



**HAL**  
open science

# Manipulation des expressions algébriques en environnement informatisé

Stéphanie Jean

► **To cite this version:**

Stéphanie Jean. Manipulation des expressions algébriques en environnement informatisé. Journées Environnements informatiques de calcul symbolique et apprentissage des mathématiques, 2000, Rennes, France. hal-01575486

**HAL Id: hal-01575486**

**<https://hal.science/hal-01575486v1>**

Submitted on 20 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MANIPULATION DES EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES EN ENVIRONNEMENT INFORMATISÉ

Stéphanie JEAN

IC<sup>2</sup> - LIUM

72085 LE MANS Cedex 9

Stephanie.Jean@univ-lemans.fr

## INTRODUCTION

La manipulation des expressions algébriques est un point particulièrement important dans les logiciels d'algèbre destinés aux élèves. Dans cet article nous mettons en évidence les problèmes liés à l'écriture des expressions algébriques sur support informatisé. Nous distinguons trois types d'écritures pour les expressions algébriques : l'écriture linéaire parenthésée, l'écriture sous forme linéaire parenthésée donnant lieu à un affichage sous forme spatiale et l'écriture directement sous forme spatiale. La première méthode est la plus facile à mettre en œuvre techniquement et la dernière est plus proche du fonctionnement habituel des élèves, mais elle est plus délicate à mettre en œuvre. Nous présentons ici successivement ces trois méthodes, en précisant les conséquences qu'elles ont sur le travail de l'élève.

Dans les méthodes citées, l'écriture d'expressions algébriques demande une adaptation de l'élève au support. Cette genèse instrumentale [RABARDEL, 1995], incontournable dans le cas de l'utilisation d'un nouveau médium, est restreinte dans le cas d'un système à utilisation unique. La perte des gestes familiers de tracé modifie le travail de l'élève, en ajoutant à la tâche mathématique, une tâche de transposition [ARTIGUE, 1995]. Dans le cas de l'écriture linéaire, l'élève doit, en plus de sa tâche mathématique, effectuer une linéarisation et un parenthésage des expressions qu'il doit écrire.

Dans cet article, nous étudions plus particulièrement l'équivalence entre l'écriture d'expressions algébriques dans un environnement papier – crayon et la production de telles expressions avec PÉPITEST, qui est le module élève d'un système d'assistance au diagnostic de compétences en algèbre élémentaire [JEAN, 2000]. Pour cela, nous nous référons à la distinction entre *valence sémiotique* et *valence instrumentale* introduite par CHEVALLARD concernant les *instruments sémiotiques* [CHEVALLARD, 1996]. Rappelons brièvement que le terme d'instruments sémiotiques désigne les objets manipulés en mathématiques. La valence instrumentale d'un instrument sémiotique est *ce qui permet de faire*, sa valence sémiotique est *ce qui permet de voir ce qui a été fait*.

## ÉCRITURE LINÉAIRE PARENTHÉSÉE

Pour l'écriture des expressions algébriques, la version actuelle de PÉPITEST utilise une écriture linéaire parenthésée. Les différents symboles non présents sur le clavier sont représentés sur les boutons d'une barre d'outils (cf. Figure 1). À chaque bouton est associé le code spécifique (par exemple Rac[ ] pour racine carrée), qui est affiché dans la zone de texte si le bouton est activé.



Figure 1 : La palette de PÉPITEST permettant l'écriture d'expressions algébriques.

La Figure 2 donne pour chaque symbole, la correspondance entre l'écriture habituelle en environnement papier – crayon et l'écriture linéaire parenthésée dans PÉPITEST ainsi que les boutons correspondants sur la barre d'outils.








	Écriture usuelle dans l'environnement papier - crayon	Bouton de la barre d'outils de PÉPITEST	Écriture linéaire parenthésée affichée par PÉPITEST
FRACTION	$\frac{1}{2}$		[1]/[2]
RACINE CARRÉE	$\sqrt{2}$		Rac[2]
EXPOSANT	$x^2$		x^[2]
DIFFÉRENT	$\neq$		<>
ENVIRON	$\approx$		~
ACCOLADE	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$		{ → impossible

Figure 2 : Correspondance entre les symboles et leur représentation dans PÉPITEST.

