数值方法的收敛性以及对最小加特征值问题参数的依赖：Frenkel-Kontorova模型和Hamilton-Jacobi方程的均质化

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

摘要

我们使用谱半径公式的最小加形式来证明最小加特征值问题的唯一特征值连续取决于参数。我们还证明了Chou和Griffiths引入的计算该特征值的数值方法是收敛的。INRIA最近开发的工具箱说明了这些结果。我们以Frenkel-Kontorova模型为例。我们还坚持用汉密尔顿-雅各比方程的均质化进行类比。

关键词：最小加特征值问题 数值分析; Frenkel-Kontorova模型；汉密尔顿-雅各比方程

介绍

可以使用半环来表达一些优化问题

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

使它们看起来像特征值经典问题的类似物。例如，

$$\min_{1 \le j \le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \le j \le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

看起来一样，以及

$$\min_{a \le y \le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

这些类比已经被用来发展这个半环上的矩阵[5]和积分算子[14]的谱理论。[6]使用数值方法解决最小加特征值的“积分问题”，从而绘制了Frenkel-Kontorova模型的相图。这里的主要目的是证明这种方法的收敛性。

受[12]启发，第1节回顾了如何通过引入一些通用定义来使类比形式化。第2节回顾了频谱理论的主要定理 $\mathbb{R}_{\min}$。第3部分表明，特征值λ连续取决于函数K中涉及的参数。第4节证明了特征值问题的数值逼近的收敛性 $\mathbb{R}_{\min}$。第3节和第4节的证明很容易从第2节中介绍的一种光谱半径公式中得出。第5节讨论周期函数的情况。第6节在两种情况下说明了先前的结果：固态物理学中的Frenkel-Kontorova模型和Hamilton-Jacobi方程的均质化。

注意，与最小加特征值问题等效的汉密尔顿-雅各比方程的参数特征值问题也出现在固体推进剂行波研究中[3,15] 。此应用程序是我们研究的最初动机。但是，由于技术细节更加复杂，我们将在其他地方进行解释。

还要注意，其他线性最小加法问题的数值分析并不总是像这里提出的特征值问题那样简单（有关讨论，请参见[4]）。

1.广义线性代数

定义。 $\mathcal{R}$ 是带有内部成分定律的集合 $+$。 $(\mathcal{R}, +)$ 如果+具有关联性且具有中性元素，则为半群。 $(\mathcal{R}, +)$ 如果+也是可交换的，是交换半群。

定义。 $\mathcal{R}$ 是具有两个内部组成定律+和×的集合。 $(\mathcal{R}, +, \times)$ 是半环，如果

- $(\mathcal{R}, +)$ 是中性元素为0的交换半群，

- $(\mathcal{R},\times)$ 是中性元素为1的半群
- $\times$是+的分布，
- $\forall\lambda\in\mathcal{R}$， $0\times\lambda=\lambda\times 0=0$。

例子。

- $(\mathbb{R},+,\times)$ 和 $(\mathbb{R}_+,+,\times)$ 是半环。
- 用 $\mathbb{R}_{\min}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$， $(\mathbb{R}_{\min},\min,+)$ 是带有中性元素的半环 $+\infty$ 和0。

定义。 $(\mathcal{R},+,\times)$ 是半环， $(X,+)$ 可交换半群。我们认为 $\forall\lambda\in\mathcal{R}$, $\forall x\in X$， $\lambda\cdot x\in X$。我们说 $(X,+,\cdot)$ 是一个半模块 $(\mathcal{R},+,\times)$ 如果 $\forall\lambda,\mu\in\mathcal{R}$， $\forall x,y\in X$，

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x\,,\\&(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x),\\&\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y,\\&1\cdot x=x.\end{aligned}$$

我们说Y为子半模块X如果 Y是一个半模块 $Y\subset X$。

实**例**。令X为集合， $(\mathcal{R},+,\times)$ 半环。

$$\forall f,g\in\mathcal{R}^X,\quad\forall x\in X,\quad(f+g)(x):=f(x)+g(x),\quad(\lambda\cdot f)(x):=\lambda\times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X,+,\cdot)$ 然后是一个半模块 $\mathcal{R}$。

