

Das asymptotische Verhalten der McKendrick-Gleichung mit der Einwanderung

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

Zusammenfassung

Ziel dieses Artikels ist es, den Einfluss der Einwanderung in einem mathematischen Modell für die Entwicklung der Altersstruktur der Bevölkerung zu diskutieren. Im unterkritischen Fall konvergiert die Altersstruktur zu einem stationären Zustand. Wir präsentieren ein Programm, das das Modell simuliert und für Projektionen für die Bevölkerung Frankreichs verwendet wird. Wir bestehen auch auf der Verknüpfung mit einem komplexeren Modell.

Schlüsselwörter: Demographie, Bevölkerungsstruktur, Einwanderung, partielle Differentialgleichungen, Laplace-Transformation

1. Einleitung

Wir teilen eine Population in K Subpopulationen ein ($K \geq 1$). Die Variablen x und t repräsentieren Alter und Zeit.

- $P_k(x, t)$ ist die Dichte der Subpopulation k des Alters x zum Zeitpunkt t .
- $M_k(x) \geq 0$ stellt die Ankunft von Personen im Alter von x dar, die in die Teilpopulation k eintreten und aus einer anderen Population stammen.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$ ist die Fruchtbarkeit von Individuen in der Subpopulation l , die Individuen vom Typ k zur Welt bringen.
- $P_k^0(x)$ ist die anfängliche Altersstruktur der Subpopulation k .

Wir definieren

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

Wir nehmen an $B(x) = 0$ für alle x ausreichend groß. $d_k(x) \geq 0$ ist die Rate, mit der Personen in der Subpopulation k die Bevölkerung verlassen. Für $k \neq l$, $\tau_{k,l}(x) \geq 0$ ist die Übertragungsrate von Individuen von Subpopulation l zu Subpopulation k . Wir definieren

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$
$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

und $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$. $P(x, t)$ ist die einzige Lösung für McKendricks Gleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

Außerdem, $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Betrachten Sie die Matrix

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x)S(0, x)dx,$$

mit

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

und $S(\xi, \xi) = I$ (die Identitätsmatrix der Größe K). Wir nehmen an, dass der Spektralradius ρ von $\hat{G}(0)$ ist streng kleiner als 1. Wir definieren

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x)M(u)du dx,$$
$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L.$$

Wir haben dann

$$P(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x)M(u)du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

Mit anderen Worten, die Alterspyramide $x \mapsto P_k(x, t)$ konvergiert zu einem stationären Zustand, wenn $t \rightarrow +\infty$.

Diese Ergebnisse werden in Abschnitt 2 gezeigt. Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $P(x, t)$ kehrt zu der einer Integralgleichung zurück

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$ und $G(x)$ sind bekannte Funktionen. Dieses Problem wurde von Lotka (1939) im Fall einer Gleichung untersucht ($K = 1$). Für ein Gleichungssystem ($K > 1$) untersuchten Bellman und Cooke (1963) den Fall, in dem $\int_0^\infty G(x) dx$ ist eine irreduzible Matrix (im Sinne der Perron- und Frobenius-Theorie positiver Matrizen). Crump (1970 und 1971) untersuchte den reduzierbaren Fall. Diese Studien haben sich auf den Fall konzentriert, in dem $F(t) \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow \infty$. In unserem Modell impliziert der inhomogene Term Migration in McKendrick-Gleichungen dies $F(t)$ hat eine Grenze ungleich Null, wenn $t \rightarrow \infty$. Wenn wir den stationären Zustand subtrahieren, wird das inhomogene Problem auf ein homogenes Problem reduziert, für das wir die Ergebnisse auf Existenz und asymptotisches Verhalten anwenden können. Wir schlagen dennoch unten eine Demonstration vor, um das zweite Ergebnis zu erhalten ($P(x, t) \geq 0$) und weil der Beweis mit der unterkritischen Hypothese $\rho < 1$ recht einfach ist. Es ist nicht erforderlich, zwischen reduzierbaren und nicht reduzierbaren Fällen zu unterscheiden.

In Abschnitt 3 präsentieren wir drei Beispiele, die menschliche Populationen modellieren. In jedem Beispiel $M(x)$ repräsentiert Einwanderung und $d_k(x)$ Sterblichkeit, die auch die Auswanderungsrate einschließen könnte. Im dritten Beispiel $\tau_{k,l}(x)$ repräsentiert die Änderungsrate der Nationalität für Ausländer. In Abschnitt 4 wird ein Programm vorgestellt, das das Modell und seine Anwendung auf die drei Beispiele anhand von Daten aus Frankreich simuliert. In Abschnitt 5 stellen wir die Verbindung zu einem komplexeren Modell her, das von Arino und Smith (1998) untersucht wurde. Das komplexere Modell repräsentiert die realen Populationen besser. Es handelt sich jedoch um Parameter, die aufgrund des Mangels an Daten für die menschliche Bevölkerung in den vorherigen Abschnitten schwer abzuschätzen sind. Die Schlussfolgerung zeigt, wie das Grundmodell (1) - (2) - (3) auf Tierpopulationen angewendet werden könnte. Die Gleichungen haben dann eine andere Bedeutung.

