

السلوك المقارب لمعادلة ماكنديك مع الهجرة

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1 – 20

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01577654>

Nicolas Bacaër

ملخص

الهدف من هذه المقالة هو مناقشة تأثير الهجرة في نموذج رياضي لتطور التركيبة العمرية للسكان. في الحالة دون الحرجة، يتقارب الهيكل العمري إلى حالة ثابتة. نقدم برنامجًا يحاكي النموذج ويستخدم في الإسقاطات لسكان فرنسا. نحن نصر أيضًا على الارتباط بنموذج أكثر تعقيدًا.

الكلمات المفتاحية: التركيبة السكانية، الهجرة، المعادلات التفاضلية الجزئية، تحويل لابلاس

1 المقدمة

نقسم السكان إلى مجموعات فرعية ك ($K \geq 1$). تمثل المتغيرات x و t العمر والوقت.

- $P_k(x, t)$ هي كثافة السكان الفرعية ك من العمر s في الوقت t .
- $M_k(x) \geq 0$ يمثل وصول أفراد من الفئة العمرية s الذين يدخلون فئة السكان الفرعية ك ويأتون من مجتمع آخر.
- $B_{k,l}(x) \geq 0$ هو خصوبة الأفراد في المجموعة السكانية الفرعية l الذين يلدون أفرادًا من النوع k .
- $P_k^0(x)$ هي البنية العمرية الأولية للسكان k .

نحدد

$$P(x, t) = (P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}, \quad M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}, \quad B(x) = (B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}, \quad P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}.$$

ومن المفترض $B(x) = 0$ لجميع x كبيرة بما فيه الكفاية. $d_k(x) \geq 0$ هو المعدل الذي يترك عنده الأفراد في المجموعة السكانية الفرعية k السكان. ل $k \neq l$ ، $\tau_{k,l}(x) \geq 0$ هو معدل انتقال الأفراد من عدد السكان الفرعي l إلى عدد السكان الفرعي k . نحدد

$$\Delta_{k,k}(x) = d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\Delta_{k,l}(x) = -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,$$

و $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ هو الحل الوحيد لمعادلات ماكنديك

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

علاوة على ذلك، $P(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$. تأمل المصفوفة

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x)S(0, x)dx,$$

مع

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x), \quad \forall x > \xi$$

و $S(\xi, \xi) = I$ (مصفوفة هوية الحجم K). نفترض أن الشعاع الطيفي ρ من $\hat{G}(0)$ هو أقل من 1. نحدد

$$L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x)M(u)du dx,$$

$$R = (I - \hat{G}(0))^{-1}L.$$

لدينا بعد ذلك

$$P(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x)M(u)du, \quad \forall x \geq 0. \quad (4)$$

وبعبارة أخرى، هرم العمر $x \mapsto P_k(x, t)$ تتحول إلى حالة مستقرة إذا $t \rightarrow +\infty$.

هذه النتائج موضحة في القسم 2. دراسة السلوك المقارب لل $P(x, t)$ يعود إلى معادلة تكاملية

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x)dx, \quad t > 0.$$

$F(t)$ و $G(x)$ هي وظائف معروفة. درست لوتكا (1939) هذه المشكلة في حالة معادلة ($K = 1$). بالنسبة لنظام المعادلات ($K > 1$)، درس (Bellman and Cooke 1963) الحالة حيث $\int_0^\infty G(x) dx$ هي مصفوفة غير قابلة للاختزال (بمعنى نظرية Frobenius و Perron للمصفوفات الإيجابية). درس كرومب (1970 و 1971) الحالة القابلة للاختزال وقد ركزت هذه الدراسات على الحالة حيث $F(t) \rightarrow 0$ إذا $t \rightarrow \infty$ في نموذجنا، تعني الهجرة غير المتجانسة في معادلات ماكندريك ذلك $F(t)$ له حد غير صفري إذا $t \rightarrow \infty$. إذا طرحنا الحالة المستقرة، يتم تقليل المشكلة غير المتجانسة إلى مشكلة متجانسة، والتي يمكننا من خلالها تطبيق النتائج على الوجود والسلوك المقارب. ومع ذلك نقترح أدناه ملاحظة للحصول على النتيجة الثانية ($P(x, t) \geq 0$) ولأن الدليل بسيط للغاية مع الفرضية دون الحرجة $\rho < 1$. ليست هناك حاجة للتمييز بين الحالات المختزلة وغير القابلة للاختزال.

في القسم 3، نقدم ثلاثة أمثلة تمثل نموذج السكان. في كل مثال، $M(x)$ يمثل الهجرة و $d_k(x)$ وفيات، والتي يمكن أن تشمل أيضًا معدل الهجرة. في المثال الثالث، $\tau_{k,l}(x)$ يمثل معدل تغيير الجنسية للأجانب. يقدم القسم 4 برنامجًا يحاكي النموذج وتطبيقه على الأمثلة الثلاثة، باستخدام بيانات من فرنسا. في القسم 5، قمنا بعمل الرابط مع نموذج أكثر تعقيدًا درسه أرينو وسميث (1998). النموذج الأكثر تعقيدًا يمثل السكان الحقيقيين بشكل أفضل. ومع ذلك، فإنه يتضمن معايير يصعب تقديرها بسبب نقص البيانات عن السكان في الأقسام السابقة. يشير الاستنتاج إلى كيفية تطبيق النموذج الأساسي (1) - (2) - (3) على مجموعات الحيوانات. ثم تأخذ المعادلات معنى مختلفًا.