实**例**。令X为集合， $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ 所有功能 $X\to\mathbb{R}_{\min}$ 范围如下。 $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ 是的半子模块 $(\mathbb{R}_{\min}^X,\min,+)$。

定义。 $(\mathcal{R},+,\times)$ 是一个半环。 $(X,+,\cdot)$ 和 $(Y,+,\cdot)$ 是两个半模块， $L:X\to Y$。我们说L是线性算子 $\forall\lambda,\mu\in\mathcal{R}$， $\forall x,y\in X$， $L(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)=\lambda\cdot L(x)+\mu\cdot L(y)$。

实**例**。令X为集合， $K:X^2\to\mathbb{R}_{\min}$ 下面的功能。 $\mathcal{K}$ 是的应用 $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ 在自身 $u\mapsto\mathcal{K}u$ 与

$$\forall x\in X,\quad(\mathcal{K}u)(x)=\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ 是线性运算符。

定义。 $(\mathcal{R},+,\times)$ 是半环， $(X,+,\cdot)$ 一个半模块 $\mathcal{R}$， $L:X\to X$ 线性算子和 $\lambda\in\mathbb{R}$。我们说λ是特征值大号如果 $\exists x\in X,\ x\neq 0,\ L(x)=\lambda\cdot x$。在这种情况下，我们说$x$是与λ相关的特征向量。

实**例**。与前面的示例相同的符号。 $\lambda\in\mathbb{R}_{\min}$ 是的特征值 $\mathcal{K}$ 如果存在 $u\in B(X,\mathbb{R}_{\min})$ 与你不完全相同+∞和

$$\forall x\in X,\quad\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}=\lambda+u(x).\tag{1}$$

2.光谱理论 $\mathbb{R}_{\min}$

定理1。 令X为集合， $K:X^2\to\mathbb{R}$ 下面是一个函数。假*设*有 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和下面的函数 $u:X\to\mathbb{R}$ 与（*1*）。然后我*们*有

$$\lambda=\inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty}\frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.\tag{2}$$

这个公式是 $\mathbb{R}_{\min}$ 光谱半径公式。[6]给出了未指定的 $X=[0,1]$。[16]仅针对有限的集合X给出了它。在这种情况下，下面的公式（3）更有趣。有关规范化半代数中谱半径的公式解释，请参见[3]。

*证*据。我们选择 $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$。然后我们有

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\lambda+u(x_{n-1})=\inf_{y\in X}\{K(x_{n-1},y)+u(y)\}\leq K(x_{n-1},x_n)+u(x_n).$$

让我们添加前n个方程。我们获得

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n\lambda+u(x_0)\leq K(x_0,x_1)+\cdot+K(x_{n-1},x_n)+u(x_n).$$

由于u有界，所以除以n并取 $n \to +\infty$。我们获得

$$\lambda \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

(x_n) 是任意的。所以我们有

$$\lambda \leq \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

为了证明相反的不等式，令ε> 0并 $y_0 \in X$。我们可以连续构造一个序列 $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 与

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1},y_n)+u(y_n) \leq \inf_{x\in X}\{K(y_{n-1},x)+u(x)\}+\varepsilon = \lambda + u(y_{n-1})+\varepsilon.$$

让我们添加前n个方程并除以n。我们获得

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

用 $n \to +\infty$， 我们获得

$$\begin{aligned}\lambda &\geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon.\end{aligned}$$

定理2。 *让它成为一个紧凑的度量空间* (X,d) 和 $K \in C^0(X^2,\mathbb{R})$。有一个独特的 $\lambda \in \mathbb{R}$ *对于它存在* $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ 与（*1*）。

这是一个类似的 $\mathbb{R}_{\min}$ 定理的 Krein 和鲁特曼。文献[5]给出了一个有限集X的证明。[7]为 $X=[0,1]$ 并指出可以进行各种概括。[9]将证据扩展到 $X=[0,1]^n$。[14]在一般情况下甚至在较弱的假设下也提供了证明。但是[14]的证明方法与[7,9]中使用的证明方法有些不同，并且不清楚。下面的证明是[7,9]中的直接推广。

证据。 $E=C^0(X,\mathbb{R})$。我们定义 $\|u\|=\sup_{x\in X}|u(x)|$ 如果 $u \in E$。那么E是一个Banach空间。我们定义

