Сходимость численных методов и зависимость от параметра задачи с минимальным собственным числом: модели Френкеля-Конторовой и усреднение уравнений Гамильтона-Якоби

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

резюме

Мы используем минус-плюс версию формулы спектрального радиуса, чтобы доказать, что уникальное собственное значение задачи мин-плюс собственных значений непрерывно зависит от параметров. Мы также доказываем, что численный метод, введенный Чоу и Гриффитсом для вычисления этого собственного значения, сходится. Набор инструментов, недавно разработанный INRIA, иллюстрирует эти результаты. В качестве примера мы используем модели Френкеля-Конторовой. Мы также настаиваем на аналогии с усреднением уравнений Гамильтона-Якоби.

Ключевые слова: мин-плюс задачи на собственные значения; числовой анализ; Модель Френкеля-Конторова; Уравнения Гамильтона-Якоби

Введение

Некоторые задачи оптимизации могут быть сформулированы с использованием полукольца

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

так что они выступают как аналоги классических задач на собственные значения. Например,

$$\min_{1 \le j \le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \le j \le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

выглядеть так же, как и

$$\min_{a \le y \le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

Эти аналогии были использованы для разработки спектральной теории матриц [5] и интегральных операторов [14] на этом полукольце. В [6] использовался численный метод для решения «интегральных задач» собственного минимального значения и, таким образом, для построения фазовых диаграмм для моделей Френкеля-Конторовой. Основная цель здесь - доказать сходимость этого метода.

Раздел 1, вдохновленный [12], напоминает, как формализовать аналогии с введением некоторых общих определений. Раздел 2 напоминает основные теоремы спектральной теории о $\mathbb{R}_{\min}$, В разделе 3 показано , что собственное значение λ непрерывно зависит от параметров , участвующих в функции *K* . Раздел 4 доказывает сходимость численного приближения задач на собственные значения на $\mathbb{R}_{\min}$, Доказательства разделов 3 и 4 легко выводятся из некой формулы спектрального радиуса, представленной в разделе 2. Раздел 5 посвящен случаю периодических функций. Раздел 6 иллюстрирует предыдущие результаты в двух контекстах: модели Френкеля-Конторовой в физике твердого тела и усреднение уравнений Гамильтона-Якоби.

Отметим, что задачи на собственные значения параметров для уравнений Гамильтона-Якоби, которые эквивалентны задачам на минимальные и собственные значения, также появляются при исследовании бегущих волн для движителя твердого топлива [3,15] , Это приложение было первоначальной мотивацией для нашего исследования. Но так как технические детали более сложны, мы объясним их в другом месте.

Отметим также, что численный анализ других линейных задач с минимальным плюсом не всегда так прост, как анализ проблем с собственным значением, представленных здесь (обсуждение см. В [4]).

1. Обобщенная линейная алгебра

Определение . $\mathcal{R}$ набор с внутренним композиционным законом $+$, $(\mathcal{R}, +)$ является полугруппой, если + ассоциативна и имеет нейтральный элемент. $(\mathcal{R}, +)$ коммутативная полугруппа, если + также коммутативна.

Определение . $\mathcal{R}$ набор с двумя внутренними законами композиции + и ×. $(\mathcal{R}, +, \times)$ полукольцо, если

- $(\mathcal{R}, +)$ является коммутативной полугруппой, чей нейтральный элемент равен 0,
- $(\mathcal{R}, \times)$ является полугруппой, чей нейтральный элемент равен 1,
- × является дистрибутивным по отношению к +,
- $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $0 \times \lambda = \lambda \times 0 = 0$,

Примеры .

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ а также $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ полукольца
- С $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ полукольцо с нейтральными элементами $+\infty$ и 0.

