Convergência de métodos numéricos e dependência de um parâmetro de problemas de mais ou menos autovalores: modelos de Frenkel-Kontorova e homogeneização das equações de Hamilton-Jacobi

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

resumo

Usamos a versão min-plus da fórmula do raio espectral para provar que o autovalor exclusivo de um problema de autovalor min-plus depende continuamente dos parâmetros. Também provamos que o método numérico introduzido por Chou e Griffiths para calcular esse valor próprio converge. Uma caixa de ferramentas desenvolvida recentemente pelo INRIA ilustra esses resultados. Usamos os modelos de Frenkel-Kontorova como exemplo. Também insistimos na analogia com a homogeneização das equações de Hamilton-Jacobi.

Keywords: problemas de autovalor min-plus; análise numérica; Modelo Frenkel-Kontorova; Equações de Hamilton-Jacobi

Introdução

Alguns problemas de otimização podem ser formulados usando o semi-anel

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

para que apareçam como análogos dos problemas clássicos do autovalor. Por exemplo,

$$\min_{1 \le j \le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \le j \le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

parecidos, bem como

$$\min_{a \le y \le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

Essas analogias foram usadas para desenvolver uma teoria espectral de matrizes [5] e operadores integrais [14] neste semi-anel. [6] usaram um método numérico para resolver "problemas integrais" de min-plus autovalor e, assim, desenhar diagramas de fases para os modelos de Frenkel-Kontorova. O principal objetivo aqui é provar a convergência desse método.

A seção 1, inspirada em [12], lembra como formalizar as analogias com a introdução de algumas definições gerais. A Seção 2 relembra os principais teoremas da teoria espectral sobre $\mathbb{R}_{\min}$. A secção 3 mostra que o valor próprio λ depende continuamente sobre os parâmetros envolvidos na função K . A Seção 4 comprova a convergência da aproximação numérica de problemas de autovalores em $\mathbb{R}_{\min}$. As provas das seções 3 e 4 são facilmente deduzidas a partir de um tipo de fórmula de raio espectral apresentada na seção 2. A seção 5 trata do caso de funções periódicas. A seção 6 ilustra os resultados anteriores em dois contextos: os modelos de Frenkel-Kontorova na física do estado sólido e a homogeneização das equações de Hamilton-Jacobi.

Observe que os problemas paramétricos de autovalor das equações de Hamilton-Jacobi, que são equivalentes a problemas com min-plus, também aparecem no estudo de ondas que viajam para propulsão a propulsão sólida [3,15] . Esta aplicação foi a motivação inicial para o nosso estudo. Porém, como os detalhes técnicos são mais complicados, explicaremos em outro lugar.

Observe também que a análise numérica de outros problemas lineares min-plus nem sempre é tão simples quanto a dos problemas de autovalor apresentados aqui (consulte [4] para uma discussão).

1. Álgebra linear generalizada

Definição . $\mathcal{R}$ é um conjunto com uma lei de composição interna $+$. $(\mathcal{R}, +)$ é um semi-grupo se + for associativo e tiver um elemento neutro. $(\mathcal{R}, +)$ é um semi-grupo comutativo se + também for comutativo.

Definição . $\mathcal{R}$ é um conjunto com duas leis de composição interna + e $\times$. $(\mathcal{R}, +, \times)$ é um semi-anel se

- $(\mathcal{R}, +)$ é um semi-grupo comutativo cujo elemento neutro é 0,
- $(\mathcal{R}, \times)$ é um semi-grupo cujo elemento neutro é 1,
- $\times$ é distributivo em relação a +,
- $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $0 \times \lambda = \lambda \times 0 = 0$.

Exemplos .

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ e $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ são semi-anéis.
- Com $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ é um semi-anel com elementos neutros $+\infty$ e 0.