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

$T(E)$ 是一个等连续集。确实，让ε> 0。由于K是一致连续的，

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x,y,x',y' \in X, \quad \max\{d(x,x');d(y,y')\} \leq \alpha \;\Rightarrow\; |K(x,y)-K(x',y')| \leq \varepsilon.$$

我们选择 $x,x' \in X$ 与 $d(x,x') \leq \alpha$。然后我们有

$$\begin{aligned}\forall u \in E, \quad (Tu)(x)-(Tu)(x') &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} \\ &\leq \inf_{y\in X}\{K(x',y)+\varepsilon+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

用 x' 代替x，我们得到 $|(Tu)(x)-(Tu)(x')| \leq \varepsilon$。

功能 $T: E \to E$， $u \mapsto Tu$ 是连续的。用 $u,v \in E$，

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\qquad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + 2\|v-u\|.\end{aligned}$$

让我们交换v和u的角色。我们获得 $\|Tv-Tu\| \leq 2\|v-u\|$。

我们定义

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C=\{u\in E;\ \forall x\in X,\ 0\le u(x)\le K_+-K_-\}.$$

我们有

$$\forall u\in E,\quad \forall x\in X,\quad 0\le (Tu)(x)\le \inf_{y\in X}\{K_++u(y)\}-\inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_-+u(y)\}=K_+-K_-.$$

所以我们有 $T(E)\subset C$。特别是，$T(C)\subset C$ 和 $T(C)$ 有界。 $T(E)$ 是等连续的。 $T(C)$ 因此也是等连续的。 $T(C)$根据Ascoli和Arzela定理，E在E中相对紧凑。 C 是一个封闭且凸的子集。对于在C的紧凑子集中具有值的Banach空间的封闭和凸子集的连续函数，根据Schauder定理，有一个固定点： $\exists u\in C,\ Tu=u$，表示（1）与

$$\lambda=\inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

特征值λ的唯一性来自定理1。

3.取决于参数的问题

似乎尚未研究取决于参数的最小加特征值问题。

主张**1**。 *让*它成*为*一个*紧*凑的度量空*间*(X,d)，Ω是拓扑空*间*， $K:\alpha\mapsto K_\alpha$ 的*连续*函数 $\Omega\to(C^0(X^2,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$。 λ_α 是与关*联*的唯一*实*数 K_α 根据定理*2*，我*们*得到： $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$ 的 $\Omega\to\mathbb{R}$ 是*连续*功能。

*证*据。我们选择 $\alpha\in\Omega$ 和 $\varepsilon>0$。有一个邻居 $\mathcal{V}$ 的 α 与

$$\beta\in\mathcal{V}\Rightarrow\sup_{x,y\in X}|K_\alpha(x,y)-K_\beta(x,y)|\le\varepsilon.$$

然后我们有

$$\begin{aligned}\forall(x_n)\in X^{\mathbb{N}},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}-\varepsilon&\le\frac{K_\beta(x_0,x_1)+\cdots+K_\beta(x_{n-1},x_n)}{n}\\&\le\frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}+\varepsilon.\end{aligned}$$

让我们来 $\liminf_{n\to+\infty}$ 这些不平等，然后是所有的不平等 $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$。从公式（2）可以得出

$$\lambda_\alpha-\varepsilon\le\lambda_\beta\le\lambda_\alpha+\varepsilon.$$

命题**2**。 *让*它成*为*一个*紧*凑的度量空*间*(X,d) Ω是*实*向量空*间*的凸子集。 $K_\alpha\in C^0(X^2,\mathbb{R})$ 如果 $\alpha\in\Omega$。我*们*猜*测* $\forall x,y\in X$， $\alpha\mapsto K_\alpha(x,y)$ 的 $\Omega\to\mathbb{R}$ 是凹函数。 λ_α 是与关*联*的唯一*实*数 K_α 由定理*2*得出。 $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$ 的 $\Omega\to\mathbb{R}$ 是凹函数。

[6]提到了此属性 $X=[0,1]$ 和 $\Omega=\mathbb{R}$。

*证*据。用 $\mathbf{x}=(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$， $n\in\mathbb{N}^*$ 和 $\alpha\in\Omega$，我们定义

$$S(\mathbf{x},n,\alpha)=\frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

