



**HAL**  
open science

# Le comportement asymptotique de l'équation de McKendrick avec immigration

Nicolas Bacaër

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër. Le comportement asymptotique de l'équation de McKendrick avec immigration. 2003, pp.1-20. 10.1080/08898480306716 . hal-01577654v2

**HAL Id: hal-01577654**

**<https://hal.science/hal-01577654v2>**

Submitted on 31 May 2020 (v2), last revised 15 May 2024 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le comportement asymptotique de l'équation de McKendrick avec immigration

Nicolas Bacaër

Mathematical Population Studies 10 (2003) 1-20

hal : 01577654

Traductions : [ar, de, es, it, ja, nl, pt, ru, zh], [html]

## Résumé

L'objectif de cet article est de discuter de l'influence de l'immigration dans un modèle mathématique pour l'évolution de la structure par âge de la population. Dans le cas sous-critique, la structure par âge converge vers un état stationnaire. On présente un programme qui simule le modèle et qui est utilisé pour des projections pour la population de la France. On insiste aussi sur le lien avec un modèle plus complexe.

Mots clés : démographie, structure de la population, immigration, équations aux dérivées partielles, transformation de Laplace

## 1 Introduction

On divise une population en  $K$  sous-populations ( $K \geq 1$ ). Les variables  $x$  et  $t$  représentent l'âge et le temps. Soit  $P_k(x, t)$  la densité de la sous-population  $k$  d'âge  $x$  au temps  $t$ , et  $P(x, t)$  la fonction vectorielle  $(P_k(x, t))_{1 \leq k \leq K}$ . Supposons qu'il y ait une fonction  $M_k(x) \geq 0$  constante, c'est-à-dire indépendante du temps, qui représente le flux d'individus d'âge  $x$  qui entrent dans la sous-population  $k$  et proviennent d'une autre population. Soit  $M(x) = (M_k(x))_{1 \leq k \leq K}$ . Supposons qu'il existe une fonction  $B_{k,l}(x) \geq 0$  qui représente la fertilité des individus de la sous-population  $l$  qui donnent naissance à des individus dans la sous-population  $k$ . Soit  $B(x)$  la fonction matricielle  $(B_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ . Supposons que  $B(x) = 0$  pour tout  $x$  suffisamment grand. Soit  $P_k^0(x)$  la structure initiale par âge de la sous-population  $k$ , et posons  $P^0(x) = (P_k^0(x))_{1 \leq k \leq K}$ . Supposons qu'il y ait une fonction constante  $d_k(x) \geq 0$  qui représente le taux auquel les individus de la sous-population  $k$  « quittent » la population. Pour tout  $k \neq l$ , supposons qu'il existe une fonction constante  $\tau_{k,l}(x) \geq 0$  qui représente le taux de « transfert » des individus de la sous-population  $l$  vers la sous-population  $k$ .

Posons

$$\begin{aligned}\Delta_{k,k}(x) &= d_k(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}(x), \quad 1 \leq k \leq K, \\ \Delta_{k,l}(x) &= -\tau_{k,l}(x), \quad k \neq l,\end{aligned}$$

et  $\Delta(x) = (\Delta_{k,l}(x))_{1 \leq k, l \leq K}$ . Alors  $P(x, t)$  est l'unique solution des équations de McKendrick

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta(x)P(x, t) = M(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

$$P(0, t) = \int_0^\infty B(x)P(x, t)dx, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad \forall x > 0. \quad (3)$$

De plus,  $P(x, t) \geq 0$  pour tout  $(x, t) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Considérons la matrice<sup>1</sup>

$$\hat{G}(0) = \int_0^\infty B(x)S(0, x)dx,$$

où  $\frac{\partial S}{\partial x}(\xi, x) = -\Delta(x)S(\xi, x)$  pour  $x > \xi$  et  $S(\xi, \xi) = I$  (la matrice identité de taille  $K \times K$ ). Supposons que le rayon spectral  $\rho$  de  $\hat{G}(0)$  soit strictement inférieur à 1. Posons

$$\begin{aligned}L &= \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x)M(u)du dx, \\ R &= (I - \hat{G}(0))^{-1}L.\end{aligned}$$

Alors pour tout  $x \geq 0$ ,

$$P(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x)M(u)du. \quad (4)$$

Autrement dit, pour tout  $1 \leq k \leq K$ , la pyramide des âges  $x \mapsto P_k(x, t)$  converge vers un état stationnaire quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Ces résultats sont démontrés dans la section 2. L'étude du comportement asymptotique de  $P(x, t)$  revient à celle de  $\Phi(t)$ , où  $\Phi(t)$  est l'unique solution d'une équation intégrale de la forme

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x)dx, \quad t > 0,$$

où  $F(t)$  et  $G(x)$  sont donnés. Ce problème a été étudié par Lotka (1939) dans le cas d'une équation ( $K = 1$ ). Pour un système d'équations ( $K > 1$ ), Bellman et Cooke (1963) ont étudié le cas où  $\int_0^\infty G(x)dx$  est une matrice irréductible (au sens de la théorie de Perron et Frobenius des matrices positives), et Crump

---

1. Attention :  $S(0, x)$  n'est pas en général égal à  $e^{-\int_0^x \Delta(u)du}$ .

(1970 et 1971) a étudié le cas réductible. Ces études se sont focalisées sur le cas où  $F(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Dans notre modèle, le terme inhomogène  $M(x)$  dans les équations de McKendrick implique que  $F(t)$  a une limite non nulle quand  $t \rightarrow \infty$ . Si l'on soustrait l'état stationnaire, le problème inhomogène se réduit à un problème homogène, pour lequel on peut appliquer les résultats sur l'existence et le comportement asymptotique. On propose néanmoins ci-dessous une démonstration pour obtenir le second résultat ( $P(x, t) \geq 0$ ) et parce que la démonstration est assez simple avec l'hypothèse sous-critique  $\rho < 1$  : on n'a pas besoin de distinguer les cas réductibles et irréductibles.

Dans la section 3, on présente trois exemples qui modélisent des populations humaines. Dans chaque exemple, le terme  $M(x)$  représente l'immigration et  $d_k(x)$  la mortalité, qui pourrait aussi inclure le taux d'émigration. Dans le troisième exemple,  $\tau_{k,l}(x)$  représente le taux de changement de nationalité pour les étrangers. La section 4 présente un programme qui simule le modèle et son application aux trois exemples, en utilisant des données de France. Dans la section 5, on fait le lien avec un modèle plus complexe étudié par Arino et Smith (1998). Le modèle plus complexe représente mieux les populations réelles. Cependant, il fait intervenir des paramètres difficiles à estimer par manque de données pour les populations humaines des sections précédentes. La conclusion indique comment le modèle de base (1)-(2)-(3) pourrait s'appliquer à des populations animales; les termes des équations prennent alors un sens différent.