Определение . $(\mathcal{R}, +, \times)$ полукольцо и $(X, +)$ коммутативная полугруппа. Мы предполагаем, что $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $\forall x \in X$, $\lambda \cdot x \in X$, Мы говорим, что $(X, +, \cdot)$ является полумодулем на $(\mathcal{R}, +, \times)$ если $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,, \\
&(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \\
&\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\
&1 \cdot x = x.
\end{aligned}$$

Мы говорим, что *Y* является полу-модулем *X,* если *Y* является полу-модулем и $Y \subset X$,

Пример . Пусть *X будет* множеством и $(\mathcal{R}, +, \times)$ полукольцо.

$$\forall f, g \in \mathcal{R}^X, \quad \forall x \in X, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X, +, \cdot)$ тогда полумодуль на $\mathcal{R}$,

Пример . Пусть *X будет* множеством и $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ все функции $X \to \mathbb{R}_{\min}$ которые ограничены ниже. $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ является суб-полумодулем $(\mathbb{R}_{\min}^X, \min, +)$,

Определение . $(\mathcal{R}, +, \times)$ это полукольцо $(X, +, \cdot)$ а также $(Y, +, \cdot)$ два полумодуля и $L : X \to Y$, Мы говорим, что *L* линейный оператор, если $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}, \forall x, y \in X, L(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot L(x) + \mu \cdot L(y)$,

Пример . Пусть *X будет* множеством и $K : X^2 \to \mathbb{R}_{\min}$ функция ограничена снизу. $\mathcal{K}$ это приложение $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ само по себе $u \mapsto \mathcal{K}u$ с

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ является линейным оператором.

Определение . $(\mathcal{R}, +, \times)$ полукольцо, $(X, +, \cdot)$ полумодуль на $\mathcal{R}$, $L : X \to X$ линейный оператор и $\lambda \in \mathbb{R}$, Мы говорим, что λ является собственным значением *L,* если $\exists x \in X,\ x \neq 0,\ L(x) = \lambda \cdot x$, В этом случае мы говорим, что *x* - собственный вектор, связанный с λ.

Пример . Те же обозначения, что и в предыдущем примере. $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ собственное значение $\mathcal{K}$ если он существует $u \in B(X, \mathbb{R}_{\min})$ с *U* не тождественно $+\infty$ и

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \tag{1}$$

2. Спектральная теория $\mathbb{R}_{\min}$

Теорема 1 . *Пусть X будет множеством и $K : X^2 \to \mathbb{R}$ функция, которая ограничена снизу. Предположим, что есть $\lambda \in \mathbb{R}$ и функция, ограниченная снизу $u : X \to \mathbb{R}$ с (1). У нас тогда*

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \tag{2}$$

Эта формула является аналогом для $\mathbb{R}_{\min}$ формулы спектрального радиуса. [6] дает его неуказанным для $X = [0, 1]$, [16] дает его только для конечного множества *X.* В этом случае формула (3) ниже более интересна. Интерпретацию формулы в терминах спектрального радиуса в нормализованной полуалгебре см. В [3].

Доказательство. Мы выбираем $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, У нас тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1}, y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Добавим первые *n* уравнений. Мы получаем

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0, x_1) + \cdot + K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Поскольку *u* ограничен, разделите на *n* и возьмите $n \to +\infty$, Мы получаем

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

(x_n) был произвольным. Итак, мы имеем

$$\lambda \leq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Чтобы доказать обратное неравенство, пусть ε> 0 и $y_0 \in X$, Мы можем построить последовательностью последовательность $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ с

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1}, y_n) + u(y_n) \leq \inf_{x \in X} \{K(y_{n-1}, x) + u(x)\} + \varepsilon = \lambda + u(y_{n-1}) + \varepsilon.$$

Добавим первые *n* уравнений и разделим на *n* . Мы получаем

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

С $n \to +\infty$, мы получаем

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 2 . *Позвольте быть компактное метрическое пространство (X, d) а также $K \in C^0(X^2, \mathbb{R})$, Есть уникальный $\lambda \in \mathbb{R}$ для чего он существует $u \in C^0(X, \mathbb{R})$ с (1).*

Это аналог для $\mathbb{R}_{\min}$ теоремы Krein и Рутман. В [5] приведено доказательство для конечного множества *X.* [7] дает доказательства $X = [0, 1]$ и отмечает, что возможны различные обобщения. [9] распространяет доказательства $X = [0, 1]^n$, В [14] приводятся доказательства в общем контексте и даже при более слабых гипотезах. Но метод доказательства [14] немного отличается от метода, использованного в [7,9], и менее понятен. Приведенное ниже доказательство является прямым обобщением этого доказательства в [7,9].