我们选择 $t\in]0,1[$ 和 $\alpha,\beta\in\Omega$。然后我们有

$$\forall\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta)\ge t\,S(\mathbf{x},n,\alpha)+(1-t)S(\mathbf{x},n,\beta)$$

由于存在凹度假设。具有的特性 $\liminf$， 我们获得

$$\forall x\in X^{\mathbb{N}},\quad \liminf_{n\to+\infty}S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta)\ge t\ \liminf_{n\to+\infty}S(\mathbf{x},n,\alpha)+(1-t)\ \liminf_{n\to+\infty}S(\mathbf{x},n,\beta).$$

拿走所有 $\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}$， 我们获得

$$\begin{aligned}&\inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty}S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta)\\&\qquad\ge t\inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty}S(\mathbf{x},n,\alpha)+(1-t)\inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty}S(\mathbf{x},n,\beta).\end{aligned}$$

所以根据公式（2），$\lambda_{t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta} \geq t\,\lambda_\alpha + (1-t)\lambda_\beta$。

4.数值方法

以下命题证明了[6]使用的数值方法的收敛性。

命题3。 *让它成为一个紧凑的度量空间*(X,d)。*设一个lipschitzian函数* $K : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x,y) - K(x',y')| \leq \kappa \max\{d(x,x'); d(y,y')\}.$$

根据定理*2*，令*λ为唯一的实数* $\exists\, u \in C^0(X,\mathbb{R})$ 与（*1*）。*设X的一系列有限子集*，$(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$，*带有*

$$h_p = \sup_{x\in X} \min_{y\in X_p} d(x,y) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

根据定理*2*，

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y\in X_p}\{K(x,y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

然后我*们*有 $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ 和 $\lambda_p \to \lambda$ 如果 $p \to +\infty$。

这个命题与[10]的非标准分析的观点有关，该分析考虑了*p*的无限大的值。

*证*据。我们选择 $p \in \mathbb{N}$。根据（2），

$$\lambda = \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n},$$
$$\lambda_p = \inf_{(x_n)\in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

一方面，$X_p \subset X$，所以我们有 $\lambda \leq \lambda_p$。另一方面，令ε> 0。存在 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 与

$$\lambda \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon\,.$$

通过假设，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\exists y_n \in X_p$，$d(x_n,y_n) \leq h_p$。但是*K*是Lipschitz，所以 $\forall n \in \mathbb{N}$，$|K(x_n,x_{n+1}) - K(y_n,y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$。结论，

$$\begin{aligned}\lambda_p &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1) + \cdots + K(y_{n-1},y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda + \varepsilon + \kappa\, h_p.\end{aligned}$$

因为ε是任意的，所以我们得到 $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$。

主张4。 *设一个有q个元素的集合*，X_p。*然后我们有*

$$\lambda_p = \min_{1\leq n\leq q} \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in X_p^n} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}. \tag{3}$$

*证*据。例如，参见[5]。

λ_p 是“最小周期性平均值”。该平均值是通过有限次数的操作计算得出的。证明与（2）类似。但是，实际上并不是使用公式（3）。有更好的算法，例如Karp算法需要 $O(q^3)$ 运算或霍华德算法，这似乎是最快的[8]。注意，在最小加特征值问题的数值分析中，涉及的矩阵是完整的并且非常大。因此，欢迎使用高效的算法，尤其是当问题取决于我们在下一节中有所不同的参数时。Karp的算法非常易于编程，而Howard的算法可通过Scilab的Maxplus工具箱获得。请参阅www-rocq.inria.fr/scilab/和www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html。

5.定期职能

主张5。成*为*一个阿*贝*尔拓扑*组*$(X,+)$，以下功能 $K:X^2\to\mathbb{R}$ 和P的子*组*X。我*们*猜*测*

$$\forall p\in P,\ \forall(x,y)\in X^2,\ K(x+p,y+p)=K(x,y).$$

$(\mathbf{X},+)$ 是拓扑*组*，它是X与P的商。我*们*定*义*

$$\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{X},\quad \mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\inf_{y\in\mathbf{y}}K(x,y) \tag{4}$$

与 $x\in\mathbf{x}$。*设*$\lambda\in\mathbb{R}$。

- 如果我*们*有*连续*的功能 $u:X\to\mathbb{R}$ 与

  $$\forall p\in P,\quad \forall x\in X,\quad u(x+p)=u(x)$$

  和

  $$\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}=\lambda+u(x), \tag{5}$$

