数値解法の収束と最小値と固有値問題のパラメーターへの依存性：フレンケル-コントロバモデルとハミルトン-ヤコビ方程式の均質化

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

概要

スペクトル半径式のmin-plusバージョンを使用して、min-plus固有値問題の一意の固有値がパラメーターに継続的に依存することを証明します。また、この固有値を計算するためにChouとGriffithsによって導入された数値手法が収束することを証明します。INRIAが最近開発したツールボックスは、これらの結果を示しています。例として、Frenkel-Kontorovaモデルを使用します。また、ハミルトン・ヤコビ方程式の均質化との類似性も主張します。

キーワード：min-plus固有値問題。数字的分析; フレンケル-コントロバモデル。ハミルトン-ヤコビ方程式

前書き

いくつかの最適化問題は、セミリングを使用して定式化できます

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

固有値の古典的な問題の類似物として現れるように。例えば、

$$\min_{1 \le j \le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \le j \le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

同様に見えるだけでなく

$$\min_{a \le y \le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

これらのアナロジーは、この半リングの行列[5]と積分演算子[14]のスペクトル理論を開発するために使用されています。[6]は、数値法を使用して、min-plus固有値の「積分問題」を解き、それにより、Frenkel-Kontorovaモデルの位相図を描きました。ここでの主な目的は、この方法の収束を証明することです。

[1]に触発されたセクション1では、いくつかの一般的な定義を導入して、アナロジーを形式化する方法を思い出します。セクション2では、スペクトル理論の主な定理を思い出します。$\mathbb{R}_{\min}$。セクション3は、固有値λが関数Kに含まれるパラメーターに継続的に依存することを示しています。セクション4は、固有値問題の数値近似の収束を証明します。$\mathbb{R}_{\min}$。セクション3と4の証明は、セクション2で示した一種のスペクトル半径の式から簡単に推定できます。セクション5は、周期関数の場合を扱います。セクション6では、以前の結果を2つのコンテキストで説明します。固体物理学におけるフレンケル-コントロバモデルとハミルトン-ヤコビ方程式の均質化です。

ハミルトン-ヤコビ方程式のパラメトリック固有値問題は、min-plus固有値問題と同等であり、固体推進剤推進の進行波の研究にも現れていることに注意してください[3,15] 。このアプリケーションは、私たちの研究の最初の動機でした。ただし、技術的な詳細はより複雑なので、他の場所で説明します。

また、他の線形min-plus問題の数値解析は、ここで示した固有値問題の数値解析ほど常に単純ではないことにも注意してください（説明については[4]を参照）。

1.一般化線形代数

定義。 $\mathcal{R}$ 内部構成法のセットです $+$。 $(\mathcal{R},+)$ +が関連付けられていて、中立要素を持っている場合、セミグループです。 $(\mathcal{R},+)$ +も可換である場合、可換半群です。

定義。 $\mathcal{R}$ 2つの内部構成法+と×のセットです。 $(\mathcal{R},+,\times)$ セミリングの場合

- $(\mathcal{R},+)$ 中立要素が0である可換半群です。
- $(\mathcal{R},\times)$ 中立要素が1である半群
- ×は+に関して分配的であり、
- $\forall\lambda\in\mathcal{R}$、 $0\times\lambda=\lambda\times 0=0$。

例。

- $(\mathbb{R},+,\times)$ そして $(\mathbb{R}_+,+,\times)$ 半リングです。
- と $\mathbb{R}_{\min}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$、 $(\mathbb{R}_{\min},\min,+)$ 中立要素の半リングです $+\infty$ と0。

定義。 $(\mathcal{R},+,\times)$ 半リングであり、 $(X,+)$ 可換半群。と思う $\forall\lambda\in\mathcal{R},\ \forall x\in X$、 $\lambda\cdot x\in X$。と言う $(X,+,\cdot)$ 上のセミモジュールです $(\mathcal{R},+,\times)$ もし $\forall\lambda,\mu\in\mathcal{R}$、 $\forall x,y\in X$、

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x\,,\\&(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x),\\&\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y,\\&1\cdot x=x.\end{aligned}$$