Definição . $(\mathcal{R}, +, \times)$ é um semi-anel e $(X, +)$ um semi-grupo comutativo. Supomos que $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $\forall x \in X$, $\lambda \cdot x \in X$. Dizemos que $(X, +, \cdot)$ é um semi-módulo em $(\mathcal{R}, +, \times)$ E se $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,, \\
&(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \\
&\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\
&1 \cdot x = x.
\end{aligned}$$

Dizemos que Y é um submódulo de X se Y é um semi-módulo e $Y \subset X$.

Exemplo . Seja X um conjunto e $(\mathcal{R}, +, \times)$ um semi-anel.

$$\forall f, g \in \mathcal{R}^X, \quad \forall x \in X, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X, +, \cdot)$ é então um semi-módulo em $\mathcal{R}$.

Exemplo . Seja X um conjunto e $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ todas as funções $X \to \mathbb{R}_{\min}$ que são delimitados abaixo. $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ é um submódulo de $(\mathbb{R}_{\min}^X, \min, +)$.

Definição . $(\mathcal{R}, +, \times)$ é um semi-anel. $(X, +, \cdot)$ e $(Y, +, \cdot)$ são dois semi-módulos e $L : X \to Y$. Dizemos que L é um operador linear se $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$, $L(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot L(x) + \mu \cdot L(y)$.

Exemplo . Seja X um conjunto e $K : X^2 \to \mathbb{R}_{\min}$ uma função delimitada abaixo. $\mathcal{K}$ é a aplicação de $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ nele mesmo $u \mapsto \mathcal{K}u$ com

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ é um operador linear.

Definição . $(\mathcal{R}, +, \times)$ é um semi-anel, $(X, +, \cdot)$ um semi-módulo em $\mathcal{R}$, $L : X \to X$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que λ é um autovalor de L se $\exists x \in X,\ x \neq 0,\ L(x) = \lambda \cdot x$. Nesse caso, dizemos que x é um vetor próprio associado a λ.

Exemplo . Mesmas notações que o exemplo anterior. $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ é um autovalor de $\mathcal{K}$ se existir $u \in B(X, \mathbb{R}_{\min})$ com u não identicamente $+\infty$ e

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \tag{1}$$

2. Teoria espectral sobre $\mathbb{R}_{\min}$

Teorema 1 . *Seja X um conjunto e $K : X^2 \to \mathbb{R}$ uma função que é delimitada abaixo. Suponha que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma função delimitada abaixo $u : X \to \mathbb{R}$ com (1). Nós temos então*

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \tag{2}$$

Esta fórmula é o análogo para $\mathbb{R}_{\min}$ da fórmula do raio espectral. [6] indica não especificado para $X = [0,1]$. [16] fornece apenas para um conjunto X que é finito. Nesse caso, a fórmula (3) abaixo é mais interessante. Para uma interpretação da fórmula em termos de raio espectral em uma semi-álgebra normalizada, consulte [3].

Evidência. Nós escolhemos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Nós temos então

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1}, y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Vamos adicionar as primeiras n equações. Nós obtemos

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0, x_1) + \cdot + K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Como u é delimitado, divida por n e tome $n \to +\infty$. Nós obtemos

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

(x_n) foi arbitrário. Então nós temos

$$\lambda \leq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Para provar a desigualdade oposta, deixe ε> 0 e $y_0 \in X$. Podemos construir por sucessão uma sequência $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ com

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1}, y_n) + u(y_n) \leq \inf_{x \in X} \{K(y_{n-1}, x) + u(x)\} + \varepsilon = \lambda + u(y_{n-1}) + \varepsilon.$$

Vamos adicionar as primeiras n equações e dividir por n . Nós obtemos

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

Com $n \to +\infty$, nós obtemos

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema 2 . *Seja um espaço métrico compacto (X, d) e $K \in C^0(X^2, \mathbb{R})$. Existe um único $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual existe $u \in C^0(X, \mathbb{R})$ com (1).*

É um análogo para $\mathbb{R}_{\min}$ do teorema de Krein e Rutman. [5] fornece uma prova para um conjunto X que é finito. [7] fornece evidências para $X = [0,1]$ e observa que várias generalizações são possíveis. [9] estende a evidência para $X = [0,1]^n$. [14] dá prova no contexto geral e mesmo com hipóteses mais fracas. Mas o método de prova de [14] é um pouco diferente do usado em [7,9] e menos claro. A prova abaixo é uma generalização direta disso em [7,9].