  然后商函数 $u:\mathbf{X}\to\mathbb{R}$ 从u推*导*出是*连续*的

  $$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{X},\quad \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}=\lambda+\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- 相反，如果 $\mathbf{u}:\mathbf{X}\to\mathbb{R}$ 是一个*连续*函数（*6*），*则*周期的周期函数P， $u:X\to\mathbb{R}$，从中扣除 $\mathbf{u}$ 是*连续*的并*检查*（*5*）。

[6]证明了这个命题 $X=\mathbb{R}$ 和 $P=\mathbb{Z}$，[9]为 $X=\mathbb{R}^n$ 和 $P=\mathbb{Z}^n$。

*证*据。首先，请注意 $\mathbf{K}$ 定义明确，因为

$$\forall x\in X,\quad \forall\mathbf{y}\in\mathbf{X},\quad \forall p\in P,\quad \inf_{y\in\mathbf{y}}K(x+p,y)=\inf_{y\in\mathbf{y}}K(x,y-p)=\inf_{y\in\mathbf{y}}K(x,y).$$

其余的很容易从以下事实推导出来： $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ 和 $x\in\mathbf{x}$， 我们有

$$\begin{aligned}\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}=\inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\inf_{y\in\mathbf{y}}\{K(x,y)+u(y)\}&=\inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\inf_{y\in\mathbf{y}}\{K(x,y)+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}\\&=\inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}.\end{aligned}$$

6.例子

对于所有$\alpha\in\mathbb{R}$， $K_\alpha\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。我们认为

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad K_0(x+1,y+1)=K_0(x,y) \tag{7}$$
$$K_\alpha(x,y)=K_0(x,y)-\alpha(x-y). \tag{8}$$

我们定义

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \lambda_\alpha=\inf_{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty}\frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 紧凑。根据定理2和命题5， λ_α 是唯一具有周期1的周期函数的实数 $u_\alpha\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 与

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \inf_{y\in\mathbb{R}}\{K_\alpha(x,y)+u_\alpha(y)\}=\lambda_\alpha+u_\alpha(x). \tag{9}$$

根据命题2， $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$是凹函数。所以它在右边有一个导数 $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ 对于所有α $\alpha\mapsto\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ 是递减函数。

Frenkel和Kontorova模型

我们选择 $L\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。我们猜测

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad L(x+1,y+1)=L(x,y).$$

我们定义

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_\alpha(x,y) = L(x,y) - \alpha(x-y).$$

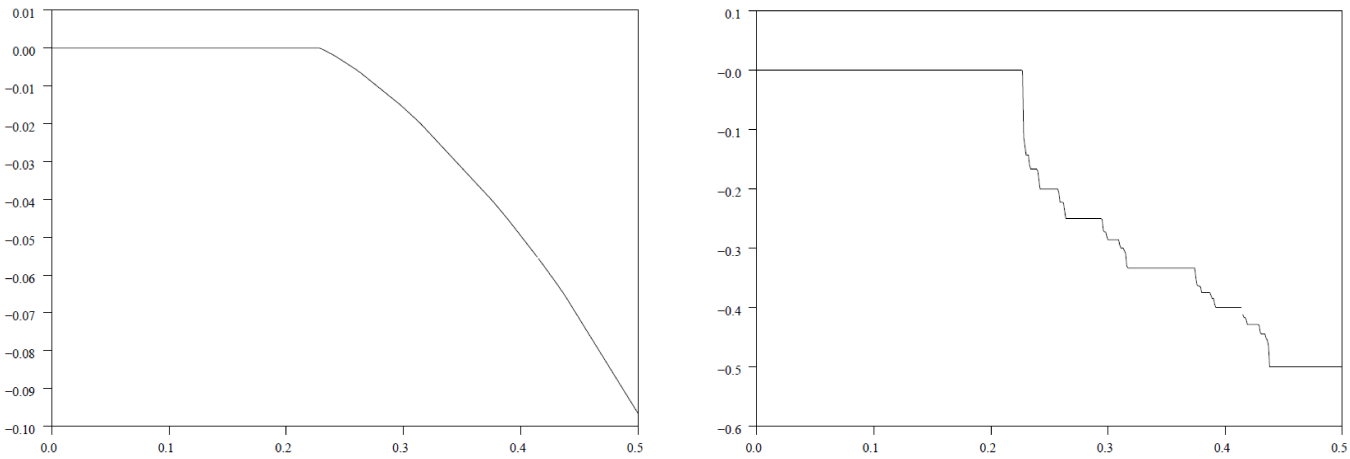
假设（7）和（8）得到验证。一种特殊情况是 $V \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是周期1的周期，并且