Доказательство. $E = C^0(X, \mathbb{R})$, Мы определяем $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$ если $u \in E$, Тогда *E* - банахово пространство. Мы определяем

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z, y) + u(y)\}.$$

$T(E)$ является равностепенным непрерывным множеством. Действительно, пусть ε> 0. Поскольку *K* равномерно непрерывен,

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x, y, x', y' \in X, \quad \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \leq \alpha \ \Rightarrow\ |K(x, y) - K(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Мы выбираем $x, x' \in X$ с $d(x, x') \leq \alpha$, У нас тогда

$$\forall u \in E, \quad (Tu)(x) - (Tu)(x') = \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\}$$
$$\leq \inf_{y\in X}\{K(x',y)+\varepsilon+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} = \varepsilon.$$

С x' вместо x мы получаем $|(Tu)(x)-(Tu)(x')| \leq \varepsilon$,

функция $T : E \to E$, $u \mapsto Tu$ является непрерывным С $u, v \in E$,

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + 2\|v-u\|.\end{aligned}$$

Давайте поменяемся ролями v и u . Мы получаем $\|Tv - Tu\| \leq 2\|v-u\|$,

Мы определяем

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C = \{u \in E;\ \forall x \in X,\ 0 \leq u(x) \leq K_+ - K_-\}.$$

У нас есть

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad 0 \leq (Tu)(x) \leq \inf_{y\in X}\{K_+ + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

Итак, мы имеем $T(E) \subset C$, В частности, $T(C) \subset C$ а также $T(C)$ ограничен. $T(E)$ равностепенно непрерывен $T(C)$ поэтому также равностепенно непрерывен. $T(C)$относительно компактен в E согласно теореме Асколи и Арзелы. C является замкнутым и выпуклым подмножеством. Для непрерывной функции замкнутого и выпуклого подмножества банахова пространства со значениями в компактном подмножестве C существует неподвижная точка согласно теореме Шаудера: $\exists u \in C,\ Tu = u$, что означает (1) с

$$\lambda = \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

Единственность собственного значения λ вытекает из теоремы 1.

3. Проблемы, которые зависят от параметра

Задачи с минимальным и собственным значениями, зависящие от параметра, по-видимому, еще не изучены.

Предложение 1 . *Позвольте быть компактное метрическое пространство (X,d), Топологическое пространство и $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ непрерывная функция $\Omega \to (C^0(X^2,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, λ_α является единственным действительным числом, связанным с K_α согласно теореме 2. Тогда имеем: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ из $\Omega \to \mathbb{R}$ это непрерывная функция.*

Доказательство. Мы выбираем $\alpha \in \Omega$ а также $\varepsilon > 0$, Есть окрестности $\mathcal{V}$ из α с

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y\in X}|K_\alpha(x,y) - K_\beta(x,y)| \leq \varepsilon.$$

У нас тогда

$$\begin{aligned}\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon &\leq \frac{K_\beta(x_0,x_1)+\cdots+K_\beta(x_{n-1},x_n)}{n} \\ &\leq \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Давайте возьмем $\liminf_{n\to+\infty}$ из этих неравенств, тогда инфимум на всех $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, Из формулы (2) получаем, что

$$\lambda_\alpha - \varepsilon \leq \lambda_\beta \leq \lambda_\alpha + \varepsilon.$$