Pour finir, mentionnons quelques études sur la modélisation de l'immigration. Barbu, Iannelli et Martcheva (2001) ont étudié la contrôlabilité de la structure par âge d'une population par une immigration sélective sur l'âge. Dans le livre d'Alvarado et Creedy (1998), on trouve des modèles discrets.

## 2 Démonstration des résultats

### 2.1 Formulation comme une équation intégrale

Le système d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre le long des caractéristiques. Ainsi, pour  $x > t$ ,

$$P(x, t) = S(x - t, x)P^0(x - t) + \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du \quad (5)$$

tandis que pour  $x < t$ ,

$$P(x, t) = S(0, x)P(0, t - x) + \int_0^x S(u, x)M(u) du. \quad (6)$$

Posons  $\Phi(t) = P(0, t)$ . Puisque

$$\Phi(t) = \int_0^t B(x)P(x, t) dx + \int_t^\infty B(x)P(x, t) dx, \quad t > 0,$$

il résulte des formules obtenues pour  $x > t$  et  $x < t$  que  $\Phi(x, t)$  est solution d'une équation intégrale de la forme

$$\Phi(t) = F(t) + \int_0^t G(x)\Phi(t-x) dx, \quad t > 0, \quad (7)$$

où la matrice  $G(x)$  est définie par

$$G(x) = B(x)S(0, x),$$

et  $F(t)$  est le vecteur défini par

$$\begin{aligned} F(t) = & \int_0^t B(x) \int_0^x S(u, x)M(u) du dx + \int_t^\infty B(x)S(x-t, x)P^0(x-t) dx \\ & + \int_t^\infty B(x) \int_{x-t}^x S(u, x)M(u) du dx. \end{aligned} \quad (8)$$

L'équation (7) a une unique solution, comme on peut le voir avec la méthode des approximations successives (Bellman et Cooke, 1963). Donc l'équation aux dérivées partielles initiale a aussi une unique solution. Or les éléments sur la diagonale de  $\Delta$  sont positifs ou nuls et ceux en dehors de la diagonale sont négatifs ou nuls. Ceci implique que pour tout  $a \leq b$ ,  $S(a, b)$  est une matrice à coefficients positifs ou nuls (Berman et Plemmons, 1994 chap. 6 § 3.12). Donc  $F(t) \geq 0$  et  $G(x) \geq 0$  pour tout  $x, t \geq 0$ . La méthode des approximations successives montre alors que  $\Phi(t) \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ . D'après (5) et (6),  $P(x, t) \geq 0$  pour tout  $x, t \geq 0$ . Ceci démontre les deux premiers résultats.

## 2.2 Transformation de Laplace

Soit  $\xi_0(\Phi)$  le plus petit nombre réel tel que l'intégrale vectorielle

$$\hat{\Phi}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\Phi(t) dt,$$

c'est-à-dire la transformée de Laplace de  $\Phi$ , soit absolument convergente pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $\text{Re}(z) > \xi_0$ . Définissons  $\xi_0(F)$  et  $\xi_0(G)$  de la même manière. Puisque  $B(x)$  est à support compact,  $G(x)$  l'est aussi et  $\xi_0(G) = -\infty$ . Donc pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F)\}$ ,

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) + \hat{G}(z)\hat{\Phi}(z).$$

Soit  $I$  la matrice identité de taille  $K \times K$ . Alors

$$(I - \hat{G}(z))\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z).$$

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\xi = \text{Re}(z) > 0$ . Pour tout  $1 \leq k, l \leq K$ ,

$$|\hat{G}_{k,l}(z)| \leq \hat{G}_{k,l}(\xi) \leq \hat{G}_{k,l}(0).$$

Donc d'après Horn et Johnson (1985, §8.1.18 et 8.1.19), les rayons spectraux correspondants vérifient

$$\rho(\hat{G}(z)) \leq \rho(\hat{G}(\xi)) \leq \rho(\hat{G}(0)) < 1,$$

et  $I - \hat{G}(z)$  est inversible. Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(z) > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$ ,

$$\hat{\Phi}(\lambda) = (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z).$$

Prenons la transformée de Laplace inverse. On obtient pour tout nombre réel  $\xi > \max\{\xi_0(\Phi), \xi_0(F), 0\}$  et pour tout  $t > 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi - i\eta}^{\xi + i\eta} e^{zt} (I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z) dz. \quad (9)$$

Posons  $X = \sup\{x \geq 0; \exists k, l \text{ tels que } B_{k,l}(x) > 0\}$ . Notez que la formule (8) implique que pour tout  $t \geq X$ ,

$$F(t) = L = \int_0^\infty B(x) \int_0^x S(u, x) M(u) du dx.$$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(z) > 0$ ,

$$\hat{F}(z) = \int_0^X e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-zX}}{z} L.$$

Si  $L \neq 0$ , alors  $z = 0$  est le pôle de  $\hat{F}$  avec la partie réelle la plus grande, et  $L$  est le résidu en  $z = 0$ . Ainsi  $z = 0$  est aussi le pôle de  $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$  avec la partie réelle la plus grande et  $R = (I - \hat{G}(0))^{-1} L$  est le résidu en  $z = 0$ . La formule des résidus appliquée à (9) donne

$$\Phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} R.$$

Ceci reste vrai si  $L = 0$ , car alors tous les pôles de  $(I - \hat{G}(z))^{-1} \hat{F}(z)$  sont dans le demi-plan gauche du plan complexe, ce qui implique que  $\Phi(t)$  converge vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . Dans tous les cas, il résulte de (6) que pour tout  $x \geq 0$ ,

$$P(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S(0, x)R + \int_0^x S(u, x) M(u) du. \quad (10)$$

C'est le troisième résultat.

### 3 Exemples

Les exemples dans cette section sont conçus pour représenter des populations humaines :  $M_k(x)$  est l'immigration et  $d_k(x)$  la mortalité. S'il y a de l'émigration, seul  $d_k(x)$  change.

### 3.1 Premier exemple

La population est divisée entre hommes ( $k = 1$ ) et femmes ( $k = 2$ ). Supposons que

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que le nombre de naissances dépend du nombre de femmes mais pas du nombre d'hommes. Pour simplifier les formules, supposons que  $B_{1,2}(x) = B_{2,2}(x) = b(x)$ . Cette hypothèse signifie que les probabilités pour un nouveau-né d'être un garçon ou une fille sont égales (en pratique, c'est presque vrai).