Evidência. $E = C^0(X, \mathbb{R})$. Nós definimos $\|u\| = \sup_{x\in X} |u(x)|$ E se $u \in E$. Então E é um espaço de Banach. Nós definimos

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y\in X}\{K(x,y) + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y) + u(y)\}.$$

$T(E)$ é um conjunto equicontinuo. De fato, deixe ε> 0. Como K é uniformemente contínuo,

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x, y, x', y' \in X, \quad \max\{d(x,x'); d(y,y')\} \le \alpha \;\Rightarrow\; |K(x,y) - K(x',y')| \le \varepsilon.$$

Nós escolhemos $x, x' \in X$ com $d(x,x') \le \alpha$. Nós temos então

$$\begin{aligned}\forall u \in E, \quad (Tu)(x) - (Tu)(x') &= \inf_{y\in X}\{K(x,y) + u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y) + u(y)\} \\ &\le \inf_{y\in X}\{K(x',y) + \varepsilon + u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y) + u(y)\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Com x' em vez de x , obtemos $|(Tu)(x) - (Tu)(x')| \le \varepsilon$.

Função $T : E \to E$, $u \mapsto Tu$ é contínuo. Com $u, v \in E$,

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \\ &\le (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y) - u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y) - u(y)\} \\ &\le (Tu)(x) + 2\|v - u\|.\end{aligned}$$

Vamos trocar os papéis de v e u . Nós obtemos $\|Tv - Tu\| \le 2\|v - u\|$.

Nós definimos

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C = \{u \in E;\ \forall x \in X,\ 0 \le u(x) \le K_+ - K_-\}.$$

Nós temos

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad 0 \le (Tu)(x) \le \inf_{y\in X}\{K_+ + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

Então nós temos $T(E) \subset C$. Em particular, $T(C) \subset C$ e $T(C)$ é limitado. $T(E)$ é equicontínuo. $T(C)$ é, portanto, também equicontínuo. $T(C)$é relativamente compacto em *E de* acordo com o teorema de Ascoli e Arzela. C é um subconjunto fechado e convexo. Para uma função contínua de um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach com valores em um subconjunto compacto de C , existe um ponto fixo de acordo com o teorema de Schauder: $\exists u \in C,\ Tu = u$, o que significa (1) com

$$\lambda = \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y) + u(y)\}.$$

A singularidade do autovalor λ resulta do teorema 1.

3. Problemas que dependem de um parâmetro

Os problemas de min e mais autovalores que dependem de um parâmetro ainda não parecem ter sido estudados.

Proposição 1 . *Seja um espaço métrico compacto (X, d), Space um espaço topológico e $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ uma função contínua de $\Omega \to (C^0(X^2, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. λ_α é o único número real associado a K_α de acordo com o Teorema 2. Temos então: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ do $\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

Evidência. Nós escolhemos $\alpha \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. Existe um bairro $\mathcal{V}$ do α com

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y\in X} |K_\alpha(x,y) - K_\beta(x,y)| \le \varepsilon.$$

Nós temos então

$$\begin{aligned}\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_\alpha(x_0,x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon &\le \frac{K_\beta(x_0,x_1) + \cdots + K_\beta(x_{n-1},x_n)}{n} \\ &\le \frac{K_\alpha(x_0,x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Vamos pegar o $\liminf_{n\to+\infty}$ dessas desigualdades, então o menor em todos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Obtemos da fórmula (2) que

$$\lambda_\alpha - \varepsilon \le \lambda_\beta \le \lambda_\alpha + \varepsilon.$$