私たちは、と言うYは、のサブセミモジュールであるX場合 Yは半モジュールであり、 $Y\subset X$。

例。ましょXは集合し、 $(\mathcal{R},+,\times)$ セミリング。

$$\forall f,g\in\mathcal{R}^X,\quad\forall x\in X,\quad(f+g)(x):=f(x)+g(x),\quad(\lambda\cdot f)(x):=\lambda\times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X,+,\cdot)$ 次にセミモジュールです $\mathcal{R}$。

例。ましょXは集合し、 $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ すべての機能 $X\to\mathbb{R}_{\min}$ これらは以下に囲まれています。 $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ のサブセミモジュールです $(\mathbb{R}_{\min}^X,\min,+)$。

定義。 $(\mathcal{R},+,\times)$ セミリングです。 $(X,+,\cdot)$ そして $(Y,+,\cdot)$ 2つのセミモジュールであり、 $L:X\to Y$。私たちは、と言うLがあれば、線形演算子であります $\forall\lambda,\mu\in\mathcal{R}$、 $\forall x,y\in X$、 $L(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)=\lambda\cdot L(x)+\mu\cdot L(y)$。

例。ましょXは集合し、 $K:X^2\to\mathbb{R}_{\min}$ 以下に囲まれた関数。 $\mathcal{K}$ のアプリケーションです $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ それ自体 $u\mapsto\mathcal{K}u$ と

$$\forall x\in X,\quad(\mathcal{K}u)(x)=\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ 線形演算子です。

定義。 $(\mathcal{R},+,\times)$ セミリングです $(X,+,\cdot)$ セミモジュール $\mathcal{R}$、 $L:X\to X$ 線形演算子と $\lambda\in\mathbb{R}$。以下の場合 、λはLの固有値であると言います。$\exists x\in X,\ x\neq 0,\ L(x)=\lambda\cdot x$。この場合、$x$はλに関連付けられた固有ベクトルであると言います。

例。前の例と同じ表記法。 $\lambda\in\mathbb{R}_{\min}$ の固有値です $\mathcal{K}$ 存在する場合 $u\in B(X,\mathbb{R}_{\min})$ uのない同一の+∞と

$$\forall x\in X,\quad\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}=\lambda+u(x).\tag{1}$$

2.上のスペクトル理論 $\mathbb{R}_{\min}$

定理1。 ましょXは集合し、 $K : X^2 \to \mathbb{R}$ 以下に制限されている関数。あるとします $\lambda \in \mathbb{R}$ と以下にバインドされた関数 $u : X \to \mathbb{R}$ （*1*）を使用します。私たちは

$$\lambda = \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,. \tag{2}$$

この式は、 $\mathbb{R}_{\min}$ スペクトル半径の公式の。[6]は不特定 $X=[0,1]$。[16] は有限である集合Xに対してのみそれを与えます。この場合、以下の式（3）がより興味深いです。正規化された半代数のスペクトル半径に関する式の解釈については、[3]を参照してください。

証拠。我々が選択しました $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$。私たちは

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y\in X}\{K(x_{n-1},y)+u(y)\} \le K(x_{n-1},x_n)+u(x_n).$$

最初のn個の方程式を 追加してみましょう。私達は手に入れました

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \le K(x_0,x_1)+\cdot+K(x_{n-1},x_n)+u(x_n).$$

以来、Uが制限され、除算N及びテイク $n \to +\infty$。私達は手に入れました

$$\lambda \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

(x_n) 任意でした。だから私たちは

$$\lambda \le \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

反対の不等式を証明するには、$\varepsilon > 0$とし、 $y_0 \in X$。シーケンスを連続して構築できます $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ と

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1},y_n)+u(y_n) \le \inf_{x\in X}\{K(y_{n-1},x)+u(x)\}+\varepsilon = \lambda + u(y_{n-1})+\varepsilon.$$

私たちは追加してみましょう最初のnによって方程式と除算をn個。私達は手に入れました

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \le \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

と $n \to +\infty$ 、 私達は手に入れました

$$\begin{aligned}\lambda &\ge \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\ge \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon.\end{aligned}$$

定理2。 コンパクトな距離空間にしよう (X,d) そして $K \in C^0(X^2,\mathbb{R})$。独特の $\lambda \in \mathbb{R}$ それが存在する $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ （*1*）を使用します。