Lassen Sie uns abschließend einige Studien zur Modellierung der Einwanderung erwähnen. Barbu, Iannelli und Martcheva (2001) untersuchten die Kontrollierbarkeit der Altersstruktur einer Bevölkerung durch altersselektive Einwanderung. In Alvarado und Creedy (1998) gibt es diskrete Modelle.

2. Demonstration der Ergebnisse

Formulierung als Integralgleichung

Das System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung wird auf ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung entlang der Kennlinien reduziert. Wir haben also

$$P(x, t) = S(x-t, x)P^0(x-t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t-x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

Wir definieren $\Phi(t) = P(0, t)$. Wir haben

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

Aus den für $x > t$ und $x < t$ erhaltenen Formeln folgt, dass $\Phi(x, t)$ ist die Lösung einer Integralgleichung

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$ ist die Matrix

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$ ist der Vektor

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

Gleichung (1) hat eine einzigartige Lösung, wie mit der Methode der sukzessiven Approximation gesehen werden kann (Bellman und Cooke, 1963). Die anfängliche partielle Differentialgleichung hat also auch eine einzigartige Lösung. Die Elemente auf der Diagonale von Δ sind jedoch positiv oder Null und diejenigen außerhalb der Diagonale sind negativ oder Null. Dies impliziert, dass wenn $a \leq b$, $S(a, b)$ ist eine Matrix mit positiven oder Nullkoeffizienten (Berman und Plemmons, 1994, Kap. 6, §3.12). Also haben wir $F(t) \geq 0$ und $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$. Nach der Methode der sukzessiven Approximation $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$. Nach (5) und (6) $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$. Dies zeigt die ersten beiden Ergebnisse.

Laplace-Transformation

$\xi_0(\Phi)$ ist die kleinste reelle Zahl, so dass das folgende Vektorintegral absolut konvergent ist

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \xi_0.$$

Es ist die Laplace-Transformation von Φ . Wir definieren $\xi_0(F)$ und $\xi_0(G)$ auf die gleiche Weise. $B(x)$ ist eine Funktion, deren Unterstützung kompakt ist. $G(x)$ ist daher auch eine Funktion mit einer kompakten Unterstützung und $\xi_0(G) = -\infty$. Also haben wir

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

I ist die Einheitsmatrix der Größe K . Wir haben dann

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

Wir nehmen $z \in \mathbb{C}$ mit $\xi = \operatorname{Re}(z) > 0$. Wir haben

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

Nach Horn und Johnson (1985, §8.1.18 und 8.1.19) haben wir für die entsprechenden Spektralstrahlen

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

und $I - \hat{G}(z)$ ist reversibel. Wir haben also

$$\hat{\Phi}(z) = (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

Wir nehmen die inverse Laplace-Transformation. Wir bekommen für jede reelle Zahl $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$ und $\forall t > 0$,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

Wir definieren $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$. Formel (8) gibt

$$F(t) = L = \int_0^{\infty} B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

Mit $z \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Wenn $L \neq 0$ ist, dann ist $z = 0$ der Pol von \hat{F} mit dem größten Realteil und L ist der Rest bei $z = 0$. Also ist $z = 0$ auch der Pol von $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$ mit dem größten Realteil und $R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L$ ist der Rest bei $z = 0$. Die auf (9) angewendete Restformel ergibt

$$\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R.$$

Dies gilt auch dann, wenn $L = 0$ ist, da dann alle Pole von $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$ befinden sich in der linken Halbebene der komplexen Ebene. $\Phi(t)$ konvergiert daher gegen 0, wenn $t \rightarrow \infty$. In allen Fällen ergibt sich aus (6)

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

Dies ist das dritte Ergebnis.

3. Beispiele

Die Beispiele in diesem Abschnitt sollen die menschliche Bevölkerung darstellen: $M_k(x)$ ist Einwanderung und $d_k(x)$ Sterblichkeit. Bei Auswanderung ändert sich nur $d_k(x)$.