Proposição 2 . *Seja um espaço métrico compacto (X, d) e Ω um subconjunto convexo de um espaço vetorial real. $K_\alpha \in C^0(X^2, \mathbb{R})$ E se $\alpha \in \Omega$. Nós presumimos $\forall x, y \in X$, $\alpha \mapsto K_\alpha(x,y)$ do $\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função côncava. λ_α é o único número real associado a K_α pelo Teorema 2. Temos então: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ do $\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função côncava.*

[6] menciona essa propriedade para $X = [0,1]$ e $\Omega = \mathbb{R}$.

Evidência. Com $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Omega$, definimos

$$S(\mathbf{x}, n, \alpha) = \frac{K_\alpha(x_0,x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

Nós escolhemos $t \in]0,1[$ e $\alpha, \beta \in \Omega$. Nós temos então

$$\forall \mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta) \geq t\, S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) S(\mathbf{x}, n, \beta)$$

por causa da suposição de concavidade. Com as propriedades de $\liminf$, nós obtemos

$$\forall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta) \geq t \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta).$$

Leve o melhor em todos $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$, nós obtemos

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta) \\ &\quad \geq t \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta). \end{aligned}$$

Então, de acordo com a fórmula (2), $\lambda_{t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta} \geq t\, \lambda_\alpha + (1-t) \lambda_\beta$.

4. Métodos numéricos

A proposição a seguir prova a convergência do método numérico usado por [6].

Proposição 3 . *Seja um espaço métrico compacto* (X, d). *Let Ser uma função Lipschitzian* $K : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x,y) - K(x',y')| \leq \kappa \max\{d(x,x'); d(y,y')\}.$$

De acordo com o Teorema 2, seja λ *o único número real para o qual* $\exists\, u \in C^0(X, \mathbb{R})$ *com (1). Seja uma série de subconjuntos finitos de* X *,* $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ *com*

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x,y) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De acordo com o Teorema 2,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y \in X_p} \{K(x,y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

Nós temos então $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ *e* $\lambda_p \to \lambda$ *E se* $p \to +\infty$.

Essa proposição está relacionada ao ponto de vista da análise não padronizada de [10], que considera valores infinitamente grandes de p .

Evidência. Nós escolhemos $p \in \mathbb{N}$. De acordo com (2),

$$\begin{aligned} \lambda &= \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}, \\ \lambda_p &= \inf_{(x_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \end{aligned}$$

Por um lado, $X_p \subset X$, Então nós temos $\lambda \leq \lambda_p$. Por outro lado, deixe ε> 0. Isso existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ com

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

Por hipótese, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in X_p$, $d(x_n, y_n) \leq h_p$. Mas K é Lipschitz, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $|K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$. Em conclusão,

$$\begin{aligned} \lambda_p &\leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda + \varepsilon + \kappa\, h_p. \end{aligned}$$

Como ε era arbitrário, obtemos $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$.

Proposição 4 . *Let Ser um conjunto com q elementos,* X_p. *Nós temos então*

$$\lambda_p = \min_{1 \leq n \leq q} \min_{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in X_p^n} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \tag{3}$$

Evidência. Veja [5] por exemplo.

λ_p é a "média cíclica mínima". Essa média é calculada com um número finito de operações. A prova é semelhante à de (2). No entanto, não é a fórmula (3) usada na prática. Existem algoritmos melhores, como o algoritmo Karp, que requer $O(q^3)$ operações, ou algoritmo de Howard, que parece ser o mais rápido [8]. Observe que, na análise numérica de problemas de mais e mais autovalores, as matrizes envolvidas são completas e muito grandes. Algoritmos tão eficientes são bem-vindos, especialmente quando o problema depende de um parâmetro que variamos como nas próximas seções. O algoritmo de Karp é muito fácil de programar, enquanto o de Howard está disponível na caixa de ferramentas Maxplus do Scilab. Veja www-rocq.inria.fr/scilab/ e www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html .