それはのアナログです $\mathbb{R}_{\min}$ の定理の Krein とラトマン。[5] は有限である集合Xの証明を与えます。[7]の証拠を与える $X=[0,1]$ また、さまざまな一般化が可能であることに注意してください。[9]証拠を $X=[0,1]^n$。[14]は、一般的な文脈や弱い仮説でさえ証明を与えます。しかし、[14]の証明の方法は[7,9]で使用されたものとは少し異なり、あまり明確ではありません。以下の証明は、[7,9]のそれを直接一般化したものです。

証拠。 $E = C^0(X,\mathbb{R})$。私たちは定義します $\|u\| = \sup_{x\in X}|u(x)|$ もし $u \in E$。次に、EはBanachスペースです。私たちは定義します

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

$T(E)$ 等連続集合です。実際、$\varepsilon > 0$とします。Kは一様に連続なので、

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x,y,x',y' \in X, \quad \max\{d(x,x');d(y,y')\} \le \alpha \;\Rightarrow\; |K(x,y)-K(x',y')| \le \varepsilon.$$

我々が選択しました $x,x' \in X$ と $d(x,x') \le \alpha$。私たちは

$$\forall u \in E, \quad (Tu)(x) - (Tu)(x') = \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\}$$
$$\leq \inf_{y\in X}\{K(x',y)+\varepsilon+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} = \varepsilon.$$

と x' xの代わりに、 $|(Tu)(x)-(Tu)(x')| \leq \varepsilon$。

関数 $T : E \to E$、 $u \mapsto Tu$ 継続的です。と $u, v \in E$、

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + 2\|v-u\|.\end{aligned}$$

vとuの 役割を入れ替えましょう。私達は手に入れました $\|Tv - Tu\| \leq 2\|v-u\|$。

私たちは定義します

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C = \{u \in E;\ \forall x \in X,\ 0 \leq u(x) \leq K_+ - K_-\}.$$

我々は持っています

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad 0 \leq (Tu)(x) \leq \inf_{y\in X}\{K_+ + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

だから私たちは $T(E) \subset C$。特に、 $T(C) \subset C$ そして $T(C)$ 有界です。 $T(E)$ 等連続です。 $T(C)$ したがって、等連続でもあります。 $T(C)$AscoliとArzelaの定理によれば、Eは比較的コンパクトです。 C 閉じた凸型のサブセットです。Cのコンパクトなサブセット内の値を持つバナッハ空間の閉じた凸型サブセットの連続関数の場合、Schauderの定理による固定点があります。 $\exists u \in C,\ Tu = u$、つまり（1）は

$$\lambda = \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

固有値λの一意性は、定理1の結果です。

3.パラメータに依存する問題

パラメータに依存する最小プラス固有値問題はまだ研究されていないようです。

命題1。 コンパクトな距離空間にしよう (X,d)、Ωトポロジー空間と $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ の継続的な機能 $\Omega \to (C^0(X^2,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$。 λ_α に関連付けられている唯一の実数です K_α 定理2によると、次のようになります。 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ の $\Omega \to \mathbb{R}$ は連続関数です。

証拠。我々が選択しました $\alpha \in \Omega$ そして $\varepsilon > 0$。近所あり $\mathcal{V}$ の α と

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y\in X}|K_\alpha(x,y) - K_\beta(x,y)| \leq \varepsilon.$$

私たちは

$$\begin{aligned}\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon &\leq \frac{K_\beta(x_0,x_1)+\cdots+K_\beta(x_{n-1},x_n)}{n} \\ &\leq \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

取りましょう $\liminf_{n\to+\infty}$ これらの不平等のうち、すべての極小 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$。式（2）から、

$$\lambda_\alpha - \varepsilon \leq \lambda_\beta \leq \lambda_\alpha + \varepsilon.$$

命題2。 コンパクトな距離空間にしよう (X,d) Ωは実数ベクトル空間の凸サブセットです。 $K_\alpha \in C^0(X^2,\mathbb{R})$ もし $\alpha \in \Omega$。とする $\forall x,y \in X$、 $\alpha \mapsto K_\alpha(x,y)$ の $\Omega \to \mathbb{R}$ 凹関数です。 λ_α に関連付けられている唯一の実数です K_α 定理

2により、次のようになります。 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ の $\Omega \to \mathbb{R}$ 凹関数です。

[6]はこのプロパティに言及しています $X = [0,1]$ そして $\Omega = \mathbb{R}$。

証拠。と $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$、 $n \in \mathbb{N}^*$ そして $\alpha \in \Omega$、私たちは定義します

$$S(\mathbf{x}, n, \alpha) = \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}\,.$$

