranjeros nacidos en el extranjero generalmente no pueden convertirse en franceses si son menores de 18 años o si han vivido en Francia por menos de cinco años (según la ley).  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  y  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  por lo tanto, están cerca de cero si  $x < 18$  o  $y < 5$ .

Aunque el modelo sigue correctamente los procesos evolutivos, es difícil de implementar porque no se conocen datos, como por ejemplo  $R_k^0(x, y)$  para  $1 \leq k \leq 4$ . Estos datos pueden estar disponibles a través del megaarchivo del censo de 1999, pero no se han publicado.

Una forma de evitar este problema es asumir que  $\Delta^R$ ,  $B^R$  y  $\tau^R$  no dependan de  $y$ . Pero esto reduce más o menos el modelo complejo al de la sección 3.3. De hecho, definimos

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$  es la única solución del sistema (1) - (2) - (3) con

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Para este último modelo, los datos están disponibles para hacer los cálculos. El resultado no sería muy diferente del de la Figura 4.

## 6. Conclusión

El modelo lineal (1) - (2) - (3) podría ser útil para otros problemas, por ejemplo, para poblaciones de peces. Las subpoblaciones no pueden residir en el mismo lugar. Uno puede imaginar subpoblaciones en diferentes sitios, con migraciones como en Arino y Smith (1998). La función  $d_k(x)$  puede incluir pesca.  $M_k(x)$  podría representar la reintroducción de peces de una especie en peligro de extinción, como el salmón en Francia.

También se pueden desarrollar versiones no lineales o no homogéneas del modelo, como en Hoppensteadt (1975), Webb (1985) o Cushing (1998).

## Referencias bibliográficas

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) *Differential – difference Equations*. New York : Academic Press.

- Berman A. , Plemmons R. J. (1994) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) *Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable*. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) *An Introduction to Structured Population Dynamics*. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. *Économie et Statistique* 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A. , Johnson C. R. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) *Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère*. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) *Les acquisitions de la nationalité française en 1999*. Études et Statistiques Justice, 17.
- OMISTATS (1999) *Annuaire des migrations 1999*. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) *Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics*. New York : Marcel Dekker.