Erstes Beispiel

Die Bevölkerung ist zwischen Männern ($k = 1$) und Frauen ($k = 2$) aufgeteilt. Wir nehmen an

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

Dies bedeutet, dass die Anzahl der Geburten von der Anzahl der Frauen abhängt, nicht jedoch von der Anzahl der Männer. Nehmen wir zur Vereinfachung der Formeln Folgendes an $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$. Diese Annahme bedeutet, dass die Chancen, dass ein Neugeborenes ein Junge oder ein Mädchen ist, gleich sind (in der Praxis ist dies fast richtig).

Weil B eine höhere Dreiecksmatrix ist, $\hat{G}(0)$ hat die gleiche Struktur. Der spektrale Radius ist also

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Wir nehmen an $\rho(\hat{G}(0)) < 1$. Der Vektor R ist leicht zu berechnen:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

Wir haben dann $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du. \end{aligned}$$

Zweites Beispiel

Die Bevölkerung verteilt sich auf im Land geborene Männer ($k = 1$), im Land geborene Frauen ($k = 2$) und Einwanderer der ersten Generation, Männer ($k = 3$) oder Frauen ($k = 4$). Wir nehmen an

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

Dies bedeutet, dass Migrantinnen Kinder im Land zur Welt bringen, mit einer anderen Rate als Frauen, die im Land geboren wurden. Nehmen wir auch das an $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$ und $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$. Weil B und $\hat{G}(0)$ sind obere Dreiecksmatrizen,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

$\rho(\hat{G}(0))$ hängt nicht davon ab b_4 . In diesem Modell kann eine hohe Fertilitätsrate für Einwanderer eine unterkritische Situation nicht in eine überkritische Situation verwandeln ($\rho(\hat{G}(0)) > 1$). Wir nehmen an $\rho(\hat{G}(0)) < 1$. Der Vektor R ist immer noch leicht zu berechnen:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

Wir haben dann $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass dieses zweite Beispiel das erste Beispiel erneut enthält, wenn $d_1 = d_3$, $d_2 = d_4$ und $b_2 = b_4$. Das heißt, wenn Einwanderer der ersten Generation unmittelbar den lokalen Fertilitäts- und Sterblichkeitsraten folgen. Tatsächlich, $P_1 + P_3$ ersetzt P_1 und $P_2 + P_4$ ersetzt P_2 .

Drittes Beispiel

Die Bevölkerung ist unterteilt in Staatsangehörige, Männer ($k = 1$) oder Frauen ($k = 2$) und Ausländer, Männer ($k = 3$) oder Frauen ($k = 4$). Wir nehmen an

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

Dies bedeutet, dass ausländische Frauen ausländische Kinder zur Welt bringen, Ausländer jedoch ihre Staatsangehörigkeit ändern können (sie werden von Teilbevölkerung 3 oder 4 auf Teilbevölkerung 1 oder 2 übertragen). Zur Vereinfachung nehmen wir an $d_1 = d_3$ und $d_2 = d_4$: Die Sterblichkeit von Ausländern ist die gleiche wie die von Staatsangehörigen. Wir gehen auch davon aus $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$ und $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$. Wir haben dann

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

mit

$$S_{1,1}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du}, \\ S_{3,3}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du},$$

und

$$S_{1,3}(y, x) = e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz, \\ S_{2,4}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz.$$

Wir haben also

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

$\hat{G}(0)$ ist eine obere Dreiecksmatrix,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} ; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

Wir nehmen an $\rho(\hat{G}(0)) < 1$. Der Vektor R ist immer noch leicht zu berechnen. Wir definieren

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx \\ L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

Wir haben $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$ und

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Endlich haben wir $\forall x \geq 0$,

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du \\ P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

Beachten Sie, dass dieses dritte Beispiel auf das erste Beispiel reduziert wird, wenn $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$. Das heißt, wenn sich die Teilpopulationen $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ nicht vermischen.

4. Software

Um diese Studie zu veranschaulichen, haben wir ein Programm geschrieben, das in der Scilab-Umgebung ausgeführt wird. Eine kostenlose Software zur numerischen Berechnung finden Sie unter www-rocq.inria.fr/scilab. Das Programm mit dem Namen `census.sci` finden Sie mit den Dateien, die die Daten für Frankreich enthalten, unter www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html. Es löst das System partieller Differentialgleichungen mit der Finite-Differenzen-Methode. Wir wählen $\delta t > 0$ und $\delta x > 0$. $P_k^{i,j}$ ist der Wert von $P_k(x, t)$ wenn $x = i \delta x$ und $t = j \delta t$. Wir verwenden ähnliche Notationen für $\Delta_{k,l}$, M_k , $B_{k,l}$ und P_k^0 . Wir haben dann

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^{\infty} B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Beachten Sie die Diskretisierungen, die im Vergleich zur Zeit progressiv und im Vergleich zum Alter retrograd sind. Die Gleichungen sind tatsächlich Advektionsgleichungen, daher müssen wir die Richtung der Kennlinien berücksichtigen, um ein konvergierendes Schema zu erhalten. Die Bedingung $\delta t \leq \delta x$ muss auch respektiert werden. Im Programm haben wir immer genommen δx gleich einem Jahr.