我々が選択しました $t \in]0,1[$ そして $\alpha, \beta \in \Omega$。私たちは

$$\forall \mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta) \geq t\, S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) S(\mathbf{x}, n, \beta)$$

凹面の仮定のため。のプロパティで $\liminf$、 私達は手に入れました

$$\forall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta) \geq t \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta).$$

すべてに極小を $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$、 私達は手に入れました

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta) \\ &\qquad \geq t \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta). \end{aligned}$$

したがって、式（2）によれば、 $\lambda_{t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta} \geq t\, \lambda_\alpha + (1-t) \lambda_\beta$。

4.数値法

次の命題は、[6]で使用されている数値解法の収束を証明します。

命題3。 コンパクトな距離空間にしよう (X, d)。レプシッツ関数にしよう $K : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x,y) - K(x',y')| \leq \kappa \max\{d(x,x'); d(y,y')\}.$$

定理2によれば、λを、 $\exists\, u \in C^0(X, \mathbb{R})$ （1）を使用します。有限部分集合のシリーズとするX、$(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$、

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x,y) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

定理2によれば、

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y \in X_p} \{K(x,y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

私たちは $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ そして $\lambda_p \to \lambda$ もし $p \to +\infty$。

この命題は、pの無限に大きい値を考慮する[10]の非標準分析の観点に関連しています。

証拠。我々が選択しました $p \in \mathbb{N}$。（2）によれば、

$$\begin{aligned} \lambda &= \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}\,, \\ \lambda_p &= \inf_{(x_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}\,. \end{aligned}$$

一方では、 $X_p \subset X$、だから私たちは持っています $\lambda \leq \lambda_p$。一方、ε> 0とします。それが存在します $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ と

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon\,.$$

仮説により、 $\forall n \in \mathbb{N}$、 $\exists y_n \in X_p$、 $d(x_n, y_n) \leq h_p$。しかし、Kはそう、リプシッツであります $\forall n \in \mathbb{N}$、
$|K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$。結論として、

$$\begin{aligned}\lambda_p &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda+\varepsilon+\kappa\, h_p.\end{aligned}$$

εは任意なので、 $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$。

命題4。q要素の セットであるとします。 X_p。私たちは

$$\lambda_p = \min_{1\leq n\leq q} \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in X_p^n} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}. \tag{3}$$

証拠。たとえば、[5]を参照してください。

λ_p「最小循環平均」です。この平均は、有限数の操作で計算されます。証明は（2）のそれと似ています。ただし、実際に使用されているのは式（3）ではありません。必要なKarpアルゴリズムのようなより良いアルゴリズムがあります $O(q^3)$ 演算、または最速と思われるハワードのアルゴリズム[8]。最小値と固有値の問題の数値解析では、含まれる行列がいっぱいで非常に大きいことに注意してください。したがって、特に問題が次のセクションのように変化するパラメーターに依存する場合は、効率的なアルゴリズムが歓迎されます。Karpのアルゴリズムはプログラミングが非常に簡単ですが、HowardのアルゴリズムはScilabのMaxplusツールボックスから利用できます。www-rocq.inria.fr/scilab/および[www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.htmlを](www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html)参照してください。

5.定期的な機能

命題5。アーベルトポロジーグループになろう $(X,+)$、以下にバインドされた関数 $K : X^2 \to \mathbb{R}$ そして、PのサブグループX。とする

$$\forall p\in P,\ \forall (x,y)\in X^2,\ K(x+p,y+p)=K(x,y).$$

$(\mathbf{X},+)$ XのPによる商であるトポロジカルグループです。私たちは定義します

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{X},\quad \mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y) \tag{4}$$

と $x\in\mathbf{x}$。$\lambda\in\mathbb{R}$。

- 継続的な機能がある場合 $u : X \to \mathbb{R}$ と

  $$\forall p\in P,\quad \forall x\in X,\quad u(x+p)=u(x)$$

  そして

  $$\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} = \lambda + u(x), \tag{5}$$

  次に、商関数 $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ uから推定されるのは連続的であり、

  $$\forall \mathbf{x}\in\mathbf{X},\quad \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- 逆に、 $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ は（6）の連続関数であり、周期Pの周期関数です。 $u : X \to \mathbb{R}$から差し引かれる $\mathbf{u}$ 継続的でチェックします（5）。