أخيرًا، دعونا نذكر بعض الدراسات عن نمذجة الهجرة. درس (Martcheva 2001 و Iannelli و Barbu) إمكانية التحكم في البنية العمرية للسكان عن طريق الهجرة المنتقاة حسب العمر. في (Alvarado and Creedy 1998)، هناك نماذج منفصلة.

2. بيان النتائج

الصياغة كمعادلة متكاملة

يتم تقليل نظام المعادلات التفاضلية الخطية الجزئية من الدرجة الأولى إلى نظام معادلات تفاضلية خطية عادية من الدرجة الأولى على طول المنحنيات المميزة. لقد فعلنا ذلك

$$P(x, t) = S(x - t, x)P^0(x - t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x > t, \quad (5)$$

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t - x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du, \quad \forall x < t. \quad (6)$$

نحدد $\Phi(t) = P(0, t)$. نملك

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0.$$

ويترتب على الصيغ التي تم الحصول عليها لـ $x > t$ و $x < t$ ذلك $\Phi(x, t)$ هو حل معادلة متكاملة

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t - x) dx, \quad t > 0. \quad (7)$$

$G(x)$ هي المصفوفة

$$G(x) = B(x)S(0, x).$$

$F(t)$ هو المتجه

$$F(t) = \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x - t, x)P^0(x - t) dx + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \quad (8)$$

المعادلة (1) لها حل فريد، كما يمكن رؤيته مع طريقة التقارب المتتالي (Bellman and Cooke 1963). لذا فإن المعادلة التفاضلية الجزئية الأولية لها أيضًا حل فريد. ومع ذلك، فإن العناصر الموجودة بقطر Δ موجبة أو صفرية وتلك خارج القطر سالبة أو صفرية. هذا يعني أنه إذا $a \leq b$ ، $S(a, b)$ هي مصفوفة ذات معاملات موجبة أو صفرية (Berman and Plemmons 1994 الفصل 6 §3.12). إذا لدينا $F(t) \geq 0$ و $G(x) \geq 0 \forall x, t \geq 0$ ، وفقًا لطريقة التقارب المتتالي، $\Phi(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ ، وفقًا لـ (5) و (6)، $P(x, t) \geq 0 \forall x, t \geq 0$. يوضح هذا النتائج الأولين.

تحويل لابلاس

$\xi_0(\Phi)$ هو أصغر رقم حقيقي لدرجة أن تكامل المتجه التالي متقارب تمامًا

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\Phi(t) dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > \xi_0.$$

هو تحويل لابلاس Φ . نحدد $\xi_0(F)$ و $\xi_0(G)$ بنفس الطريقة. $B(x)$ هي وظيفة دعمها مضغوط. $G(x)$ وبالتالي هي أيضا وظيفة مع دعم مضغوط و $\xi_0(G) = -\infty$. إذا لدينا

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

هي مصفوفة هوية حجم K . لدينا بعد ذلك

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

باخذ $z \in \mathbb{C}$ مع $\xi = \text{Re}(z) > 0$ نملك

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0), \quad \forall 1 \leq k, l \leq K.$$

بحسب هورن وجونسون (1985، 8.1.18 و 8.1.19)، لدينا الأشعة الطيفية المناظرة

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

و $I - \hat{G}(z)$ يمكن عكسه. لقد فعلنا ذلك

$$\hat{\Phi}(\lambda) = (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}.$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي. نحصل على أي رقم حقيقي $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$ و $\forall t > 0$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

نحدد $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l, B_{k,l}(x) > 0\}$ تعطي الصيغة (8)

$$F(t) = L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx, \quad \forall t \geq X.$$

مع $\operatorname{Re}(z) > 0$ و $z \in \mathbb{C}$

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

إذا كانت $L \neq 0$ ، فإن $z = 0$ هي قطب \hat{F} مع أكبر جزء حقيقي، و L هو المتبقي عند $z = 0$ لذا $z = 0$ هو أيضاً القطب $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$ مع الجزء الحقيقي الأكبر و $R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L$ هو المتبقي عند $z = 0$. تعطي الصيغة المتبقية على (9)

$$\Phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} R.$$

هذا لا يزال صحيحاً إذا $L = 0$ ، لأنه بعد ذلك كل أقطاب $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$ في النصف الأيسر من المستوى المركب. $\Phi(t)$ لذلك يتحول إلى 0 إذا $t \rightarrow \infty$. في جميع الأحوال ينتج من (6)

$$P(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du, \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

هذه هي النتيجة الثالثة.