Erläuterung

Die Syntax lautet wie folgt:

```
census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers).
```

Definitionen:

- X, K: positive ganze Zahlen
- annees: Vektor von positiven oder Null-Ganzzahlen
- gauche,droit: K Spaltenmatrizen reeller Zahlen
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: Vektoren von Zeichenketten
- bindices, dindices: zwei Spaltenmatrizen positiver Ganzzahlen $\leq K$
- mindices: Vektor positiver Ganzzahlen $\leq K$.

Bedeutung:

- X: maximales Alter
- K: Anzahl der Subpopulationen
- annees: Zeiten, in denen die Bevölkerung gezogen wird
- gauche, droite: Die Linien links (bzw. rechts) definieren die linearen Kombinationen von (P_1, \dots, P_K) , die in der Abbildung links (bzw. rechts) dargestellt sind
- pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers: Dateinamen, die die Daten enthalten; Diese Dateien sind Spaltenvektoren
- bindices, dindices: Die Zeilen dieser Matrizen geben die Indizes (Zeile und Spalte) der Nicht-Null-Koeffizienten der Matrizen B und Δ an, deren Wert in angegeben ist bfichiers und dfichiers. Die Anzahl der Zeilen von bindices (bzw. dindices) ist also gleich der Länge des Vektors bfichiers (bzw. dfichiers)
- mindices: Indizes von Nicht-Null - Koeffizienten des Vektors M . Der Wert ist in mfichiers.

Erstes Beispiel

Als erste Daten für die männliche und weibliche Bevölkerung nehmen wir die Ergebnisse der Volkszählung von 1999 in Frankreich. Fertilitäts- und Mortalitätsraten werden mit Daten aus demselben Jahr berechnet (Beaumeil, Doisneau und Vatan, 2001): siehe Abbildung 1 (a). Wenn die Einwanderung Null ist, dann