#### VALENCE SÉMIOTIQUE

Pour la représentation linéaire parenthésée, la valence sémiotique n'est pas équivalente à celle des représentations sémiotiques utilisées habituellement par les élèves. Cette différence est perceptible en comparant les colonnes « écriture usuelle » et « écriture linéaire parenthésée » de la Figure 2. Prenons simplement l'exemple de la racine carrée : Rac[2] n'est visuellement pas équivalent à  $\sqrt{2}$ .

#### VALENCE INSTRUMENTALE

La valence instrumentale de l'écriture linéaire parenthésée n'est pas conforme à la valence instrumentale de l'environnement familier. En effet, cliquer sur un bouton , puis taper sur les touches d'un clavier et manipuler une souris n'est pas équivalent à l'action de tracer une racine carrée, il y a modification profonde du geste. CHEVALLARD souligne l'importance du geste en mathématiques : « les discours que l'on prononce, les signes que l'on écrit et les gestes que l'on fait sont aussi des outils de travail » [CHEVALLARD, 1991].

#### ÉCRITURE SOUS FORME LINÉAIRE PARENTHÉSÉE AVEC AFFICHAGE SOUS FORME SPATIALE

En ce qui concerne les expressions mathématiques, différents auteurs dont [ARTIGUE, 1995] ont déjà relevé que le passage, par exemple pour les fractions ou les racines carrées, d'une écriture spatiale (l'écriture papier – crayon que nous avons qualifiée d'écriture usuelle) à une écriture linéaire, perturbe les élèves. Pour limiter cette perturbation, certains concepteurs proposent une visualisation spatiale de l'écriture produite linéairement par l'élève.

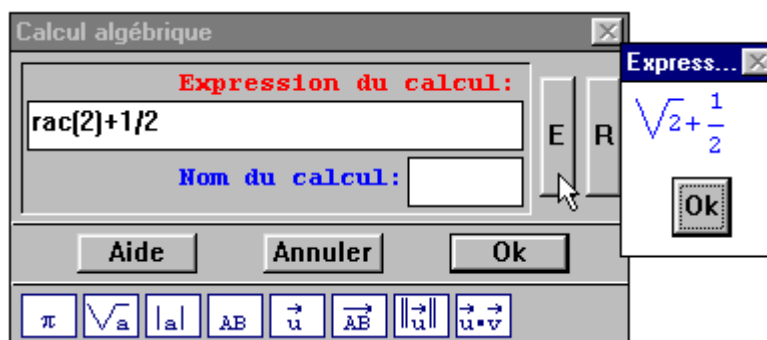


Figure 3 : Écriture d'une expression algébrique avec GEOPLANW.

C'est par exemple le cas de GEOPLANW, présentés dans la Figure 3. L'écriture de l'expression doit cependant se faire linéairement, la deuxième représentation sert en fait de vérification.

#### VALENCE SÉMIOTIQUE

Dans ce dispositif, l'élève dispose de deux représentations dont l'une, la représentation sous forme spatiale, de valence sémiotique équivalente à celle de l'environnement habituel. Le problème de la valence sémiotique n'est donc que partiellement résolu.

Notons toutefois que la conversion que doit faire l'élève pour passer d'une écriture spatiale à une écriture linéaire peut être, d'après les auteurs, source d'apprentissage dans ces logiciels [HOCQUENGHEM, 1996].

#### VALENCE INSTRUMENTALE

Dans ce cas, la valence instrumentale reste entièrement différente de la valence instrumentale de l'environnement papier – crayon.

### ÉCRITURE SOUS FORME SPATIALE

Demander aux élèves de produire les expressions algébriques sous forme linéaire parenthésée pose problème du point de vue de nos objectifs de diagnostic dans PÉPI TEST. En effet, une évaluation des compétences en algèbre, pour être significative, doit permettre une manipulation d'expressions algébriques compatible avec la manipulation faite dans l'environnement papier - crayon. Le dispositif de saisie linéaire des expressions a été mis en place pour permettre d'expérimenter rapidement PÉPI TEST sans attendre qu'un éditeur spécifique soit réalisé. Parallèlement, nous avons choisi de développer un éditeur d'expressions algébriques spécifique, permettant la saisie de telles expressions, directement de façon spatiale, souhaitant ainsi éviter à l'élève le travail de linéarisation.