3. أمثلة

تم تصميم الأمثلة في هذا القسم لتمثيل السكان: $M_k(x)$ هي الهجرة و $d_k(x)$ معدل الوفيات. إذا كان هناك هجرة، يتغير فقط $d_k(x)$.

المثال الأول

ينقسم السكان بين الرجال (ك = 1) والنساء (ك = 2). ومن المفترض

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

مما يعني أن عدد المواليد يعتمد على عدد النساء ولكن ليس على عدد الرجال. لتبسيط الصيغ، افترض ذلك $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$. هذا الافتراض يعني أن فرص أن يكون المولود صبياً أو فتاة متساوية (في الواقع، هذا صحيح تقريباً).

لأن B هي مصفوفة مثلثة أعلى، $\hat{G}(0)$ له نفس الهيكل. لذا فإن نصف القطر الطيفي هو

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

ومن المفترض $\rho(\hat{G}(0)) < 1$. يتم حساب المتجه R بسهولة:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

لدينا بعد ذلك $\forall x \geq 0$ ،

$$P_1(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du.$$

المثال الثاني

ينقسم السكان بين الرجال المولودين في الدولة (ك = 1)، والنساء المولودات في البلاد (ك = 2) والجيل الأول من المهاجرين، والرجال (ك = 3) أو النساء (ك = 4). ومن المفترض

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

مما يعني أن النساء المهاجرات يلدن أطفالاً في البلاد ، بمعدل مختلف عن النساء المولودات في البلاد. لنفترض ذلك أيضاً $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$ و $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ لأن B و $\hat{G}(0)$ هي مصفوفات مثلثة عليا ،

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

في هذا النموذج ، لا يمكن لمعدل الخصوبة المرتفع للمهاجرين تغيير وضع دون الحرج إلى وضع فوق الحرج ($\rho(\hat{G}(0)) > 1$). ومن المفترض $\rho(\hat{G}(0)) < 1$. لا يزال يتم حساب المتجه R بسهولة:

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

لدينا بعد ذلك $\forall x \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا المثال الثاني يعطي المثال الأول مرة أخرى إذا $d_1 = d_3$ و $d_2 = d_4$ ، بمعنى ، $b_2 = b_4$ و $d_2 = d_4$ ، $d_1 = d_3$. في الواقع ، $P_1 + P_3$ يستبدل P_1 و $P_2 + P_4$ يستبدل P_2 .

المثال الثالث

ينقسم السكان إلى مواطنين ، رجال (ك = 1) أو نساء (ك = 2) ، وأجانب ، رجال (ك = 3) أو نساء (ك = 4). ومن المفترض

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

مما يعني أن النساء الأجنبيات يلدن أطفالاً أجنبياً ، ولكن يمكن للأجانب تغيير جنسيتهم (يتم نقلهم من الفئة الفرعية 3 أو 4 إلى الفئة الفرعية 1 أو 2). لتبسيط ، نفترض $d_1 = d_3$ و $d_2 = d_4$: وفاة الأجانب هي نفس نسبة وفاة المواطنين. نفترض أيضاً $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$ و $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$. لدينا بعد ذلك

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$

مع

$$\begin{aligned} S_{1,1}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du}, \quad S_{2,2}(y, x) = e^{-\int_y^x d_2(u) du}, \\ S_{3,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, \quad S_{4,4}(y, x) = e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} S_{1,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du} e^{-\int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz, \\ S_{2,4}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du} e^{-\int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz. \end{aligned}$$

لقد فعلنا ذلك

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثة علوية ،

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} ; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

ومن المفترض $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ لا يزال المتجه R محسوبًا بسهولة. نحدد

$$L_2 = \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx$$

$$L_4 = \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx.$$

نملك $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$ و

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4 / (1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

أخيرا ، لدينا $\forall x \geq 0$ ،

$$P_1(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du$$

$$P_3(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du$$

$$P_4(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du.$$

لاحظ أن هذا المثال الثالث يختزل إلى المثال الأول إذا $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ ، هذا يعني إذا لم تختلط الفئات الفرعية $\{1,2\}$ و $\{3,4\}$.

4. البرمجيات

لتوضيح هذه الدراسة ، كتبنا برنامجًا يتم تشغيله في بيئة Scilab ، وهو برنامج مجاني للحساب العددي متاح على www-rocq.inria.fr/scilab. يمكن العثور على البرنامج المسمى census.sci مع الملفات التي تحتوي على البيانات الخاصة بفرنسا على العنوان www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Immigration/immigration/immigration.html. يحل نظام المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة الفروق المحدودة. يتم تحديد $\delta t > 0$ و $\delta x > 0$ هي قيمة $P_k^i(x, t)$ إذا $t = j \delta t$ و $x = i \delta x$ نستخدم تدوينات مماثلة لـ $\Delta_{k,l}$ ، M_k ، $B_{k,l}$ و P_k^0 . لدينا بعد ذلك

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$

$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^\infty B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$

$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

لاحظ التخمينات التدرجية مقارنة بالوقت والتراجع مقارنة بالعمر. المعادلات هي في الواقع معادلات التآفق ، لذلك يجب أن نأخذ في الاعتبار اتجاه المنحنيات المميزة للحصول على مخطط متقارب. الحالة $\delta t \leq \delta x$ يجب احترامه أيضًا. في البرنامج ، أخذنا دائما δx يساوي سنة واحدة.