Предложение 2 . *Позвольте быть компактное метрическое пространство (X,d) и Ω - выпуклое подмножество вещественного векторного пространства. $K_\alpha \in C^0(X^2,\mathbb{R})$ если $\alpha \in \Omega$, Мы предполагаем $\forall x,y \in X$, $\alpha \mapsto K_\alpha(x,y)$ из $\Omega \to \mathbb{R}$ вогнутая функция. λ_α является единственным действительным числом, связанным с K_α по теореме 2. Тогда имеем: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ из $\Omega \to \mathbb{R}$ вогнутая функция.*

[6] упоминает это свойство для $X = [0,1]$ а также $\Omega = \mathbb{R}$,

Доказательство. С $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ а также $\alpha \in \Omega$мы определяем

$$S(\mathbf{x},n,\alpha) = \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

Мы выбираем $t \in]0,1[$ а также $\alpha, \beta \in \Omega$, У нас тогда

$$\forall \mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta) \geq t\,S(\mathbf{x},n,\alpha) + (1-t)S(\mathbf{x},n,\beta)$$

из-за вогнутости предположения. Со свойствами $\liminf$, мы получаем

$$\forall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta) \geq t\ \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\alpha) + (1-t)\ \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\beta).$$

Возьми инфимум на всех $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$, мы получаем

$$\begin{aligned}&\inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta) \\ &\quad \geq t\ \inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\alpha) + (1-t)\ \inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\beta).\end{aligned}$$

Так согласно формуле (2) $\lambda_{t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta} \geq t\,\lambda_\alpha + (1-t)\lambda_\beta$,

4. Численные методы

Следующее предложение доказывает сходимость численного метода, использованного в [6].

Предложение 3 . *Позвольте быть компактное метрическое пространство* (X, d)*, Позвольте быть функция Lipchitzian* $K : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq \kappa \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Согласно теореме 2 пусть λ *будет единственным действительным числом, для которого* $\exists\, u \in C^0(X, \mathbb{R})$ *с (1). Позвольте быть серия конечных подмножеств* X *,* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *, с*

$$h_p = \sup_{x\in X} \min_{y\in X_p} d(x, y) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Согласно теореме 2

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y\in X_p}\{K(x, y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

У нас тогда $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ *а также* $\lambda_p \to \lambda$ *если* $p \to +\infty$*,*

Это предложение связано с точкой зрения нестандартного анализа из [10], который рассматривает бесконечно большие значения p .

Доказательство. Мы выбираем $p \in \mathbb{N}$, Согласно (2),

$$\lambda = \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n},$$
$$\lambda_p = \inf_{(x_n)\in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

С одной стороны, $X_p \subset X$Итак, у нас есть $\lambda \leq \lambda_p$, С другой стороны, пусть ε> 0. Это существует $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ с

$$\lambda \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

По предположению, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in X_p$, $d(x_n, y_n) \leq h_p$, Но K Липшиц, так $\forall n \in \mathbb{N}$, $|K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$, В заключении,

$$\begin{aligned}\lambda_p &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda + \varepsilon + \kappa\, h_p.\end{aligned}$$

Поскольку ε было произвольным, мы получаем $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$,

Предложение 4 . *Позвольте быть множество с* q *элементами,* X_p*, У нас тогда*

$$\lambda_p = \min_{1\leq n\leq q} \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in X_p^n} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \tag{3}$$

Доказательство. См. [5] для примера.

λ_p является «минимальным циклическим средним». Это среднее значение рассчитывается с конечным числом операций. Доказательство аналогично (2). Однако на практике используется не формула (3). Есть лучшие алгоритмы, такие как алгоритм Карпа, который требует $O(q^3)$ операции, или алгоритм Говарда, который кажется самым быстрым [8]. Обратите внимание, что при численном анализе задач с минимальным и собственным значениями используемые матрицы являются полными и очень большими. Поэтому эффективные алгоритмы приветствуются, особенно когда проблема зависит от параметра, который мы меняем, как в следующих разделах. Алгоритм Карпа очень легко программировать, в то время как Говард доступен через набор инструментов Scilab Maxplus. См. Www-rocq.inria.fr/scilab/ и www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html .