Puisque  $B$  est une matrice triangulaire supérieure,  $\hat{G}(0)$  l'est aussi. Donc le rayon spectral est

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Supposons que  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . Le vecteur  $R$  se calcule facilement :

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}.$$

Alors pour tout  $x \geq 0$ ,

$$P_1(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_1(v) dv} M_1(u) du,$$

$$P_2(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 + \int_0^x e^{-\int_u^x d_2(v) dv} M_2(u) du.$$

### 3.2 Deuxième exemple

La population est divisée entre les hommes nés dans le pays ( $k = 1$ ), les femmes nées dans le pays ( $k = 2$ ) et les immigrés de première génération, qui sont soit des hommes ( $k = 3$ ), soit des femmes ( $k = 4$ ). Supposons que

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & 0 & B_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que les femmes immigrées donnent naissance à des enfants du pays, avec un taux différent de celui des femmes nées dans le pays. Supposons aussi que  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  et  $B_{1,4} = B_{2,4} = b_4$ . Puisque  $B$  et  $\hat{G}(0)$  sont des matrices triangulaires supérieures,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx.$$

Notons que  $\rho(\hat{G}(0))$  ne dépend pas de  $b_4$ . Dans ce modèle, un taux de fertilité élevé pour les immigrés ne peut changer une situation sous-critique ( $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ ) en une situation surcritique ( $\rho(\hat{G}(0)) > 1$ ). Supposons que  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . Le vecteur  $R$  se calcule encore facilement :

$$R_1 = R_2 = \frac{\int_0^\infty b_4(x) \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du dx}{1 - \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} dx}, \quad R_3 = R_4 = 0.$$

Alors pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_1(u) du} R_1, \\ P_2(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\int_0^x d_2(u) du} R_2 \\ P_3(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_0^x e^{-\int_u^x d_3(v) dv} M_3(u) du, \\ P_4(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_0^x e^{-\int_u^x d_4(v) dv} M_4(u) du. \end{aligned}$$

Notez que ce deuxième exemple redonne le premier exemple si  $d_1 = d_3$ ,  $d_2 = d_4$  et  $b_2 = b_4$ , c'est-à-dire si les immigrés de première génération suivent immédiatement les taux de fertilité et de mortalité locaux. En effet,  $P_1 + P_3$  remplace  $P_1$  et  $P_2 + P_4$  remplace  $P_2$ .

### 3.3 Troisième exemple

La population est divisée en nationaux, hommes ( $k = 1$ ) ou femmes ( $k = 2$ ), et étrangers, hommes ( $k = 3$ ) ou femmes ( $k = 4$ ). Supposons que

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\tau_{1,3} & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \tau_{2,4} \\ 0 & 0 & d_3 + \tau_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \tau_{2,4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que les femmes étrangères donnent naissance à des enfants étrangers, mais les étrangers peuvent changer de nationalité (ils sont transférés de la sous-population 3 ou 4 vers les sous-populations 1 ou 2). Pour simplifier, supposons que  $d_1 = d_3$  et  $d_2 = d_4$  : la mortalité des étrangers est la même que celle des nationaux. Supposons aussi que  $B_{1,2} = B_{2,2} = b_2$  et  $B_{3,4} = B_{4,4} = b_4$ . Alors

$$S(0, x) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(0, x) & 0 & S_{1,3}(0, x) & 0 \\ 0 & S_{2,2}(0, x) & 0 & S_{2,4}(0, x) \\ 0 & 0 & S_{3,3}(0, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4}(0, x) \end{pmatrix}$$



avec

$$\begin{aligned} S_{1,1}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du}, & S_{2,2}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_2(u) du}, \\ S_{3,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du}, & S_{4,4}(y, x) &= e^{-\int_y^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{1,3}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_1(u) du} + \int_y^x \tau_{1,3}(z) e^{-\int_z^x d_1(u) du - \int_y^z [d_1(u) + \tau_{1,3}(u)] du} dz, \\ S_{2,4}(y, x) &= e^{-\int_y^x d_2(u) du} + \int_y^x \tau_{2,4}(z) e^{-\int_z^x d_2(u) du - \int_y^z [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} dz. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\hat{G}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,2}(x) dx & 0 & \int_0^\infty b_2(x) S_{2,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty b_4(x) S_{4,4}(x) dx \end{pmatrix}$$

Comme  $\hat{G}(0)$  est une matrice triangulaire supérieure,

$$\rho(\hat{G}(0)) = \max \left\{ \int_0^\infty b_2(x) e^{-\int_0^x d_2(u) du} ; \int_0^\infty b_4(x) e^{-\int_0^x [d_2(u) + \tau_{2,4}(u)] du} \right\}.$$

Supposons  $\rho(\hat{G}(0)) < 1$ . Le vecteur  $R$  se calcule encore aisément. Posons

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_0^\infty b_2(x) \int_0^x S_{2,4}(y, x) M_4(y) dy dx \\ L_4 &= \int_0^\infty b_4(x) \int_0^x S_{4,4}(y, x) M_4(y) dy dx. \end{aligned}$$

Alors  $L = (L_2, L_2, L_4, L_4)$  et

$$R_1 = R_2 = \frac{L_2 + \hat{G}_{2,4}(0)L_4/(1 - \hat{G}_{4,4}(0))}{1 - \hat{G}_{2,2}(0)}, \quad R_3 = R_4 = \frac{L_4}{1 - \hat{G}_{4,4}(0)}.$$

Enfin, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{1,1}(0, x)R_1 + S_{1,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{1,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_2(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{2,2}(0, x)R_2 + S_{2,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{2,4}(u, x) M_4(u) du \\ P_3(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{3,3}(0, x)R_3 + \int_0^x S_{3,3}(u, x) M_3(u) du \\ P_4(x, t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} S_{4,4}(0, x)R_4 + \int_0^x S_{4,4}(u, x) M_4(u) du. \end{aligned}$$

Notons que ce troisième exemple se réduit au premier exemple si  $\tau_{1,3} = \tau_{1,2} = 0$ , c'est-à-dire si les sous-populations  $\{1, 2\}$  et  $\{3, 4\}$  ne se mélangent pas.