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[1 1; 2 2],[ 'maledath.dat', 'femaledeath.dat'],[],[])
```

gibt Abbildung 1 (b) an, in der die Population schließlich gegen 0 konvergiert, jedoch ziemlich langsam.

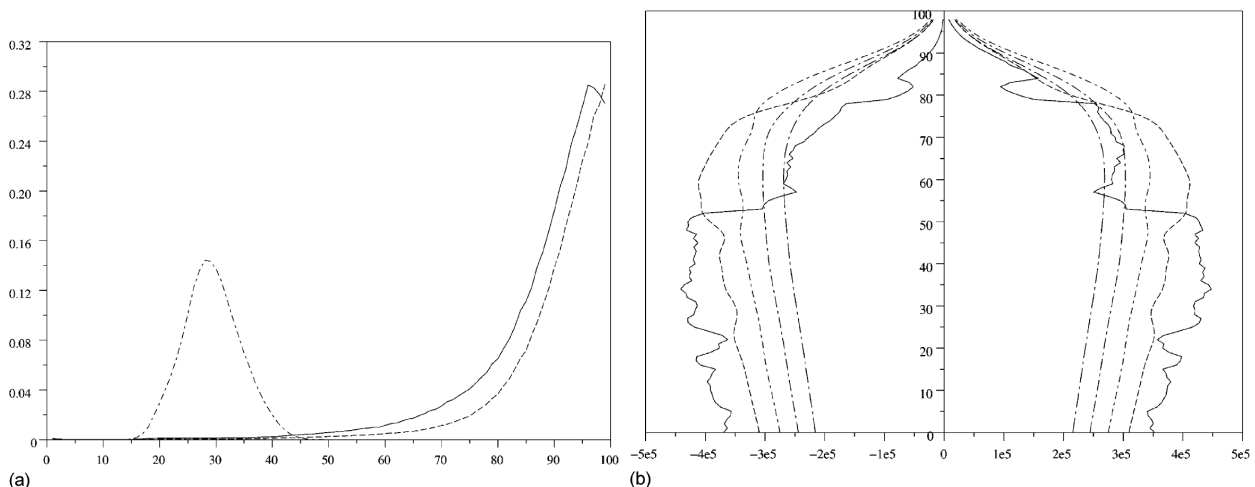


Abbildung 1. Ohne Einwanderung. (a) Gesamtgeburten: $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$. Sterblichkeit: $x \mapsto d_1(x)$ und $x \mapsto d_2(x)$. (b) Links: $P_1(x, t)$. Auf der rechten Seite: $P_2(x, t)$. Durchgehende Linie: Situation 1999. Gepunktete Linien: Projektionen nach 25, 50, 75 und 100 Jahren.

Einwanderung ist jetzt enthalten $M(x)$. Dinh (1994) berechnet $M(x)$ unter Verwendung der Ergebnisse zweier aufeinanderfolgender Volkszählungen und der Daten zu Geburten und Todesfällen zwischen diesen beiden Volkszählungen. Die Methode lieferte bis in die 1980er

Jahre vernünftige Ergebnisse. Zwischen 1990 und 1999 lag die Gesamtzuwanderung jedoch in der gleichen Größenordnung wie die Fehler bei den Volkszählungen, so dass die Berechnungen kein vernünftiges Ergebnis ergaben. Eine andere Methode besteht darin, die jährlichen Daten des Amtes für internationale Migration (1999) zu verwenden, die in Abbildung 2 (a) zusammengefasst sind. Die Gesamtzuwanderung ist die Summe aus Arbeitsmigranten, Einwanderern, die eine Aufenthaltserlaubnis erhalten haben, und Einwanderern im Rahmen der Familienzusammenführung. Wir fanden Daten nach Alter für Einwanderer, die eine Aufenthaltserlaubnis erhalten hatten (daher die Treppenfunktion in Abbildung 2 (a)), aber nicht für Erwachsene im Rahmen der Familienzusammenführung. Für die Berechnungen sind nur die externen Kurven von 2 (a) nützlich. Also die Anweisung

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat'],[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

erzeugt Fig. 2 (b). Die Bevölkerungsstruktur konvergiert langsam zu einem stabilen Zustand mit einer kleinen Gesamtbevölkerung (in der Abbildung nicht dargestellt).

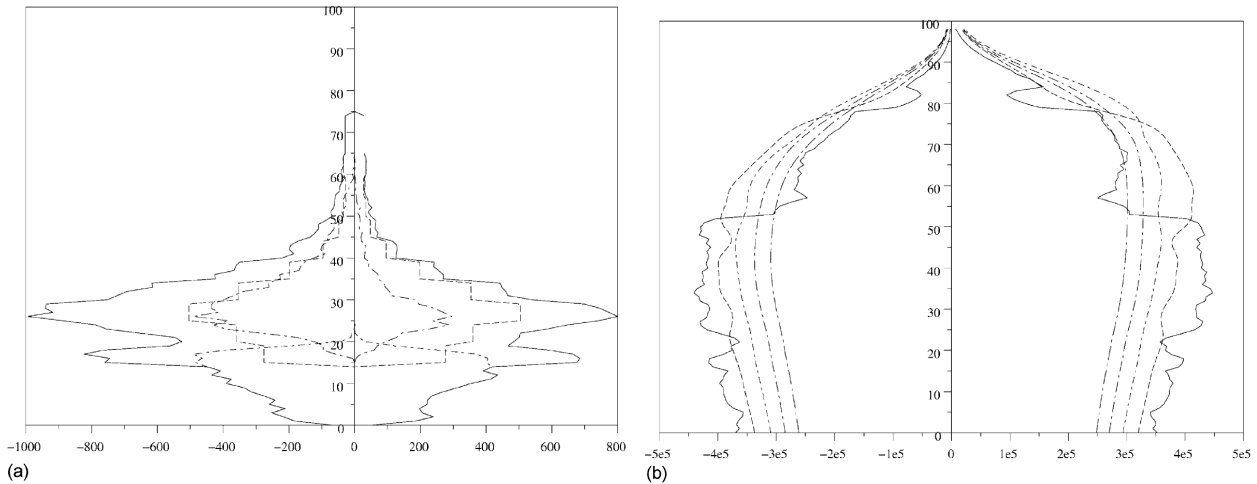


Abbildung 2. Einfluss der Einwanderung. (a) Gesamtzuwanderung und ihre drei Komponenten. Nach links: $x \mapsto M_1(x)$. Auf der rechten Seite: $x \mapsto M_2(x)$. (b) Links: $P_1(x, t)$. Auf der rechten Seite: $P_2(x, t)$. Kontinuierliche Linie: Situation 1999. Gepunktete Linie: Projektionen nach 25, 50, 75 und 100 Jahren.

Diese Art von Modell (mit $K = 2$) ähnelt den diskreten Versionen von INSEE (Brutel, 2001). Es ist leicht, dieses Modell zu kritisieren. Einerseits verwenden wir relativ niedrige Einwanderungszahlen. Zum anderen werden aktuelle Daten zur Berechnung der Geburtenrate herangezogen. Derzeit ist diese Rate ziemlich hoch. Dies ist teilweise auf den hohen Anteil von Einwanderern in der Bevölkerung und die Tatsache zurückzuführen, dass Einwanderer höhere Geburtenraten aufweisen als die Franzosen. Dies führt uns zu den folgenden zwei Modellen.

Zweites Beispiel