5. Funções periódicas

Proposição 5 . *Seja um grupo topológico abeliano* $(X, +)$, *uma função delimitada abaixo* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *e P um subgrupo de X . Nós presumimos*

$$\forall p \in P,\ \forall (x,y) \in X^2,\ K(x+p, y+p) = K(x,y).$$

$(\mathbf{X}, +)$ *é o grupo topológica, que é o quociente de X por P . Nós definimos*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y) \tag{4}$$

com $x \in \mathbf{x}$. Let $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Se temos uma função contínua $u : X \to \mathbb{R}$ com*

$$\forall p \in P, \quad \forall x \in X, \quad u(x+p) = u(x)$$

e

$$\inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \tag{5}$$

então a função quociente $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ deduzido de u é contínuo e

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- *Por outro lado, se $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com (6), então a função periódica do período P, $u : X \to \mathbb{R}$, deduzido do $\mathbf{u}$ é contínuo e verifica (5).*

[6] comprova esta proposição para $X = \mathbb{R}$ e $P = \mathbb{Z}$, [9] para $X = \mathbb{R}^n$ e $P = \mathbb{Z}^n$.

Evidência. Primeiro, observe que $\mathbf{K}$ está bem definido, porque

$$\forall x \in X, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \forall p \in P, \quad \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x+p, y) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y-p) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y).$$

O restante é facilmente deduzido do fato de que, se $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $x \in \mathbf{x}$, temos

$$\begin{aligned} \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}} \{K(x, y) + u(y)\} &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}} \{K(x, y) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\}. \end{aligned}$$

6. Exemplos

Para todos os α ∈ ℝ , $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supomos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad K_0(x+1, y+1) = K_0(x, y) \tag{7}$$

$$K_\alpha(x, y) = K_0(x, y) - \alpha(x - y). \tag{8}$$

Nós definimos

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda_\alpha = \inf_{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é compacto. De acordo com o Teorema 2 e Proposição 5, λ_α é o único número real para o qual existe uma função periódica do período 1, $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}} \{K_\alpha(x, y) + u_\alpha(y)\} = \lambda_\alpha + u_\alpha(x). \tag{9}$$

De acordo com a proposição 2, $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$é uma função côncava. Então tem um derivado no lado direito $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ para todos os α e $\alpha \mapsto \frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ é uma função decrescente.

Modelos Frenkel e Kontorova

Nós escolhemos $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Nós presumimos

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, y+1) = L(x, y).$$

Nós definimos

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_\alpha(x, y) = L(x, y) - \alpha(x - y).$$

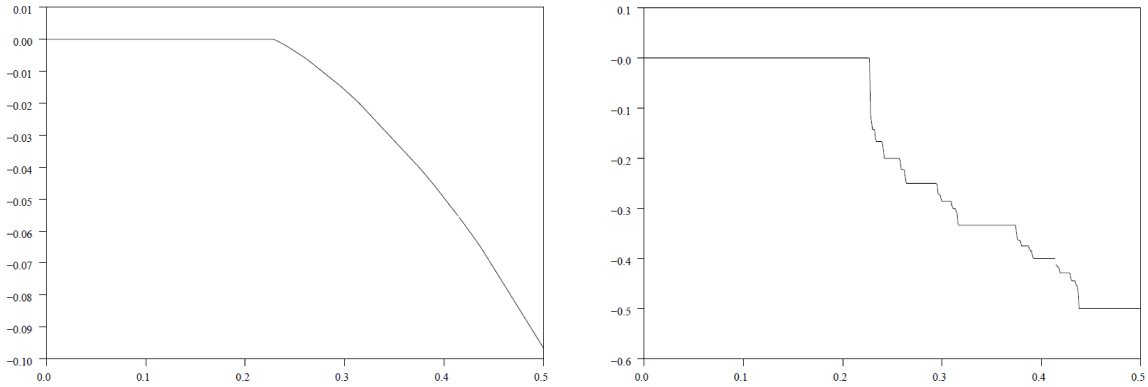
As premissas (7) e (8) são verificadas. Um caso especial é que onde $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é periódico do período 1 e