## 4 Un logiciel

Pour illustrer cette étude, on a écrit un programme qui tourne dans l'environnement Scilab, un logiciel libre de calcul numérique disponible à l'adresse [www-rocq.inria.fr/scilab](http://www-rocq.inria.fr/scilab). Le programme, nommé `census.sci`, se trouve avec les fichiers qui contiennent les données pour la France à l'adresse [www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Imm](http://www.ann.jussieu.fr/~bacaer/Prog/Imm). Il résout le système d'équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode des différences finies. Fixons  $\delta t > 0$  et  $\delta x > 0$ . La valeur de  $P_k(x, t)$  en  $x = i \delta x$  et  $t = j \delta t$  est approchée par  $P_k^{i,j}$ . On utilise des notations similaires pour  $\Delta_{k,l}$ ,  $M_k$ ,  $B_{k,l}$  et  $P_k^0$ . Alors

$$P_k^{i,0} = (P_k^0)^i, \quad \forall i \geq 0,$$
$$P_k^{0,j+1} = \sum_{l=1}^K \sum_{i=0}^{\infty} B_{k,l}^i P_l^{i,j}, \quad \forall j \geq 0,$$
$$\frac{P_k^{i,j+1} - P_k^{i,j}}{\delta t} + \frac{P_k^{i,j} - P_k^{i-1,j}}{\delta x} + \sum_{l=1}^K \Delta_{k,l}^i P_l^{i,j} = M_k^i, \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq 1.$$

Notez la différence finie progressive en temps et rétrograde en âge. Les équations sont en fait des équations d'advection, donc on doit tenir compte de la direction des caractéristiques pour avoir un schéma qui converge. La condition  $\delta t \leq \delta x$  doit aussi être respectée. Dans le programme, on a toujours pris  $\delta x$  égal à une année.

### 4.1 Utilisation

La syntaxe est la suivante :

```
census(X,K,annees,gauche,droit,pfichiers,bindices,dindices,dfichiers,mindices,mfichier
```

Définitions :

- `X,K` : entiers positifs ;
- `annees` : vecteur d'entiers positifs ou nuls ;
- `gauche,droit` :  $K$  matrices colonnes de nombres réels ;
- `pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers` : vecteurs de chaînes de caractères ;
- `bindices, dindices` : deux matrices colonnes d'entiers positifs  $\leq K$  ;
- `mindices` : vecteur d'entiers positifs  $\leq K$ .

Signification :

- `X` : âge maximum ;
- `K` : nombre de sous-populations ;
- `annees` : temps auxquels la population sera représentée ;
- `gauche, droite` : les lignes de `gauche` (resp. de `droite`) définissent les combinaisons linéaires de  $(P_1, \dots, P_K)$  à représenter à gauche (resp. à droite) de la figure ;
- `pfichiers, bfichiers, dfichiers, mfichiers` : noms de fichiers qui contiennent les données ; ces fichiers sont des vecteurs colonnes ;

- **bindices**, **dindices** : les lignes de ces matrices donnent les indices (ligne et colonne) des coefficients non nuls des matrices  $B$  et  $\Delta$ , dont la valeur est donnée dans **bfichiers** et **dfichiers**; ainsi le nombre de lignes de **bindices** (resp. **dindices**) est égal à la longueur du vecteur **bfichiers** (resp. **dfichiers**);
- **mindices** : indices des coefficients non nuls du vecteur  $M$ , dont la valeur est donnée dans **mfichiers**.

## 4.2 Premier exemple

Comme donnée initiale pour les populations masculines et féminines, on prend les résultats du recensement de 1999 en France. Les taux de fertilité et de mortalité sont calculés avec les données de la même année (Beaumel, Doisneau et Vatan, 2001) : voir la figure 1(a). Si le terme d’immigration est égal à 0, alors

```
census(99,2,[0 25 50 75 100],[1 0],[0 1],[ 'male.dat'
'female.dat',[1 2;2 2],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],
[1 1; 2 2],[ 'maledeath.dat', 'femaledeath.dat'],[],[])
```

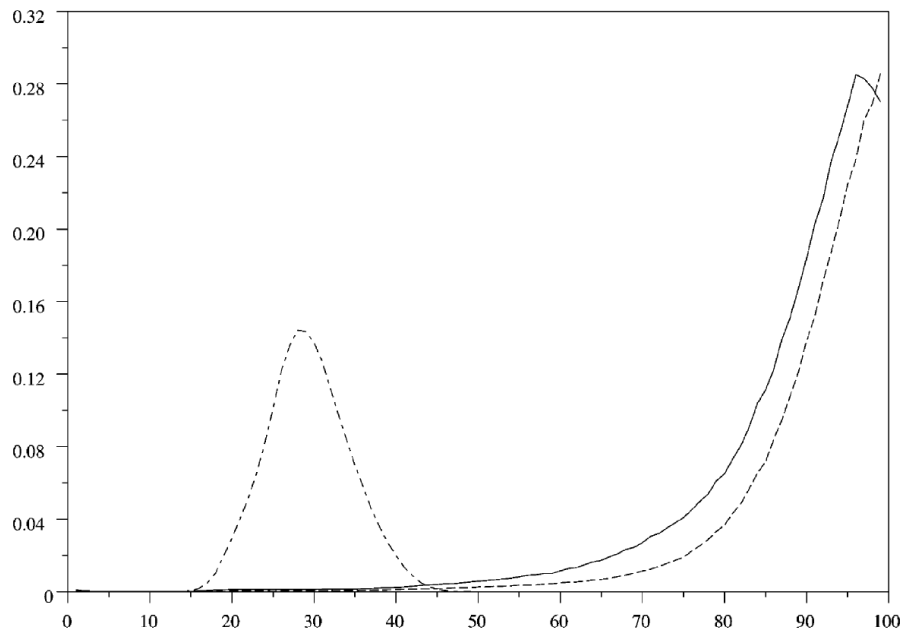
donne la figure 1(b), où la population finit par tendre vers 0, mais assez lentement.