تفسير

النحو التالي:

census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichiers)

تعريفات:

- X, K: أعداد صحيحة موجبة
- annees: متجه الأعداد الصحيحة الموجبة أو الصفرية
- droite, gauche: مصفوفات العمود K من الأعداد الحقيقية
- mfichiers, dfichiers, bfichiers, pfichiers: نوافل سلاسل الأحرف
- dindices, bindices: عمودين من الأعداد الصحيحة الموجبة $\leq K$
- mindices: ناقل الأعداد الصحيحة الموجبة $\leq K$.

المعنى:

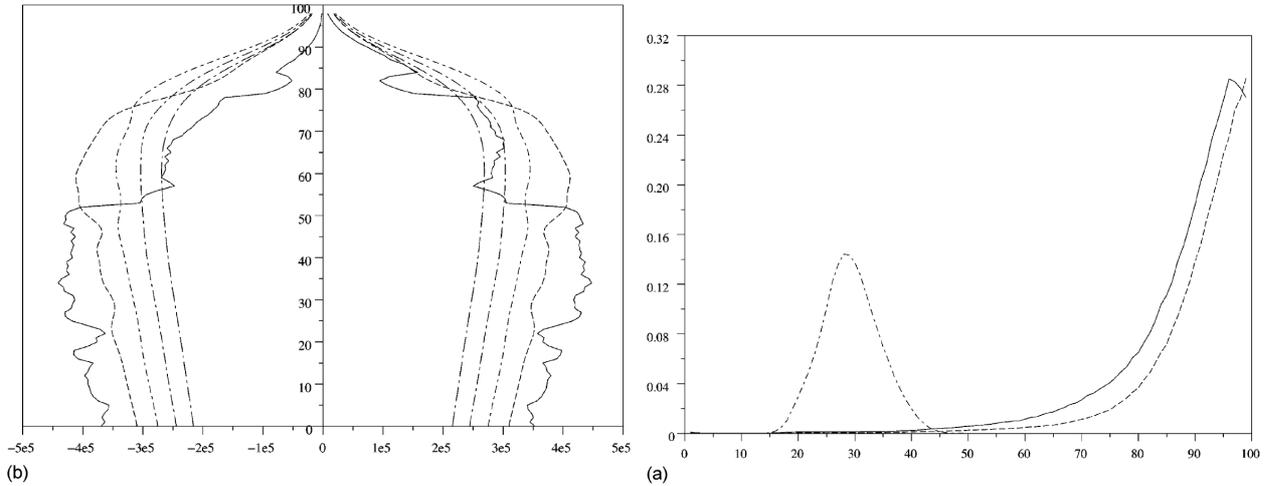
- X: أقصى عمر
- K: عدد المجموعات الفرعية
- annees: الأوقات التي سيتم فيها رسم السكان
- droite, gauche: الخطوط الموجودة على اليسار (على اليمين) تحدد المجموعات الخطية لـ (P_1, \dots, P_K) ، والتي يتم تمثيلها على اليسار (النتفس على اليمين) في الشكل
- mfichiers, dfichiers, bfichiers, pfichiers: أسماء الملفات التي تحتوي على البيانات ؛ هذه الملفات عبارة عن متجهات أعمدة
- dindices, bindices: تغطي صفوف هذه المصفوفات مؤشرات (صف وعمود) للمعاملات غير الصفرية للمصفوفتين B و Δ ، والتي ترد قيمتها في bfichiers و dfichiers. عدد خطوط bindices (ريب. dindices وبالتالي يساوي طول الناقل bfichiers (ريب. dfichiers).
- mindices: مؤشرات من غير صفر معاملات ناقلات M. القيمة في mfichiers.

المثال الأول

كبيانات أولية للسكان الذكور والإناث ، نأخذ نتائج تعداد 1999 في فرنسا. يتم حساب معدلات الخصوبة والوفيات باستخدام بيانات من نفس العام (بوميل ودويسنو وفاتان ، 2001): انظر الشكل 1 (أ). إذا كانت الهجرة صفراً ، فعندئذٍ