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x, y) = V(x) + \frac{(y-x)^2}{2}.$$

A Figura 1 mostra a dependência de λ_α em relação a α se $V(x) = C[1 - \cos(2\pi x)]$ com outro parâmetro C. Frenkel e Kontorova propuseram este exemplo em 1938. Tomamos $C = (4/3)/(2\pi)^2$. Nós levamos $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ discretizar $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nós temos

$$\forall \alpha \in [0, 1/2], \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad \inf_{p \in \mathbb{Z}} K_\alpha(x, y+p) = V(x) + \inf_{p \in \{-1, 0, 1\}} \left\{ \frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x - y - p) \right\}.$$

A figura (a) ilustra a continuidade de $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$. A figura (b) sugere que $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ também é uma função contínua de α, mas como uma "escada do diabo". Permanece uma dúvida sobre se isso pode ser deduzido dos resultados de Aubry [1,2] e das observações de Griffith [13].



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Figura 1. A energia mínima do modelo Frenkel e Kontorova.

Homogeneização das equações de Hamilton-Jacobi

Nós escolhemos $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Nós presumimos

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, v) = L(x, v).$$

Nós definimos

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x,y) &= \inf\left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds\, ;\ \xi \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ \xi(0) = y,\ \xi(1) = x \right\}, \\ K_\alpha(x,y) &= K_0(x,y) - \alpha(x-y) \end{aligned} \tag{10}$$

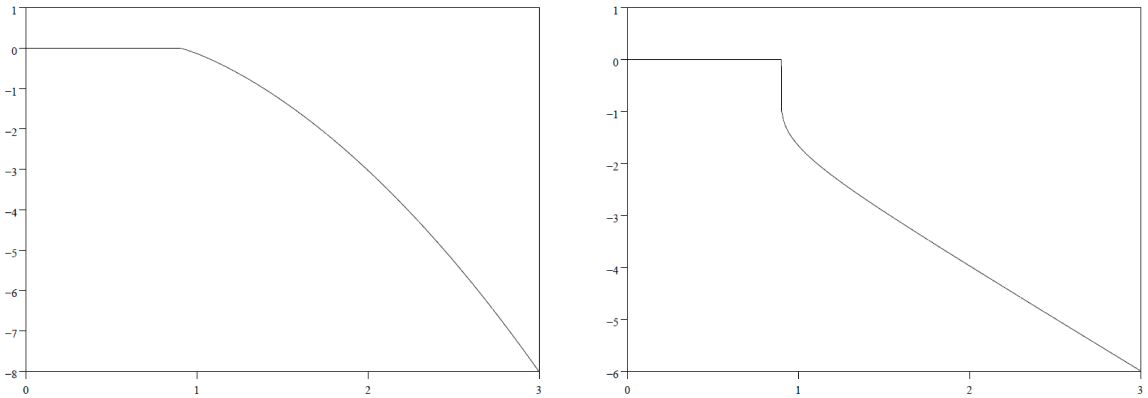
As premissas (7) e (8) são verificadas. Um caso especial dessa situação é que, onde $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é periódico do período 1 e

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x,v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

Nessa situação, existe uma fórmula quase explícita para o valor próprio λ_α (ver [9] por exemplo), nomeadamente

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\ |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \lambda]}\, dx & \forall\ |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx. \end{cases}$$

A Figura 2 mostra a dependência de λ_α em relação a α se $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$. Observe as semelhanças e diferenças com a Figura 1. É estranho que dois desses modelos próximos tenham comportamentos tão diferentes.