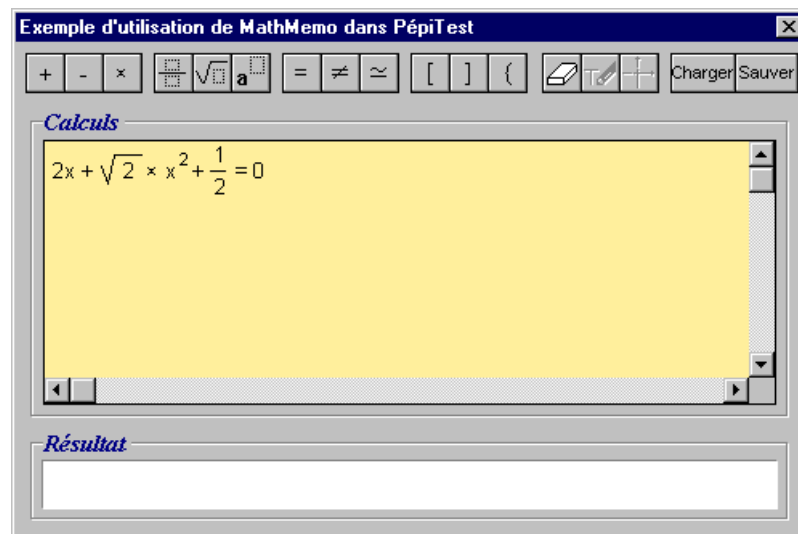


Figure 4 : L'éditeur d'expressions algébriques de PÉPI TEST.

Cet éditeur spécifique (cf. Figure 4), permet une représentation et une manipulation des expressions algébriques plus conforme aux habitudes des élèves.

La Figure 5 indique pour chaque symbole, la correspondance entre l'écriture habituelle en environnement papier – crayon et l'écriture proposée par l'éditeur d'expressions algébriques de PÉPI TEST. Cette figure met également ces éléments en relation avec les boutons correspondants de la barre d'outils.







	Écriture usuelle	Bouton de la barre d'outils	Écriture avec l'éditeur spécifique
FRACTION	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
RACINE CARRÉE	$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$
EXPOSANT	$2e^2$		$x^2$
DIFFÉRENT	$\neq$		$\neq$
ENVIRON	$\approx$		$\approx$
ACCOLADE	$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$		$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Figure 5 : Correspondance entre les symboles et leur représentation dans l'éditeur spécifique.

#### LA VALENCE SÉMIOTIQUE

En utilisant dans PÉPITEST un éditeur d'expressions algébriques proposant dès la phase d'écriture une représentation des expressions conforme aux représentations utilisées habituellement par les élèves, nous nous attachons à ce que la valence sémiotique de la représentation « virtuelle » soit équivalente à la valence sémiotique de la représentation papier - crayon. En reprenant l'exemple de la racine carrée, nous pouvons voir que la représentation proposée par l'éditeur,  $\sqrt{2}$  est équivalente à la représentation habituelle en environnement papier – crayon  $\sqrt{2}$ . Cette équivalence, valable pour tous les symboles mathématiques concernés par PÉPITEST, peut être constatée en comparant les colonnes « écriture usuelle » et « écriture avec l'éditeur spécifique » de la Figure 5.

#### LA VALENCE INSTRUMENTALE

##### *Pour des valences instrumentales équivalentes*

Pour que la valence instrumentale de l'écriture des expressions algébriques avec PÉPITEST soit équivalente à celle de l'environnement familier des élèves, il faudrait proposer une nouvelle forme de manipulation des objets mathématiques avec une instrumentation autre que celle, classique, passant par l'utilisation du clavier et de la souris. Les dispositifs de réalité augmentée qui permettent de conserver en partie l'environnement familier [MACKAY, 1996], peuvent être une alternative à ces problèmes. Cependant, la lourdeur des dispositifs à mettre en œuvre laisse à penser qu'une utilisation en classe n'est à l'heure actuelle pas envisageable. L'utilisation de tablettes graphiques pourrait toutefois être envisagée, mais les recherches en reconnaissance de forme peinent justement sur la reconnaissance des expressions algébriques, en particulier en ce qui concerne la représentation spatiale [FAURE, 1996]. Il est en effet difficile, pour les systèmes existants, d'identifier par exemple si  $22$  signifie 22 ou  $2^2$ . De plus, les produits actuels nécessitent généralement une période d'apprentissage du fonctionnement du système de la part de l'utilisateur, voire d'un apprentissage des spécificités de l'utilisateur de la part de la machine, ce qui est impossible dans le cadre d'une évaluation ponctuelle des connaissances comme c'est le cas pour PÉPITEST.