5. Периодические функции

Предложение 5 . *Позвольте быть абелевой топологической группой* $(X, +)$*функция, ограниченная снизу* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *и* P *подгруппа* X *. Мы предполагаем*

$$\forall p \in P,\ \forall (x, y) \in X^2,\ K(x + p, y + p) = K(x, y).$$

$(\mathbf{X}, +)$ *является топологической группой , которая является фактором* X *с помощью* P *. Мы определяем*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x, y) \tag{4}$$

с $x \in \mathbf{x}$*, Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

- *Если у нас есть непрерывная функция* $u : X \to \mathbb{R}$ *с*

  $$\forall p \in P, \quad \forall x \in X, \quad u(x + p) = u(x)$$

  а также

  $$\inf_{y\in X}\{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \tag{5}$$

  тогда фактор-функция $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *выводится из ц непрерывна и*

  $$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- *И наоборот, если* $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *является непрерывной функцией с (6), то периодическая функция периода* P *,* $u : X \to \mathbb{R}$*, вычитается из* $\mathbf{u}$ *непрерывно и проверяет (5).*

[6] доказывает это предложение для $X = \mathbb{R}$ а также $P = \mathbb{Z}$, [9] для $X = \mathbb{R}^n$ а также $P = \mathbb{Z}^n$,

Доказательство. Во-первых, обратите внимание, что $\mathbf{K}$ хорошо определено, потому что

$$\forall x \in X, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \forall p \in P, \quad \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x+p, y) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y-p) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y).$$

Остальное легко выводится из того факта, что если $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ а также $x \in \mathbf{x}$, у нас есть

$$\begin{aligned} \inf_{y \in X}\{K(x,y)+u(y)\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}}\{K(x,y)+u(y)\} &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}}\{K(x,y)+\mathbf{u}(\mathbf{y})\} \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}. \end{aligned}$$

6. Примеры

Для всех α $\in \mathbb{R}$, $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, Мы предполагаем, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad K_0(x+1, y+1) = K_0(x, y) \tag{7}$$

$$K_\alpha(x, y) = K_0(x, y) - \alpha(x-y). \tag{8}$$

Мы определяем

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda_\alpha = \inf_{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ компактен Согласно теореме 2 и предложению 5 λ_α является единственным действительным числом, для которого существует периодическая функция периода 1, $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}}\{K_\alpha(x,y)+u_\alpha(y)\} = \lambda_\alpha + u_\alpha(x). \tag{9}$$

Согласно предложению 2, $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$вогнутая функция. Таким образом, он имеет производную на правой стороне $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ для всех α и $\alpha \mapsto \frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ является убывающей функцией.

Модели Френкеля и Конторова

Мы выбираем $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, Мы предполагаем

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, y+1) = L(x, y).$$

Мы определяем

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_\alpha(x, y) = L(x, y) - \alpha(x-y).$$

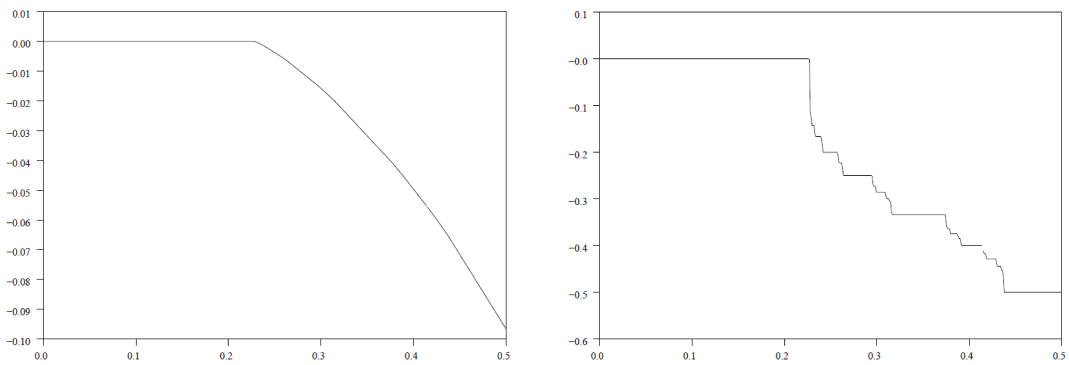
Предположения (7) и (8) проверены. Особый случай - это где $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ периодичен периода 1 и