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Figura 2. O Hamiltoniano efetivo para a equação eikonal.

No caso em que $L(x,v)$ é convexo em relação a v , [9] mostra que o problema de autovalor (9) com a função (10) é equivalente ao problema de uma célula

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

com $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ e

$$\forall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x,v)\}.$$

Lembre-se de que esse problema para uma célula provém da homogeneização quando $\varepsilon \to 0$ da equação

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\right) = 0.$$

[11] expõe outros elos entre a teoria de Aubry e Mather e as equações de Hamilton e Jacobi. Observe também que o método numérico, que é bastante fácil para o modelo de Frenkel e Kontorova, não é fácil de se adaptar ao caso das equações de Hamilton e Jacobi porque o núcleo (10) já é difícil de calcular. Em certos casos, pode-se usar um software que resolva os problemas de contorno ligados à equação de Euler e Lagrange para (10). Isso precisa ser estudado em outro lugar.

A velocidade da convergência

Vamos voltar aos modelos de Frenkel e Kontorova. Como em [6], escolhemos a função periódica do período 1, parabólica por peças, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$com

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}\, x^2 & -1/4 \le x \le 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 1/4 \le x \le 3/4 \end{cases}$$

com $c \ge 0$. Nós usamos $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ para discretização. De acordo com a proposição 3 com $h_p = 1/p$, temos

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \le \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p).$$

κ é a constante lipschitz da função $\mathbf{K}$ definido por (4). Nós presumimos $c = 4/3$ e $\alpha = 13/32$. Então λ é calculado explicitamente, como indicado em [6], a saber $\lambda = -\frac{265}{2048}$. A figura 3 mostra $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ em termos de $-\log_{10}(p)$. Devido às propriedades específicas de K, a inclinação da função parece estar próxima de 2, o que sugere que o erro é quadrático. No entanto, podemos construir exemplos de problemas de autovalor min-plus para os quais a velocidade de convergência é apenas linear. Resta encontrar hipóteses suficientes no núcleo para que a convergência seja quadrática.

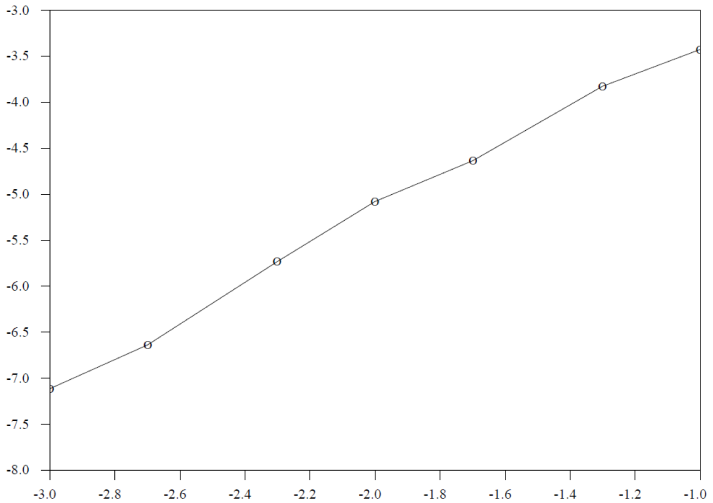


Figura 3. Convergência. $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ em termos de $-\log_{10}(p)$.

obrigado

O autor agradece Lin Yi-Jiun e a Universidade da Colúmbia Britânica pelo estimulante workshop sobre métodos de viscosidade para equações diferenciais parciais.

Referências bibliográficas

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil′s staircase. Physica D 7 (1983) 240 – 258.
3. N. Bacaër, Min – plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.
4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max – plus toolbox to solve eikonal equations? In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 – 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton – Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 – 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR – Izv. 38 (1992) 91 – 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 – 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel – Kontorova models of commensurate – incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd., North – Holland, Amsterdam (1990) 69 – 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays – Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The “hump” effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 – 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 – 150.