Incluons désormais le terme d’immigration  $M(x)$ . Dinh (1994) a calculé  $M(x)$  en utilisant les résultats de deux recensements consécutifs et les données sur les naissances et les morts entre ces deux recensements. La méthode a donné des résultats raisonnables jusqu’aux années 1980. Mais entre 1990 et 1999, l’immigration totale était du même ordre que les erreurs sur les recensements, de sorte que les calculs ne donnent pas de résultat raisonnable. Une autre méthode consiste à utiliser les données annuelles de l’Office des migrations internationales (1999), qui sont résumées dans la figure 2(a). L’immigration totale est la somme des travailleurs immigrés, des immigrés qui ont obtenu une carte de séjour, et des immigrés dans le cadre du regroupement familial. On a trouvé des données par âge pour les immigrés qui ont obtenu une carte de séjour (d’où la fonction en escalier dans la figure 2(a)), mais pas pour les adultes dans le cadre du regroupement familial. Pour les calculs, seules les courbes extérieures de la figure 2(a) sont utiles. Alors l’instruction

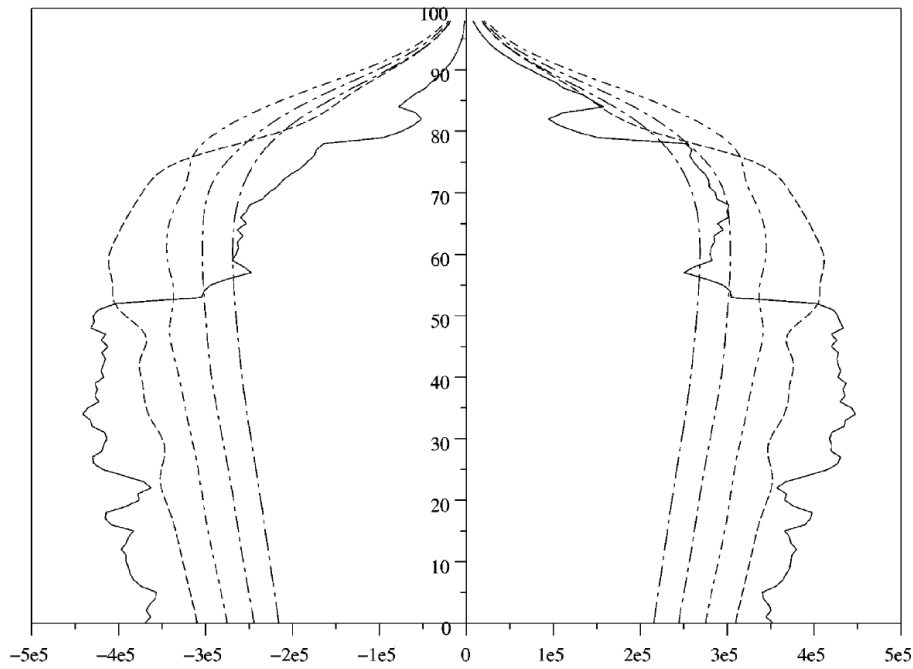
```
census(99,2,[0255075100],[10],[01],[ 'male.dat' 'female.dat'],[12;22],[ 'malebirth.dat' 'femalebirth.dat'],[ 'maledeath.dat' 'femaledeath.dat'],[],[])
```

produit la figure 2(b). La structure de la population converge lentement vers un état stationnaire avec une population totale petite (non représentée dans la figure).

Ce type de modèle (avec  $K = 2$ ) est semblable aux versions discrètes utilisées par l’INSEE (Brutel, 2001). Il est facile de critiquer ce modèle. D’un côté, on utilise des chiffres d’immigration assez faibles. D’un autre côté, on utilise les données actuelles pour calculer le taux de naissances. Actuellement, ce taux est assez élevé. C’est dû en partie au pourcentage élevé d’immigrés dans la population et au fait que les immigrés ont des taux de fertilité plus élevés que les Français. Ceci nous conduit aux deux modèles suivants.

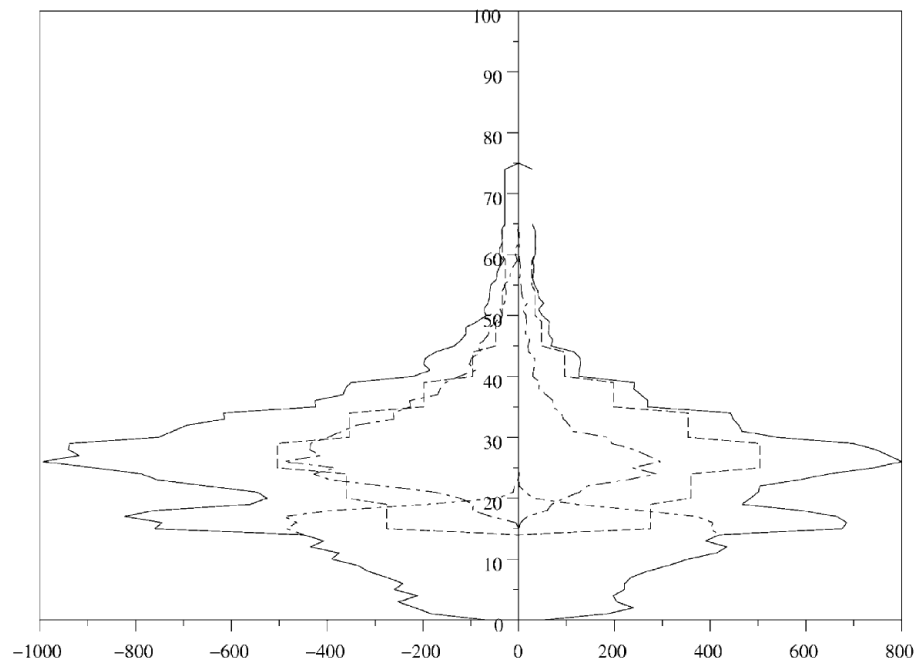


(a)

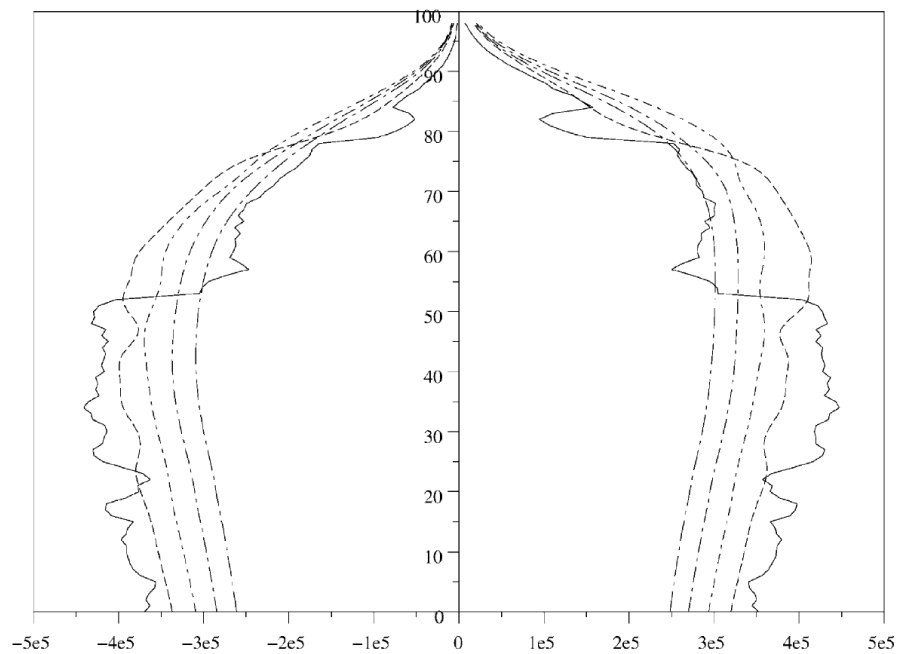


(b)

FIGURE 1 – Sans immigration. (a) Naissances totales :  $x \mapsto B_{1,2}(x) + B_{2,2}(x)$ . Mortalités :  $x \mapsto d_1(x)$  et  $x \mapsto d_2(x)$ . (b) À gauche :  $P_1(x, t)$ . À droite :  $P_2(x, t)$ . Ligne continue : situation en 1999. Lignes en pointillé : projections après 25, 50, 75 et 100 ans.