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x,y) = V(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\,.$$

图1显示了 λ_α 关于α，如果 $V(x) = C[1-\cos(2\pi x)]$ 与另一个参数 C。Frenkel和Kontorova在1938年提出了这个例子。$C = (4/3)/(2\pi)^2$。我们采取 $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ 离散化 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。我们有

$$\forall \alpha \in [0,1/2], \quad \forall x, y \in [0,1], \quad \inf_{p\in\mathbb{Z}} K_\alpha(x, y+p) = V(x) + \inf_{p\in\{-1,0,1\}} \left\{ \frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x-y-p) \right\}.$$

图（a）说明了 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$。图（b）表明 $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ 也是α的连续函数，但作为“魔鬼的阶梯”。是否可以从奥布里[1,2]的结果和格里菲斯[13]的言论中推论得出一个疑问。



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

图1. Frenkel和Kontorova模型的最小能量。

Hamilton-Jacobi方程的均质化

我们选择 $L \in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。我们猜测

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, v) = L(x,v).$$

我们定义

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x,y) &= \inf\left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds\,;\ \xi \in C^1([0,1],\mathbb{R}),\ \xi(0) = y,\ \xi(1) = x \right\}, \\ K_\alpha(x,y) &= K_0(x,y) - \alpha(x-y) \end{aligned} \tag{10}$$

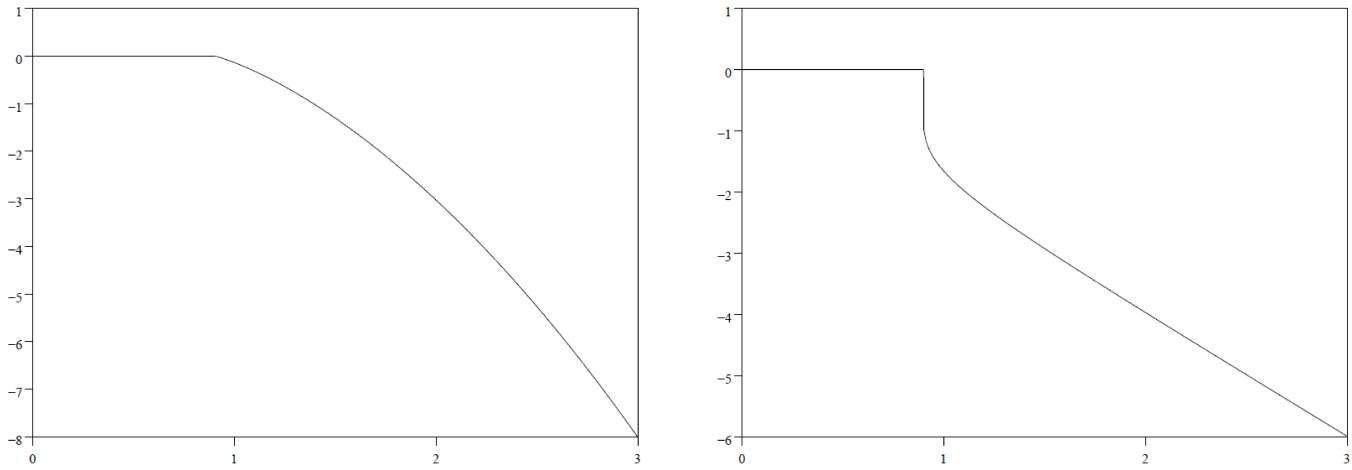
假设（7）和（8）得到验证。这种情况的特殊情况是 $V \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是周期1的周期，并且

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x,v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

在这种情况下，特征值几乎有一个明确的公式 λ_α （例如，参见[9]），即

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\, |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\lambda]}\, dx & \forall\, |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx. \end{cases}$$