Als erste Daten für die in Frankreich geborene männliche und weibliche Bevölkerung oder Einwanderer nehmen wir die Ergebnisse der Volkszählung von 1999 (INSEE, 2001). Wir verwenden das gleiche Einwanderungsprofil wie im ersten Beispiel. Nehmen Sie zur Schätzung der Fertilitätsraten an, dass es eine Zahl gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$ und $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$ für alle x . Wir kennen die Gesamtzahl der Kinder einer ausländischen Mutter (die mehr oder weniger eine Untergruppe von Migrantinnen bilden) und auch die Anzahl der ausländischen Frauen. Wir erhalten $\varepsilon = 0,6$. Damit

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat' 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],
[3 4],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

produziert Abbildung 3 für die Alterspyramiden von Einwanderern. Die Pyramide konvergiert schnell (nach 100 Jahren) zu einem stationären Zustand.

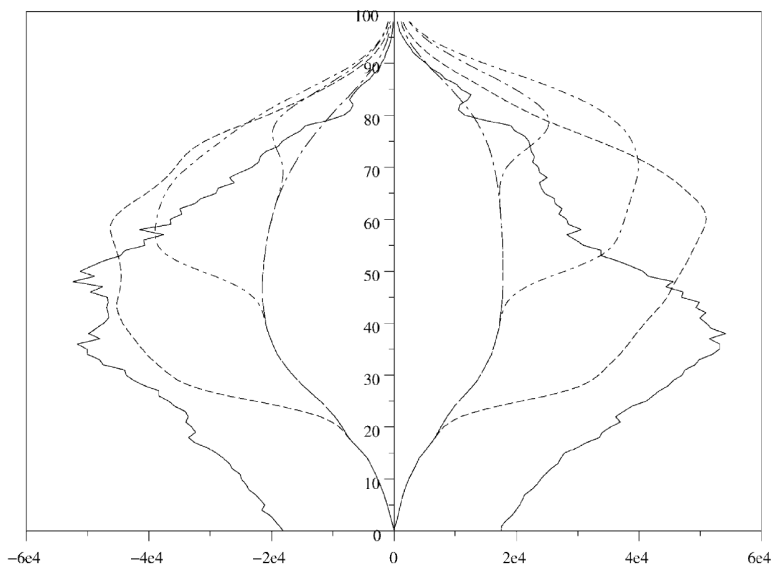


Abbildung 3. In Frankreich geborene Personen und Einwanderer mit unterschiedlichen Geburtenraten. Nach links: $P_3(x, t)$ (Einwanderer). Auf der rechten Seite: $P_4(x, t)$ (Migrantinnen).

Drittes Beispiel

Als erste Daten für die männliche und weibliche Bevölkerung mit französischer und ausländischer Staatsangehörigkeit nehmen wir die Ergebnisse der Volkszählung von 1999 (INSEE, 2001). Wir verwenden das gleiche Einwanderungsprofil wie im ersten Beispiel. Um die Fertilitätsraten abzuschätzen, gehen wir immer noch davon aus, dass es eine Zahl gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$ und $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$ für alle x . Wenn wir die Gesamtzahl der Kinder kennen, die von ausländischen Müttern geboren wurden, erhalten wir $\varepsilon = 0,56$. Für die Änderungsraten der Nationalität wird davon ausgegangen, dass $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$. Mit Daten des Justizministeriums (2001) haben wir eine Schätzung von $\tau(x)$. Siehe Abbildung 4 (a). Diese Schätzung fasst die Beiträge von drei Arten von Verfahren zusammen, die ebenfalls in Abbildung 4 (a) dargestellt sind: ohne Formalität oder im Voraus (in Frankreich geborene ausländische Kinder, die mit 18 Jahren Staatsbürger werden), per Dekret (Ausländer, die lange in gelebt haben) Frankreich und seine Kinder) und durch Erklärung (Heirat mit einem französischen Staatsbürger). In allen Fällen, in denen die Altersstruktur nur nach Altersgruppen angegeben ist, haben wir Treppenfunktionen als Annäherung verwendet. Also die Anweisung

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malefrench.dat' 'femalefrench.dat' 'maleforeign.dat' 'femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[ 'malefrenchmother.dat' 'femalefrenchmother.dat' 'maleforeignmother.dat' 'femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[ 'd11.dat' 'd13.dat' 'd22.dat' 'd24.dat' 'd33.dat' 'd44.dat'],[3 4],
[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']];
```