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x, y) = V(x) + \frac{(y-x)^2}{2}.$$

На рисунке 1 показана зависимость λ_α по отношению к α, если $V(x) = C[1-\cos(2\pi x)]$ с другим параметром C, Френкель и Конторова предложили этот пример в 1938 году. $C = (4/3)/(2\pi)^2$, Мы принимаем $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ дискретизировать $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, У нас есть

$$\forall \alpha \in [0, 1/2], \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad \inf_{p \in \mathbb{Z}} K_\alpha(x, y+p) = V(x) + \inf_{p \in \{-1,0,1\}} \left\{ \frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x-y-p) \right\}.$$

Рисунок (а) иллюстрирует непрерывность $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$, Рисунок (б) предполагает, что $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ также является непрерывной функцией α, но как «чертова лестница». Остается сомнение в том, можно ли это сделать из результатов Обри [1,2] и замечаний Гриффита [13].



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Рисунок 1. Минимальная энергия модели Френкеля и Конторова.

Усреднение уравнений Гамильтона-Якоби

Мы выбираем $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, Мы предполагаем

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, v) = L(x, v).$$

Мы определяем

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x, y) &= \inf\left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds\,;\ \xi \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ \xi(0) = y,\ \xi(1) = x \right\}, \\ K_\alpha(x, y) &= K_0(x, y) - \alpha(x-y) \end{aligned} \tag{10}$$

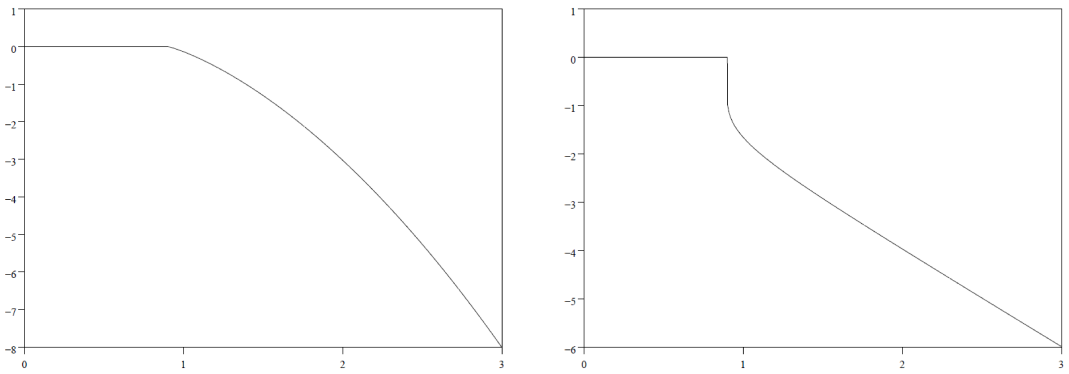
Предположения (7) и (8) проверены. Частным случаем этой ситуации является то, что где $V \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ периодичен периода 1, и

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x,v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

В этой ситуации есть почти явная формула для собственного значения λ_α (см. [9], например), а именно

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\, |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\min V]}\,dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\lambda]}\,dx & \forall\, |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\min V]}\,dx. \end{cases}$$

На рисунке 2 показана зависимость λ_α по отношению к α, если $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$, Обратите внимание на сходства и различия с рисунком 1. Странно, что две такие близкие модели имеют такое различное поведение.