图2显示了依赖关系 λ_α 关于α，如果 $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$。注意与图1的异同。奇怪的是，两个这样的紧密模型具有如此不同的行为。



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

图2.有效方程的有效哈密顿量。

在这种情况下 $L(x,v)$ 相对于v是凸的，[9]表明具有函数（10）的特征值问题（9）等效于单元格的问题

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

与 $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ 和

$$\forall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x,v)\}.$$

回想一下，细胞的这个问题来自于均质化 $\varepsilon \to 0$ 等式的

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\right) = 0.$$

[11]揭示了奥布里和马瑟理论与汉密尔顿和雅可比方程之间的其他联系。还要注意，对于Frenkel和Kontorova模型来说相当容易的数值方法，不容易适应Hamilton和Jacobi方程的情况，因为核（10）已经很难计算。在某些情况下，可以使用软件来解决与（10）的Euler和Lagrange方程有关的边界问题。这需要在其他地方进行研究。

收敛速度

让我们回到Frenkel和Kontorova的模型。与[6]中一样，我们选择周期1的周期函数逐段抛物线， $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，带有

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}\, x^2 & -1/4 \le x \le 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 1/4 \le x \le 3/4 \end{cases}$$

与 $c \ge 0$。我们用 $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ 离散化。根据命题3 $h_p = 1/p$， 我们有

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \le \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p).$$

κ是函数的Lipschitz常数 $\mathbf{K}$ 由（4）定义。我们猜测 $c = 4/3$ 和 $\alpha = 13/32$。然后，如[6]所示，明确计算出λ，即 $\lambda = -\frac{265}{2048}$。图3显示 $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ 就.....而言 $-\log_{10}(p)$。由于K的特定属性，函数的斜率似乎接近2，这表明误差是二次的。但是，我们可以构造最小+特征值问题的示例，这些示例的收敛速度只是线性的。仍然需要在内核上找到足够的假设以使收敛是二次的。

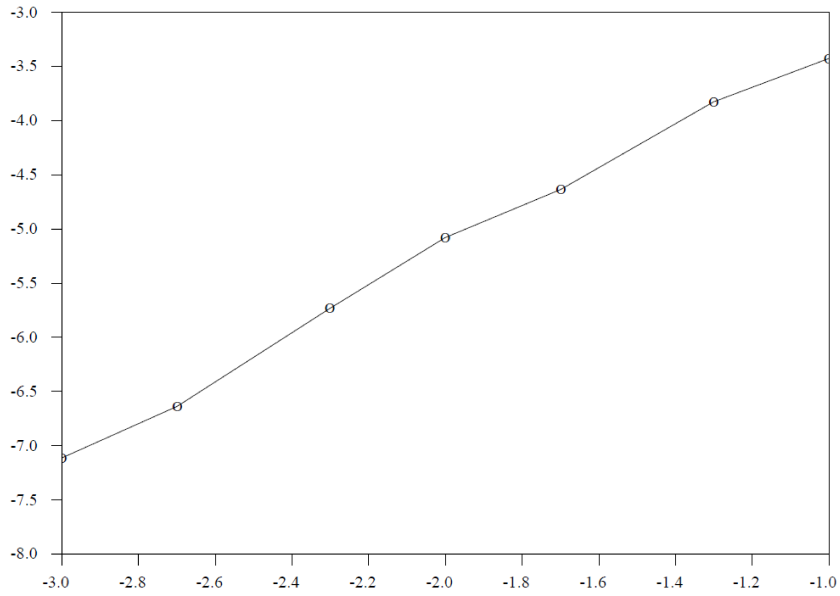


图3.收敛。 $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ 就.....而言 $-\log_{10}(p)$。

谢谢

作者感谢Lin Yi-Jiun和不列颠哥伦比亚大学举办的关于偏微分方程粘度方法的研讨会。

书目参考

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil′s staircase. Physica D 7 (1983) 240 – 258.
3. N. Bacaër, Min – plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.
4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max – plus toolbox to solve eikonal equations? In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 – 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton – Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 – 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR – Izv. 38 (1992) 91 – 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 – 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel – Kontorova models of commensurate – incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd., North – Holland, Amsterdam (1990) 69 – 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays – Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The “hump” effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 – 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 – 150.