(a)



(b)

FIGURE 2 – Influence de l'immigration. (a) Immigration totale et ses 3 composantes. À gauche :  $x \mapsto M_1(x)$ . À droite :  $x \mapsto M_2(x)$ . (b) À gauche :  $P_1(x, t)$ . À droite :  $P_2(x, t)$ . Ligne continue : situation en 1999. En pointillé : projections après 25, 50, 75 et 100 ans.

### 4.3 Deuxième exemple

Comme donnée initiale pour les populations masculines et féminines nées en France ou immigrées, on prend les résultats du recensement de 1999 (INSEE, 2001). On utilise le même profil d'immigration que dans le premier exemple. Pour estimer les taux de fertilité, on suppose qu'il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_{1,4}(x) = (1+\varepsilon)B_{1,2}(x)$  et  $B_{2,4}(x) = (1+\varepsilon)B_{2,2}(x)$  pour tout  $x$ . Connaissant le nombre total d'enfants nés de mère étrangère (qui forment plus ou moins un sous-ensemble des femmes immigrées) et aussi le nombre de femmes étrangères, on obtient  $\varepsilon = 0,6$ . Alors

`census(99,4,[0255075100],[0010],[0001],[ 'malenative.dat' 'femalenative.dat' 'maleimmigra`  
produit la figure 3 pour la pyramides des âges des immigrés. La pyramide converge rapidement (après 100 ans) vers un état stationnaire.

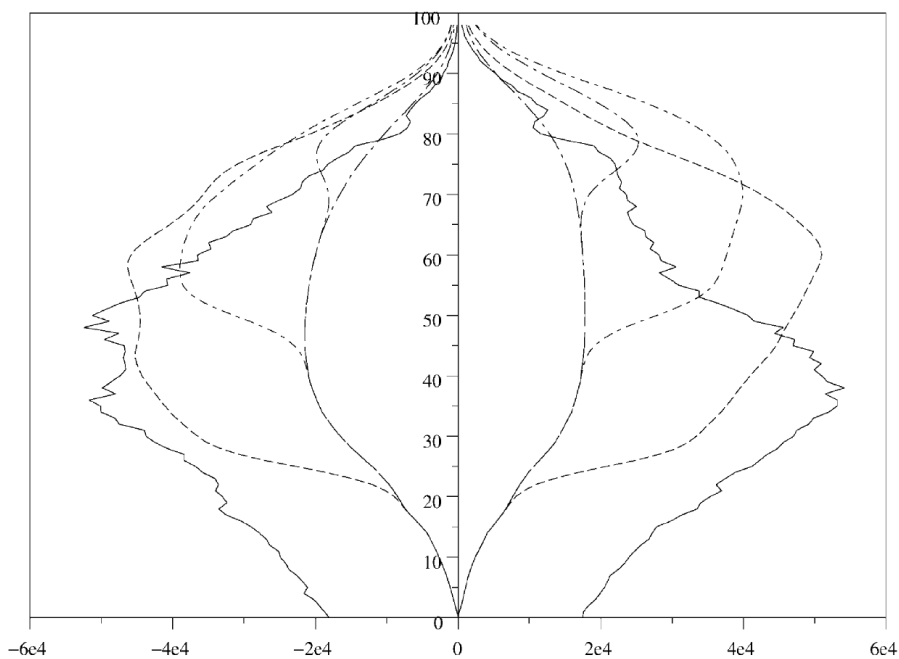


FIGURE 3 – Personnes nées en France et immigrés avec des taux de fertilité différents. À gauche :  $P_3(x, t)$  (hommes immigrés). À droite :  $P_4(x, t)$  (femmes immigrées).

### 4.4 Troisième exemple

Comme donnée initiale pour la population masculine et féminine de nationalité française et celle étrangère, on prend les résultats du recensement de 1999 (INSEE, 2001). On utilise le même profil d'immigration que dans le premier

exemple. Pour estimer les taux de fertilité, on suppose encore qu'il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_{3,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{1,2}(x)$  et  $B_{4,4}(x) = (1 + \varepsilon)B_{2,2}(x)$  pour tout  $x$ . Connaissant le nombre total d'enfants nés de mère étrangère, on obtient  $\varepsilon = 0,56$ . Pour les taux de changement de nationalité, on suppose que  $\tau_{1,3}(x) = \tau_{2,4}(x) = \tau(x)$ . Avec les données du Ministère de la justice (2001), on a pu trouver une estimation de  $\tau(x)$ , voir figure 4(a). Cette estimation fait la somme des contributions de trois types de procédure, également représentées dans la figure 4(a) : « sans formalité ou par anticipation » (enfants étrangers nés en France qui deviennent citoyens à 18 ans), « par décret » (étrangers ayant vécu longtemps en France et leurs enfants) et « par déclaration » (mariage avec un citoyen français). Dans tous les cas où la structure par âge n'est donnée que par groupe d'âges, on a utilisé des fonctions en escalier comme approximation. Alors l'instruction

```
census(99, 4, [0255075100], [0010], [0001], ['malefrench.dat', 'femalefrench.dat', 'maleforeign'])
```