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Рисунок 2. Эффективный гамильтониан для уравнения эйконала.

В случае, когда $L(x,v)$ является выпуклым относительно v , [9] показывает, что задача на собственные значения (9) с функцией (10) эквивалентна задаче для клетки

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

с $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ а также

$$\forall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x,p) = \sup_{v\in\mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x,v)\}.$$

Напомним, что эта проблема для клетки происходит от гомогенизации, когда $\varepsilon \to 0$ уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\right) = 0.$$

[11] раскрывает другие связи между теорией Обри и Мазера и уравнениями Гамильтона и Якоби. Отметим также, что численный метод, который довольно прост для модели Френкеля и Конторовой, нелегко адаптировать к случаю уравнений Гамильтона и Якоби, поскольку ядро (10) уже сложно вычислить. В некоторых случаях можно использовать программное обеспечение, которое решает краевые задачи, связанные с уравнением Эйлера и Лагранжа для (10). Это должно быть изучено в другом месте.

Скорость сходимости

Вернемся к моделям Френкеля и Конторова. Как и в [6], мы выбираем периодическую функцию периода 1, параболическую по частям, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, с

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}\,x^2 & -1/4 \le x \le 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 1/4 \le x \le 3/4 \end{cases}$$

с $c \ge 0$, Мы используем $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ для дискретизации. Согласно предложению 3 с $h_p = 1/p$, у нас есть

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \le \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p).$$

к - постоянная Липшица функции $\mathbf{K}$ определяется по (4). Мы предполагаем $c = 4/3$ а также $\alpha = 13/32$, Тогда λ вычисляется явно, как указано в [6], а именно $\lambda = -\frac{265}{2048}$, Рисунок 3 показывает $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ с точки зрения $-\log_{10}(p)$, Из-за специфических свойств K наклон функции кажется близким к 2, что говорит о квадратичной ошибке. Однако мы можем построить примеры задач с минимальным плюсом для собственных значений, для которых скорость сходимости является только линейной. Осталось найти достаточное количество гипотез для ядра, чтобы сходимость была квадратичной.

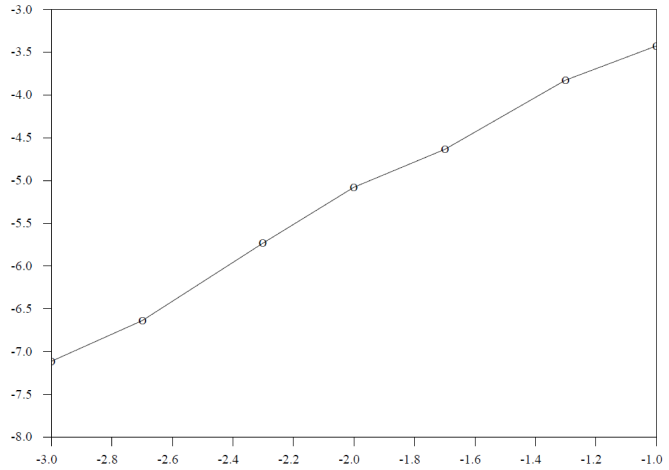


Рисунок 3. Конвергенция. $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ с точки зрения $-\log_{10}(p)$,

Спасибо

Автор благодарит Лин И-Цзюня и Университет Британской Колумбии за семинар по методам вязкости для дифференциальных уравнений в частных производных.

Библиографические ссылки

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil′s staircase. Physica D 7 (1983) 240 – 258.
3. N. Bacaër, Min – plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.
4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max – plus toolbox to solve eikonal equations? In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 – 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton – Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 – 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR – Izv. 38 (1992) 91 – 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 – 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel – Kontorova models of commensurate – incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd., North – Holland, Amsterdam (1990) 69 – 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays – Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The “hump” effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 – 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 – 150.