erzeugt Abbildung 4 (b) für die Alterspyramiden von Ausländern. Die Pyramide konvergiert nach 100 Jahren in einen stationären Zustand.

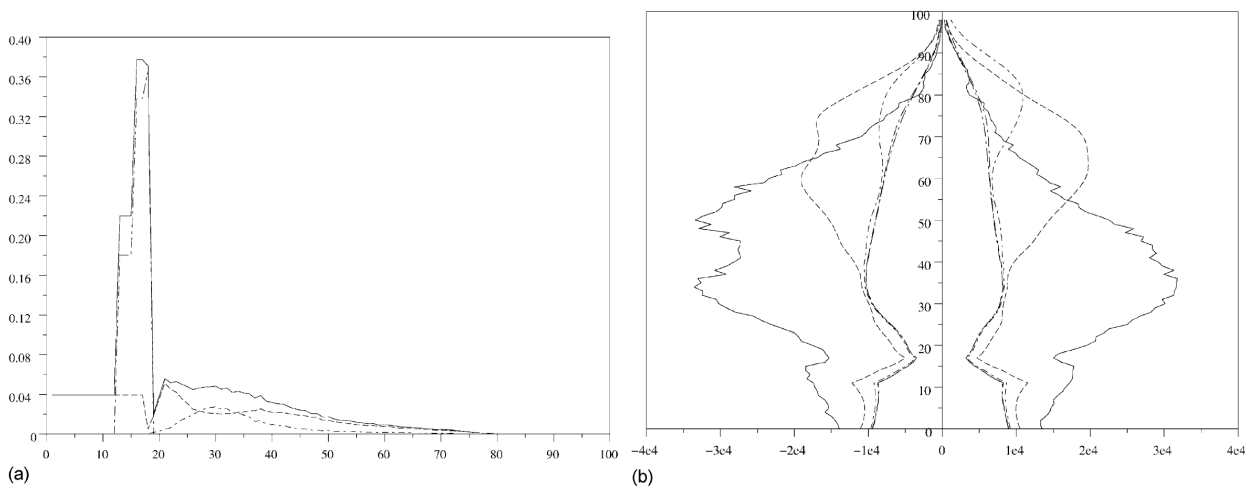


Abbildung 4. Franzosen und Ausländer mit unterschiedlicher Fruchtbarkeit. (a) Erlangung der französischen Staatsangehörigkeit. Übertragungsrate $\tau(x)$ und die 3 Komponenten. (b) Links: $P_3(x, t)$ (ausländische Männer). Auf der rechten Seite: $P_4(x, t)$ (ausländische Frauen).

Vergleich

Um die verschiedenen Modelle zu vergleichen, zeigt Abbildung 5 die Projektionen für die Gesamtbevölkerung. Die niedrigste Kurve ist die ohne Einwanderung. Die höchste Kurve ist die mit Einwanderung, jedoch ohne Unterschied in der Fruchtbarkeit (erstes Beispiel). Die beiden sehr engen Zwischenkurven entsprechen dem zweiten und dritten Beispiel, bei dem in Frankreich geborene Personen (bzw. französische Staatsbürger) von Einwanderern (bzw. Ausländern) unterschieden werden. Der Unterschied für die Gesamtbevölkerung zwischen diesen beiden letzten Modellen und dem ersten Beispiel mit Einwanderung beträgt nach 50 Jahren etwa 0,7 Millionen und nach 100 Jahren etwa 2,5 Millionen.

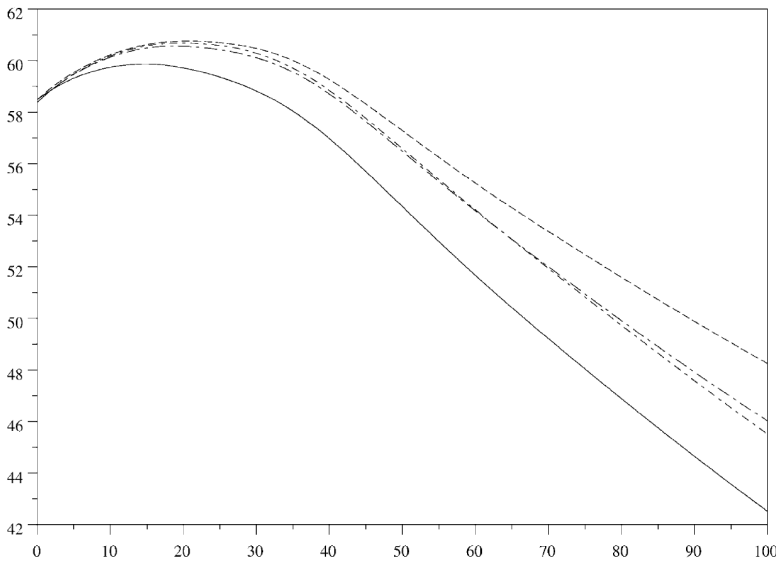


Abbildung 5. Projektionen für die Gesamtbevölkerung (in Millionen) unter verschiedenen Annahmen.