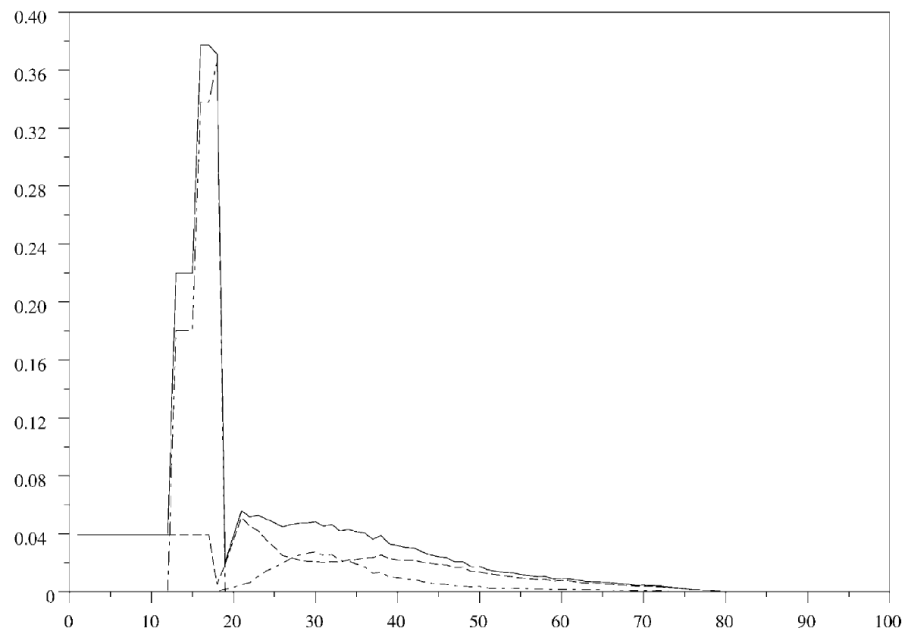
produit la figure 4(b) pour la pyramides des âges des étrangers. La pyramide converge après 100 ans vers un état stationnaire.

## 4.5 Comparaison

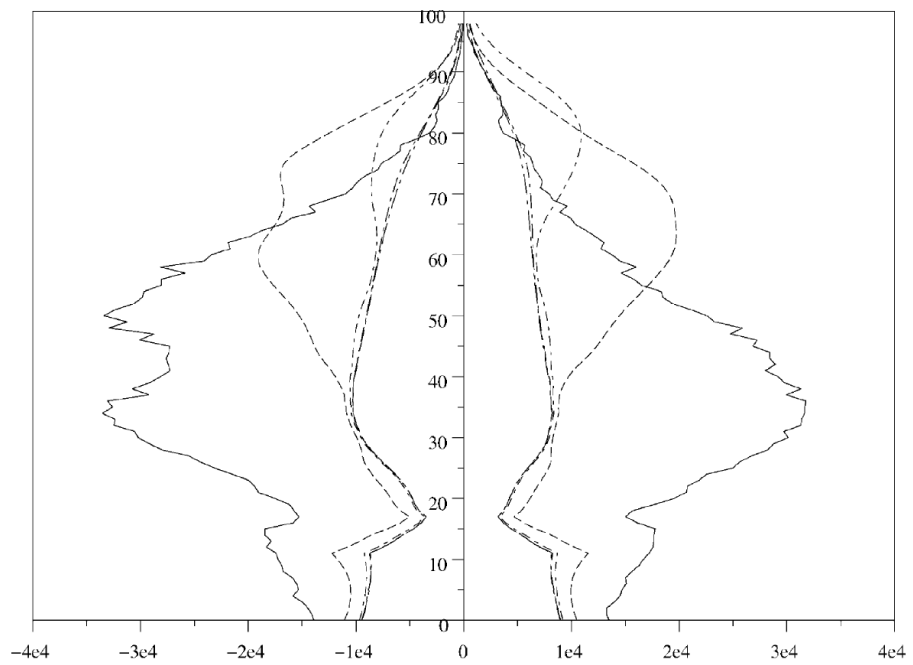
Pour comparer les différents modèles, la figure 5 montre les projections pour la population totale. La courbe la plus basse est celle sans immigration. La courbe la plus haute est celle avec immigration mais sans différence de fertilité (premier exemple). Les deux courbes très proches intermédiaires correspondent au deuxième et au troisième exemple, où les personnes nées en France (resp. les citoyens français) sont distinguées des immigrés (resp. des étrangers). La différence pour la population totale entre ces deux derniers modèles et le premier exemple avec immigration est d'environ 0,7 million après 50 ans et d'environ 2,5 millions après 100 ans.

## 5 Lien avec un modèle plus complexe

Arino et Smith (1998) ont étudié un modèle plus complexe avec une variable de plus, qui se généralise de la manière suivante. Chacune des  $K$  sous-populations est divisée en deux : il y a les individus qui sont dans cette sous-population depuis leur naissance (notons  $Q_k(x, t)$  leur densité) et des individus qui ont été dans une autre sous-population avant (notons  $R_k(x, y, t)$  la densité de ces individus d'âge  $x$  au temps  $t$  qui sont dans la sous-population  $k$  depuis  $y$  années ( $y < x$ ). Les nouveaux-nés appartiennent au premier type, tandis que



(a)



(b)

FIGURE 4 – Français et étrangers avec des fertilités différentes. (a) Obtention de la nationalité française. Taux de transfert  $\tau(x)$  et ses 3 composantes. (b) À gauche :  $P_3(x, t)$  (hommes étrangers). À droite :  $P_4(x, t)$  (femmes étrangères).



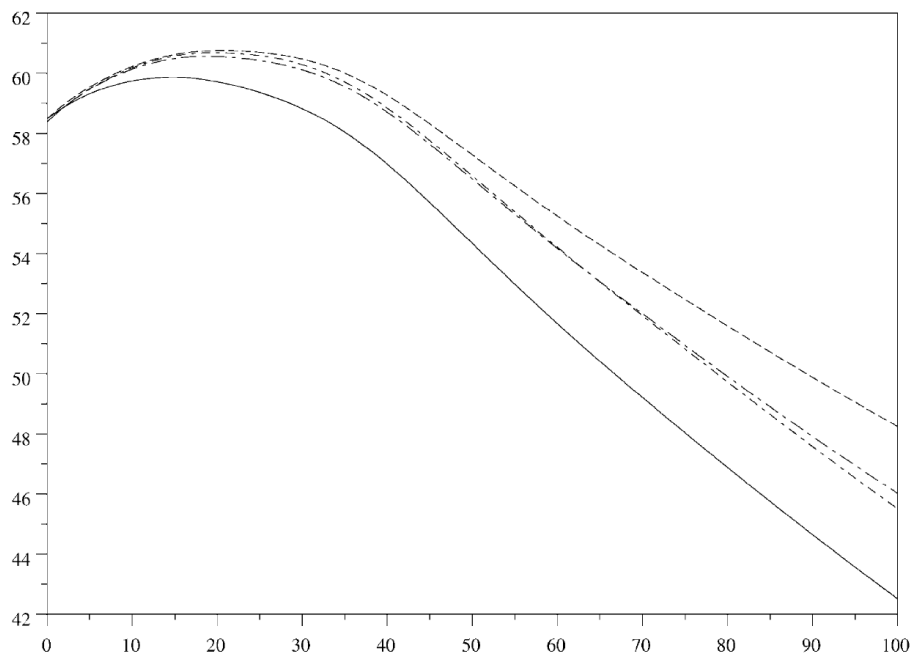


FIGURE 5 – Projections pour la population totale (en millions) sous différentes hypothèses.