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[],[])
```

يعطي الشكل 1 (ب) ، حيث يتقارب السكان في النهاية إلى 0 ، ولكن ببطء شديد.

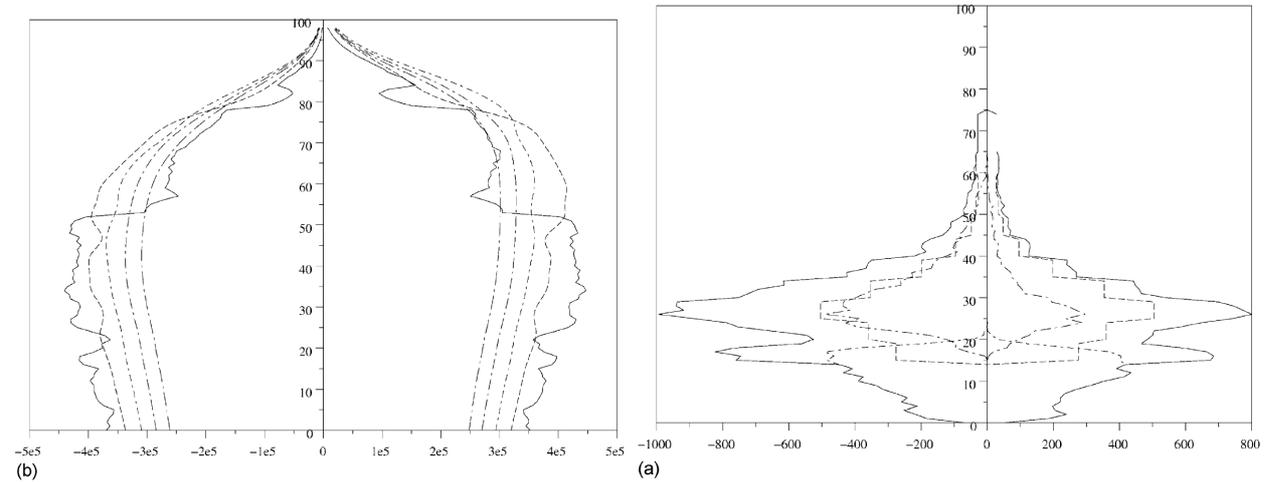


الشكل 1. بدون هجرة. (أ) مجموع الولادات: $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$. معدل الوفيات: $x \mapsto d_1(x)$ و $x \mapsto d_2(x)$. (ب) اليسار: $P_1(x, t)$. على اليمين: $P_2(x, t)$. خط مستمر: الوضع في عام 1999. الخطوط المنقططة: إسقاطات بعد 25 و 50 و 75 و 100 سنة.

يتم تضمين الهجرة الآن $M(x)$. دينه (1994) محسوبة $M(x)$ باستخدام نتائج تعدادين متتاليين وبيانات الولادات والوفيات بين هذين التعدادين. أعطت الطريقة نتائج معقولة حتى الثمانينيات ، ولكن بين عامي 1990 و 1999 ، كان إجمالي الهجرة من نفس ترتيب الأخطاء في التعدادات ، بحيث لم تعطي الحسابات نتيجة معقولة. طريقة أخرى هي استخدام البيانات السنوية من مكتب الهجرة الدولية (1999) ، والتي تم تلخيصها في الشكل 2 (أ). إجمالي الهجرة هو مجموع العمال المهاجرين ، والمهاجرين الذين حصلوا على تصريح إقامة ، والمهاجرين في سياق لم شمل الأسرة. وجدنا بيانات حسب العمر للمهاجرين الذين حصلوا على تصريح إقامة (ومن ثم وظيفة الدرج في الشكل 2 (أ)) ، ولكن ليس للبالغين في سياق لم شمل الأسرة. بالنسبة للحسابات ، تكون المنحنيات الخارجية للشكل 2 (أ) فقط مفيدة. إذن التعليمات

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat' 'female.dat',[1 2; 2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maleddeath.dat' 'femaleddeath.dat'],[1 2],[ 'maleimmigrant.dat' 'femaleimmigrant.dat']);
```

ينتج الشكل 2 (ب). يتحول الهيكل السكاني ببطء إلى حالة مستقرة مع إجمالي عدد صغير من السكان (غير موضح في الشكل).



الشكل 2. تأثير الهجرة. (أ) مجموع الهجرة ومكوناتها الثلاثة: على اليسار: $x \mapsto M_1(x)$. على اليمين: $x \mapsto M_2(x)$. (ب) اليسار: $P_1(x, t)$. على اليمين: $P_2(x, t)$. خط مستمر: الوضع في عام 1999. خط منقط: إسقاطات بعد 25 و 50 و 75 و 100 سنة.

هذا النوع من النماذج (مع $K = 2$) يشبه الإصدارات المنفصلة المستخدمة من قبل (INSEE (Brutel, 2001)). من السهل انتقاد هذا النموذج. من ناحية ، نستخدم أرقام هجرة منخفضة إلى حد ما. من ناحية أخرى ، يتم استخدام البيانات الحالية لحساب معدل المواليد. حالياً ، هذا المعدل مرتفع جداً. ويرجع ذلك جزئياً إلى ارتفاع نسبة المهاجرين بين السكان وحقيقة أن معدلات الخصوبة لدى المهاجرين أعلى من الفرنسيين. هذا يقودنا إلى النموذجين التاليين.