##### *Pour des valences instrumentales compatibles*

L'équivalence des valences instrumentales étant selon nous actuellement irréalisable, nous nous sommes attachés à ce que la valence instrumentale de l'éditeur spécifique de PÉPITEST soit au moins cohérente avec la valence instrumentale des représentations sémiotiques habituelles, c'est-à-dire que la manière d'écrire une expression avec PÉPITEST « ressemble » par ses différentes étapes, à la manière d'écrire une expression dans un environnement papier – crayon. Les schémas ci-dessous (Figure 6 et

Figure 7) représentent les différentes étapes de l'écriture d'une racine carrée et d'une fraction dans un environnement papier - crayon puis avec PÉPITEST.

- Écrire une racine carrée dans un environnement papier - crayon

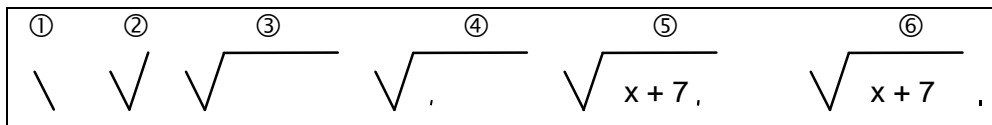


Figure 6 : Étapes de la formation d'une racine carrée en environnement papier - crayon.

Pour écrire une racine carrée dans un environnement papier – crayon (cf. Figure 6), le scripteur commence par dessiner le radical (①②③) en donnant à la barre horizontale la longueur supposée du radicande (ce qui demande une estimation préalable de cette longueur). Une fois ce dessin terminé, le scripteur pose son crayon à gauche sous la barre horizontale du radical (④) puis commence à écrire le radicande (⑤). Lorsque celui-ci est terminé, le scripteur lève son crayon puis le repose en bas à droite de la fin de la barre horizontale du radical (⑥), s'il souhaite compléter l'expression.

- Produire une racine carrée avec l'éditeur spécifique de PÉPITEST

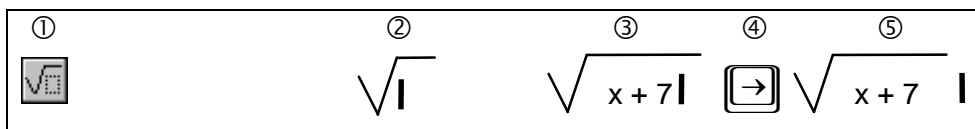


Figure 7 : Étapes de la formation d'une racine carrée avec l'éditeur spécifique de PÉPITEST.

Pour produire une racine carrée avec l'éditeur spécifique de PÉPITEST (cf. Figure 7), l'utilisateur, après avoir sélectionné d'un clic l'endroit où il souhaite insérer la racine carrée, clique sur le bouton « racine carrée » (①), ce qui a pour conséquence de tracer le radical à l'endroit indiqué et de positionner le curseur à gauche sous la barre horizontale (②). L'utilisateur tape ensuite l'expression (③) (la longueur de la barre du radical s'adapte automatiquement à la longueur du radicande, l'utilisateur n'a donc plus besoin d'évaluer préalablement cette longueur). Lorsque le radicande est terminé, l'utilisateur appuie sur la touche « flèche vers la droite » (④), ce qui positionne le curseur en bas à droite de la fin de la barre horizontale du radical (⑤).

- Compatibilité

La mise en relation de ces deux façons de produire une racine carrée permet de mettre en évidence les points suivants :

- Avec l'éditeur spécifique de PÉPITEST, l'utilisateur ne trace plus le radical. Ce tracé est remplacé par un clic sur un bouton, il y a donc modification profonde du geste.
- Avec l'éditeur spécifique, l'utilisateur n'a plus non plus besoin d'estimer la longueur de la barre supérieure du radical. Il y a donc là aussi perte d'un geste spécifique.
- Les étapes de la construction de la racine carrée sont cependant respectées. En particulier, le levé de crayon permettant de sortir du radicande a un équivalent virtuel : l'appui sur la touche « flèche vers la droite ».