les individus transférés et les immigrés sont du second type. D'où le modèle

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta^Q(x)Q(x, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \Delta^R(x, y)R(x, y, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > y > 0,$$

$$Q(0, t) = \int_0^\infty B^Q(x)Q(x, t) dx + \int_0^\infty \int_0^x B^R(x, y)R(x, y, t) dy dx, \quad \forall t > 0,$$

$$R(x, 0, t) = \tau^Q(x)Q(x, t) + \int_0^x \tau^R(x, y)R(x, y, t) dy + m(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0,$$

$$Q(x, 0) = Q^0(x), \quad \forall x > 0,$$

$$R(x, y, 0) = R^0(x, y), \quad \forall x > y > 0.$$

Les matrices  $\Delta^Q$  et  $\Delta^R$  sont diagonales et pour tout  $1 \leq k \leq K$ ,

$$\Delta_{k,k}^Q(x) = d_k^Q(x) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^Q(x),$$

$$\Delta_{k,k}^R(x, y) = d_k^R(x, y) + \sum_{l \neq k} \tau_{l,k}^R(x, y).$$

Ce modèle, appliqué au troisième exemple des sections 3 et 4, donne un système de huit équations aux dérivées partielles et conditions aux bords qui régissent les Français de naissance, les Français par acquisition, les étrangers nés en France et les étrangers nés à l'étranger. Les matrices de naissance et de transfert  $B^Q$ ,  $B^R$ ,  $\tau^Q$  et  $\tau^R$  ont la même forme que dans la section 3 : par exemple,  $\tau_{1,3}^R$  et  $\tau_{2,4}^R$  sont les seuls coefficients non nuls de  $\tau^R$ . Le modèle peut représenter les taux de transfert avec précision. Presque tous les étrangers nés en France deviennent citoyens français à 18 ans, donc  $\tau_{1,3}^Q(x)$  et  $\tau_{2,4}^Q(x)$  ont un pic vers  $x = 18$  ans. Les étrangers nés à l'étranger ne peuvent pas en général devenir Français s'ils ont moins de 18 ans ou s'ils ont vécu en France moins de cinq ans (d'après la loi), donc  $\tau_{1,3}^R(x, y)$  et  $\tau_{2,4}^R(x, y)$  sont proches de zéro si  $x < 18$  ou  $y < 5$ .

Bien que le modèle suive correctement les processus d'évolution, il est difficile à mettre en œuvre car les données telles que  $R_k^0(x, y)$  pour  $1 \leq k \leq 4$  ne sont pas connues. Plus exactement, ces données seraient peut-être accessibles à travers le méga-fichier du recensement de 1999, mais elles n'ont pas été publiées.

Une manière de contourner ce problème est de supposer que  $\Delta^R$ ,  $B^R$  et  $\tau^R$  ne dépendent pas de  $y$ . Mais cela réduit plus ou moins le modèle complexe à celui de la section 3.3. En effet, posons

$$S(x, t) = \int_0^x R(x, y, t) dy \quad \text{et} \quad P(x, t) = \begin{pmatrix} Q(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix}.$$

Alors  $P(x, t)$  est l'unique solution du système (1)-(2)-(3) avec

$$\Delta = \left( \begin{array}{c|c} \Delta^Q & 0 \\ \hline -\tau^Q & \Delta^R - \tau^R \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B^Q & B^R \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Pour ce dernier modèle, les données sont disponibles pour faire les calculs. Le résultat ne serait pas très différent de celui de la figure 4.

## 6 Conclusion

Le modèle linéaire (1)-(2)-(3) pourrait être utile pour d'autres problèmes, par exemple pour les populations de poissons. Les sous-populations peuvent ne pas résider au même endroit. On peut imaginer des sous-populations en différents sites, avec des transferts (migrations) comme dans Arino et Smith (1998). Les fonctions  $d_k(x)$  incluent la pêche. Les termes sources  $M_k(x)$  pourraient représenter la réintroduction des poissons d'une espèce menacée, comme le saumon en France.

On peut aussi élaborer des versions non linéaires ou non homogènes en temps du modèle, comme chez Hoppensteadt (1975), Webb (1985) ou Cushing (1998).

## Références

- [1] Alvarado J., Creedy J. (1998) *Population Aging, Migration and Social Expenditure*. Cheltenham, Edward Elgar.
- [2] Arino O., Smith W.V. (1998) *Migration in age structured population dynamics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8(5) 905-925
- [3] Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. (2001) *On the controllability of the Lotka-McKendrick model of population dynamics. Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 142-165.
- [4] Beaumel C., Doisneau L., Vatan M. (2001) La situation démographique en 1999 - mouvement de la population. Paris : Institut National de la Statistique et des Études Économiques.
- [5] Bellman R.E., Cooke K.L. (1963) *Differential-difference Equations*. New York : Academic Press.
- [6] Berman A., Plemmons R.J. (1994) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] Brutel C. (2001) Projections de population à l'horizon 2050, un vieillissement inéluctable. Insee Première, 762.
- [8] Crump K.S. (1970) *On systems of renewal equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications* 30, 425-434.
- [9] Crump K.S. (1970) *On systems of renewal equations : the reducible case. Journal of Mathematical Analysis and Applications* 31, 517-528.
- [10] Cushing J.M. (1998) *An Introduction to Structured Population Dynamics*. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [11] Dinh Q.C. (1994) La population de la France à l'horizon 2050. *Économie et Statistique* 274, 7-32.
- [12] Hoppensteadt F. (1975) *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics and Epidemics*. Philadelphie : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [13] Horn R.A., Johnson C.R. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press.

- [14] INSEE (2001) Recensement de la population de 1999 : population immigrée, population étrangère. Tableaux thématiques – exploitation complémentaire. Paris : INSEE.
- [15] Lotka A.J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris : Hermann.
- [16] Ministère de la justice (2001) Les acquisitions de la nationalité française en 1999. Études et Statistiques Justice, 17.
- [17] OMISTATS (1999) Annuaire des migrations 1999. Paris : Office des migrations internationales.
- [18] Webb G.F. (1985) *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*. New York : Marcel Dekker.