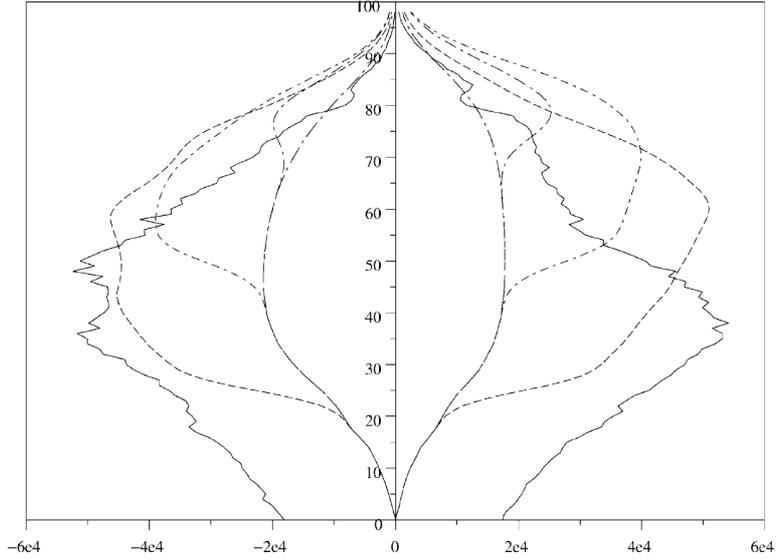
المثال الثاني

كبيانات أولية للسكان الذكور والإناث المولودين في فرنسا أو المهاجرين ، نأخذ نتائج تعداد 1999 (INSEE ، 2001). نستخدم نفس ملف الهجرة كما في المثال الأول. لتقدير معدلات الخصوبة ، افترض أن هناك رقماً $\varepsilon > 0$ مع $B_{1,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$ و $B_{2,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$ لجميع s . نحن نعلم إجمالي عدد الأطفال المولودين لأمهات أجنبيات (الذين هم إلى حد ما مجموعة فرعية من النساء المهاجرات) وكذلك عدد النساء الأجنبيات. نحصل $\varepsilon = 0,6$. ثم

```
census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigrate.dat' 'femaleimmigrate.dat'],
[1 2; 2 2; 1 4; 2 4],[ 'malenativemother.dat' 'femalenativemother' 'maleimmigratemother.dat' 'femaleimmigratemother.dat'],
```

[1 1; 2 2; 3 3; 4 4],[maledeath.dat' femaledeath.dat' maledeath.dat' femaledeath.dat'],
[3 4],[maleimmigrant.dat' femaleimmigrant.dat']];

ينتج الشكل 3 للأهرامات العمرية للمهاجرين. يتحول الهرم بسرعة (بعد 100 عام) إلى حالة ثابتة.



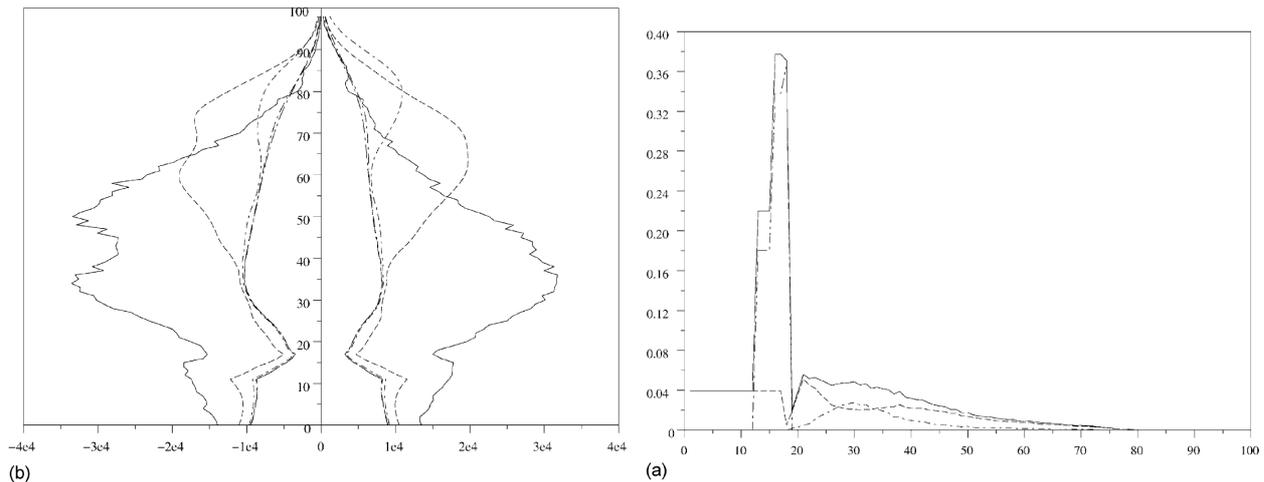
الشكل 3. الأشخاص الذين ولدوا في فرنسا والمهاجرين بمعدلات خصوبة مختلفة. على اليسار: $P_3(x, t)$ (رجال مهاجرون). على اليمين: $P_4(x, t)$ (المهاجرات).