Pour la racine carrée, nous pouvons dire que, même si le geste est remplacé par l'utilisation du clavier et de la souris avec l'éditeur spécifique de PÉPITEST, les étapes de construction étant respectées, la valence instrumentale de l'éditeur spécifique de PÉPITEST est cohérente et donc compatible avec la valence instrumentale de l'environnement papier – crayon.

## CONCLUSION

PÉPITEST doit permettre une manipulation d'expressions algébriques la plus proche possible de la manipulation faite dans un environnement papier – crayon. Toutefois il est à l'heure actuelle difficile d'envisager une manipulation totalement équivalente. Il n'est pas non plus envisageable de limiter la manipulation des expressions algébriques à celle d'expressions linéarisées, comme c'est le cas dans la

version actuelle de PÉPITEST. Les expérimentations ont montré qu'une telle représentation perturbe les élèves, même si elle ne les empêche pas de produire des expressions. Pour ces raisons, nous avons décidé d'intégrer à PÉPITEST un éditeur d'expressions algébriques spécifique permettant, non pas une manipulation des expressions totalement équivalente à celle que les élèves font dans un environnement papier – crayon, mais compatible avec cette manipulation.

L'étude de concepts empruntés à différents domaines de recherche : correspondance sémantique directe, transposition informatique, pseudo-transparence, double référence, représentations sémiotique, instruments sémiotiques et genèse instrumentale, et leur mise en relation, nous ont permis de spécifier un éditeur d'expressions algébriques adapté à PÉPITEST, mais utilisable dans tout logiciel nécessitant la manipulation de ces expressions. Un tel éditeur doit d'une part, proposer une valence sémiotique totalement équivalente à la valence sémiotique de l'environnement habituel, et, d'autre part, proposer une valence instrumentale compatible avec la valence instrumentale de l'environnement habituel, à défaut d'en être équivalente. Cette compatibilité peut être assurée en respectant, dans le logiciel, les étapes de la formation des expressions dans l'environnement habituel. Ceci peut être résumé en trois règles :

- ① Le dessin de l'expression à l'écran doit être équivalent au dessin de l'expression dans l'environnement habituel.
- ② Le tracé de l'expression doit si possible se faire de la même manière avec le logiciel et dans l'environnement habituel.
- ③ Si la règle 2 ne peut pas être respectée, le tracé de l'expression avec le logiciel doit suivre les mêmes étapes que la formation de l'expression dans l'environnement habituel.

## RÉFÉRENCES

### [ARTIGUE, 1995]

Michèle ARTIGUE, *Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement*, in D. GUIN, J.-F. NICAUD et D. PY, EIAO, Tome 2, pp. 17-28, Eyrolles, Paris, 1995.

### [CHEVALLARD, 1991]

Yves CHEVALLARD, *Dimension instrumentale, dimension sémiotique du travail mathématique*, Texte du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, n°122, Grenoble, 1991.

### [CHEVALLARD, 1996]

Yves CHEVALLARD, *Les outils sémiotiques du travail mathématique*, Petit x, n°42, pp33-57, 1995-1996.

### [FAURE, 1996]

Claudie FAURE, *Et l'ordinateur à stylo ? Peut mieux faire !*, La Recherche, n°285, mars 1996.

### [HOCQUENGHEM, 1996]

Serge HOCQUENGHEM, *Évolution de La notion de figure géométrique depuis les imagiciels jusqu'à GeoplanW*, Université d'été sur l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement, IREM de Rennes, août 1996.

### [JEAN, 2000]

Stéphanie JEAN, *PÉPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétences*, Thèse de doctorat de l'Université du Maine, 21 janvier 2000.

### [MACKAY, 1996]

Wendy MACKAY, *Réalité augmentée : le meilleur des deux mondes*, La Recherche, n°285, pp. 32-37, mars 1997.

### [RABARDEL, 1995]

Pierre RABARDEL, *Les hommes et les technologies - approche cognitive des instruments contemporains*, Série psychologie, Armand Colin, 1995.