5. Link zu einem komplexeren Modell

Arino und Smith (1998) untersuchten ein komplexeres Modell mit einer weiteren Variablen, das sich wie folgt verallgemeinert. Jede der K -Subpopulationen ist in zwei Teile unterteilt:

- Es gibt Personen, die seit ihrer Geburt in dieser Subpopulation leben. $Q_k(x, t)$ ist ihre Dichte.
- Personen, die zuvor in einer anderen Subpopulation waren. $R_k(x, y, t)$ ist die Dichte dieser Personen im Alter von x zum Zeitpunkt t , der in der Subpopulation gewesen sein k für y Jahre ($y < x$).

Neugeborene gehören zum ersten Typ, während übertragene Personen und Einwanderer vom zweiten Typ sind. Daher das Modell

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

Matrizen Δ^Q und Δ^R sind diagonal und

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

Dieses Modell, das auf das dritte Beispiel der Abschnitte 3 und 4 angewendet wird, ergibt ein System von acht partiellen Differentialgleichungen und Kantenbedingungen für

- Franzosen von Geburt,
- die Franzosen durch Erwerb,
- in Frankreich geborene Ausländer,
- im Ausland geborene Ausländer.

Geburts- und Transfermatrizen B^Q , B^R , τ^Q und τ^R haben die gleiche Form wie in Abschnitt 3: zum Beispiel $\tau_{1,3}^R$ und $\tau_{2,4}^R$ sind die einzigen Koeffizienten ungleich Null von τ^R . Das Modell kann Übertragungsraten genau darstellen. Fast alle in Frankreich geborenen Ausländer werden mit 18 Jahren französische Staatsbürger. $\tau_{1,3}^Q(x)$ und $\tau_{2,4}^Q(x)$ haben daher einen Peak, wenn $x = 18$ Jahre. Im Ausland geborene Ausländer können im Allgemeinen nicht französisch werden, wenn sie jünger als 18 Jahre sind oder wenn sie weniger als fünf Jahre in Frankreich gelebt haben (laut Gesetz). $\tau_{1,3}^R(x, y)$ und $\tau_{2,4}^R(x, y)$ sind daher nahe Null, wenn $x < 18$ oder $y < 5$.

Obwohl das Modell den Evolutionsprozessen korrekt folgt, ist es schwierig zu implementieren, da Daten nicht bekannt sind, wie zum Beispiel $R_k^0(x, y)$ für $1 \leq k \leq 4$. Diese Daten sind möglicherweise über die Megadatei der Volkszählung von 1999 verfügbar, wurden jedoch nicht veröffentlicht.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, besteht darin, dies anzunehmen Δ^R , B^R und τ^R hänge nicht von y ab. Dies reduziert das komplexe Modell jedoch mehr oder weniger auf das von Abschnitt 3.3. In der Tat definieren wir

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy \quad , \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$P(x, t)$ ist die einzige Lösung des Systems (1) - (2) - (3) mit

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Für dieses letztere Modell stehen Daten zur Verfügung, um die Berechnungen durchzuführen. Das Ergebnis würde sich nicht sehr von dem in Abbildung 4 unterscheiden.

6. Fazit

Das lineare Modell (1) - (2) - (3) könnte für andere Probleme nützlich sein, beispielsweise für Fischpopulationen. Subpopulationen befinden sich möglicherweise nicht am selben Ort. Man kann sich Subpopulationen an verschiedenen Standorten vorstellen, mit Migrationen wie bei Arino und Smith (1998). Funktion $d_k(x)$ kann Angeln einschließen. $M_k(x)$ könnte die Wiedereinführung von Fischen einer gefährdeten Art wie Lachs in Frankreich darstellen.

Man kann auch nichtlineare oder inhomogene Versionen des Modells entwickeln, wie in Hoppensteadt (1975), Webb (1985) oder Cushing (1998).

Literaturhinweise

- Alvarado J., Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O., Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905 – 925
- Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142 – 165.
- Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E., Cooke K. L. (1963) *Differential – difference Equations*. New York : Academic Press.
- Berman A., Plemmons R. J. (1994) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. *Insee Première*, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) *An Introduction to Structured Population Dynamics*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. *Économie et Statistique* 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A., Johnson C. R. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. *Tableaux thématiques – exploitation complémentaire*. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) *Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine*. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. *Études et Statistiques Justice*, 17.
- OMISTATS (1999) *Annuaire des migrations 1999*. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) *Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics*. New York : Marcel Dekker.