المثال الثالث

كبيانات أولية للسكان الذكور والإناث من الجنسية الفرنسية والأجنبية، نأخذ نتائج تعداد 1999 (INSEE، 2001). نستخدم نفس ملف الهجرة كما في المثال الأول. لتقدير معدلات الخصوبة، ما زلنا نفترض أن هناك عددًا $\varepsilon > 0$ مع $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$ و $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$ للجميع x . معرفة إجمالي عدد الأطفال المولودين لأمهات أجنبيات، نحصل عليه $\varepsilon = 0,56$. لمعدلات تغيير الجنسية، يفترض ذلك $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$. مع بيانات من وزارة العدل (2001)، لدينا تقدير $\tau(x)$. انظر الشكل 4 (أ). يلخص هذا التقدير مساهمات ثلاثة أنواع من الإجراءات، كما هو موضح أيضًا في الشكل 4 (أ): بدون إجراء رسمي أو مقدمًا (الأطفال الأجانب المولودون في فرنسا والذين أصبحوا مواطنين في سن 18)، بموجب مرسوم (الأجانب الذين عاشوا طويلًا في فرنسا وأولادهم) وعن طريق الإعلان (الزواج من مواطن فرنسي). في جميع الحالات التي يتم فيها إعطاء الهيكل العمري فقط حسب الفئة العمرية، استخدمنا وظائف الدرج كتقريب. إذن التعليمات

census(99,4,[0 25 50 75 100],[0 0 1 0],[0 0 0 1],[malefrench.dat' femalefrench.dat' maleforeign.dat' femaleforeign.dat'],
[1 2; 2 2; 3 4; 4 4],[malefrenchmother.dat' femalefrenchmother.dat' maleforeignmother.dat' femaleforeignmother.dat'],
[1 1; 1 3; 2 2; 2 4; 3 3; 4 4],[d11.dat' d13.dat' d22.dat' d24.dat' d33.dat' d44.dat'],[3 4],
[maleimmigrant.dat' femaleimmigrant.dat']];

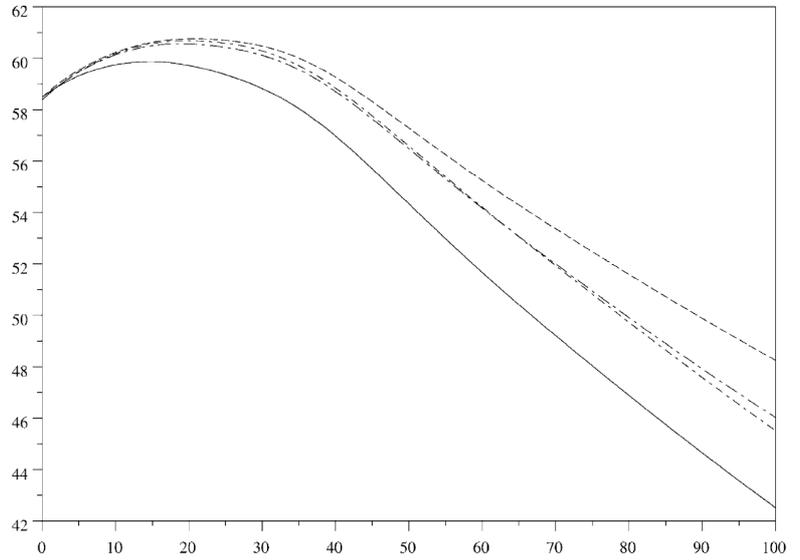
ينتج الشكل 4 (ب) للأهرامات العمرية للأجانب. يتحول الهرم بعد 100 عام إلى حالة ثابتة.



الشكل 4. الفرنسيون والأجانب مع خصوبة مختلفة. (أ) الحصول على الجنسية الفرنسية. معدل نقل $\tau(x)$ والمكونات الثلاثة. (ب) اليسار: $P_3(x, t)$ (الرجال الأجانب). على اليمين: $P_4(x, t)$ (المرأة الأجنبية).

مقارنة

لمقارنة النماذج المختلفة، يوضح الشكل 5 الإسقاطات لمجموع السكان. أدنى منحني هو أنه بدون هجرة. أعلى منحني هو أنه مع الهجرة ولكن دون اختلاف في الخصوبة (المثال الأول). يتوافق المنحنيان المتوسطان الوثيق جدًا مع المثال الثاني والثالث، حيث يتم تمييز الأشخاص المولودين في فرنسا (مواطنون فرنسيون) عن المهاجرين (أجانب). الفرق بالنسبة لإجمالي عدد السكان بين هذين النموذجين الأخيرين والمثال الأول للهجرة هو حوالي 0.7 مليون بعد 50 عامًا وحوالي 2.5 مليون بعد 100 عام.



الشكل 5. إسقاطات لإجمالي عدد السكان (بالملايين) في ظل افتراضات مختلفة.

5. الارتباط بنموذج أكثر تعقيداً

درس أرينو وسميث (1998) نموذجاً أكثر تعقيداً مع متغير واحد آخر ، والذي يعمم على النحو التالي. كل من K ينقسم القطعان إلى قسمين:

- هناك أفراد كانوا في هذه الفئة الفرعية منذ الولادة. $Q_k(x, t)$ كثافتها.
- الأفراد الذين كانوا في مجموعة سكانية أخرى من قبل. $R_k(x, y, t)$ هي كثافة من هؤلاء الأفراد في سن العاشر في وقت t ، الذين كانوا في شبه سكان k ل n سنوات ($n > 0$).

ينتمي حديثو الولادة إلى النوع الأول ، بينما ينتقل الأفراد المهاجرون والمهاجرون من النوع الثاني. ومن هنا النموذج

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0, \\ Q(0, t) &= \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0, \\ R(x, 0, t) &= \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \\ Q(x, 0) &= Q^0(x), \quad \forall x > 0, \\ R(x, y, 0) &= R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0. \end{aligned}$$

المصفوفات Δ^R و Δ^Q قطري و

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k}^Q(x) &= d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x), \\ \Delta_{k,k}^R(x, y) &= d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y). \end{aligned}$$

هذا النموذج ، المطبق على المثال الثالث من القسمين 3 و 4 ، يعطي نظاماً من ثمانية معادلات تفاضلية جزئية وظروف حافة لـ

- الشعب الفرنسي بالولادة ،
- الفرنسيون عن طريق الاستحواذ ،
- الأجانب المولودين في فرنسا ،
- الأجانب المولودين في الخارج.

مصفوفات الولادة والنقل B^Q ، B^R ، τ^Q و τ^R لها نفس النموذج كما في القسم 3: على سبيل المثال ، $\tau_{2,4}^R$ و $\tau_{1,3}^R$ هي المعاملات الوحيدة غير الصفرية τ^R . يمكن أن يمثل النموذج معدلات النقل بدقة. يصبح جميع الأجانب المولودين في فرنسا تقريباً مواطنين فرنسيين في سن 18 عاماً. $\tau_{2,4}^Q(x)$ و $\tau_{1,3}^Q(x)$ وبالتالي يكون لها ذروة إذا كان $s = 18$ سنة. لا يمكن للأجانب المولودين في الخارج أن يصبحوا فرنسيين بشكل عام إذا كانوا دون سن 18 عاماً أو إذا كانوا يعيشون في فرنسا لمدة تقل عن خمس سنوات (وفقاً للقانون). $\tau_{1,3}^R(x, y)$ و $\tau_{2,4}^R(x, y)$ وبالتالي تكون قريبة من الصفر إذا كان $x < 18$ أو $y < 5$.

على الرغم من أن النموذج يتبع العمليات التطورية بشكل صحيح ، إلا أنه من الصعب تنفيذه لأن البيانات غير معروفة ، على سبيل المثال $R_k^0(x, y)$ $k \geq 1$ و $k \leq 4$. قد تكون هذه البيانات متاحة من خلال الملف الضخم لتعداد عام 1999 ، ولكن لم يتم نشرها.

إحدى الطرق حول هذه المشكلة هي افتراض ذلك Δ^R ، B^R و τ^R لا تعتمد على n . لكن هذا يقلل بشكل أو بآخر النموذج المعقد إلى النموذج الوارد في القسم 3.3. في الواقع ، نحن نحدد

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy, \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \left(\begin{array}{c} 0 \\ m \end{array} \right).$$

بالنسبة لهذا النموذج الأخير ، تتوفر البيانات لإجراء الحسابات. لن تكون النتيجة مختلفة تمامًا عن الشكل 4.

6. الخلاصة

يمكن أن يكون النموذج الخطي (1) - (2) - (3) مفيدًا لمشاكل أخرى ، على سبيل المثال لمجموعات الأسماك. قد لا يقيم السكان الفرعيون في نفس المكان. يمكن للمرء أن يتصور مجموعات فرعية في مواقع مختلفة ، مع عمليات الهجرة كما هو الحال في (Arino and Smith (1998). الوظيفة $d_k(x)$ قد يشمل الصيد. $M_k(x)$ يمكن أن يمثل إعادة إدخال الأسماك من الأنواع المهتدة بالانقراض ، مثل سمك السلمون في فرنسا.

يمكن للمرء أيضًا تطوير إصدارات غير خطية أو غير متجانسة من النموذج ، كما هو الحال في (Hoppensteadt (1975 أو (Webb (1985 أو (Cushing (1998).

المراجع البليوغرافية

- Alvarado J. , Creedy J. (1998) Population Aging, Migration and Social Expenditure. Cheltenham, Edward Elgar.
- Arino O. , Smith W. V. (1998) Migration in age structured population dynamics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 8(5) 905 – 925
- Barbu V. , Iannelli M. , Martcheva M. (2001) On the controllability of the Lotka – McKendrick model of population dynamics. Journal of Mathematical Analysis and Applications 253, 142 – 165.
- Beaumel C. , Doisneau L. , Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 – mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des études économiques.
- Bellman R. E. , Cooke K. L. (1963) Differential – difference Equations. New York : Academic Press.
- Berman A. , Plemmons R. J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 30, 425 – 434.
- Crump K. S. (1970) On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications 31, 517 – 528.
- Cushing J. M. (1998) An Introduction to Structured Population Dynamics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dinh Q. C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. Économie et Statistique 274, 7 – 32.
- Hoppensteadt F. (1975) Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Horn R. A. , Johnson C. R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge : Cambridge University Press.
- INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
- OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
- Webb G. F. (1985) Theory of Nonlinear Age – Dependent Population Dynamics. New York : Marcel Dekker.