[6]はこの命題を証明します $X=\mathbb{R}$ そして $P=\mathbb{Z}$、[9] $X=\mathbb{R}^n$ そして $P=\mathbb{Z}^n$。

証拠。最初に、 $\mathbf{K}$ 明確に定義されています。

$$\forall x\in X,\quad \forall \mathbf{y}\in\mathbf{X},\quad \forall p\in P,\quad \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x+p,y) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y-p) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y).$$

残りの部分は、 $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ そして $x\in\mathbf{x}$、 我々は持っています

$$\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} = \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\inf_{y\in\mathbf{y}}\{K(x,y)+u(y)\} = \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\inf_{y\in\mathbf{y}}\{K(x,y)+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}$$
$$= \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}.$$

6.例

すべてのα ∈ ℝ 、 $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。と思う

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad K_0(x+1,y+1)=K_0(x,y) \tag{7}$$
$$K_\alpha(x,y)=K_0(x,y)-\alpha(x-y). \tag{8}$$

私たちは定義します

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \lambda_\alpha=\inf_{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\liminf_{n\to+\infty}\frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ コンパクトです。定理2と命題5によると λ_α は、期間1の周期関数がある唯一の実数です。 $u_\alpha\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ と

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \inf_{y\in\mathbb{R}}\{K_\alpha(x,y)+u_\alpha(y)\}=\lambda_\alpha+u_\alpha(x). \tag{9}$$

命題2によれば、 $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$凹関数です。したがって、右側に派生物があります $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ すべてのα、および $\alpha\mapsto\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ 減少関数です。

フレンケルモデルとコントロバモデル

我々が選択しました $L\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。とする

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad L(x+1,y+1)=L(x,y).$$

私たちは定義します

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \forall x,y\in\mathbb{R},\quad K_\alpha(x,y)=L(x,y)-\alpha(x-y).$$

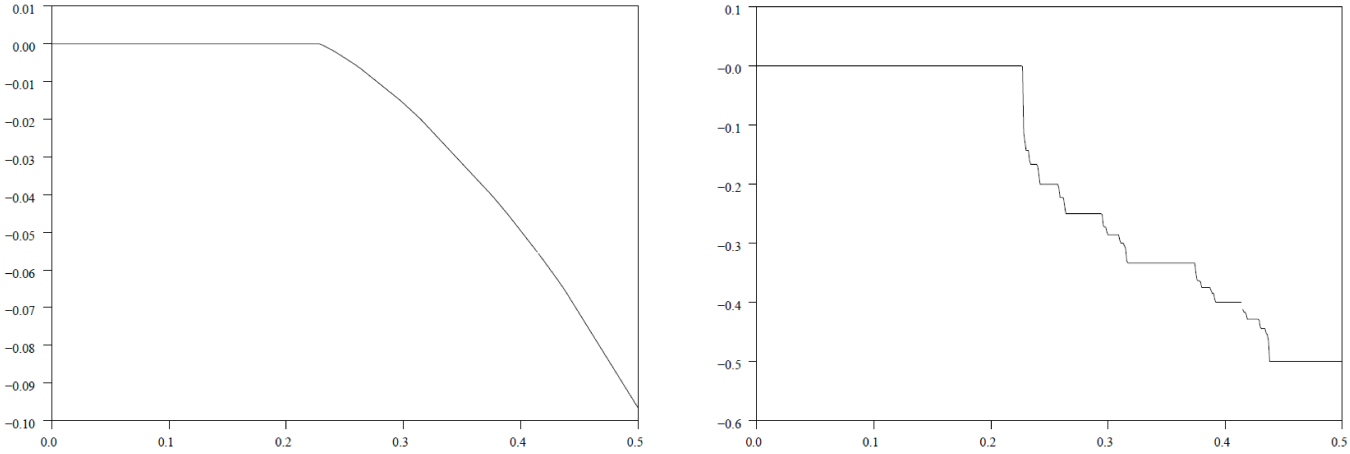
仮定（7）および（8）が検証されます。特別なケースは $V\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 期間1の周期的であり、

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad L(x,y)=V(x)+\frac{(y-x)^2}{2}\,.$$

図1は、 λ_α αに関して $V(x)=C[1-\cos(2\pi x)]$ 別のパラメータで C 。フレンケルとコントロバは1938年にこの例を提案しました。 $C=(4/3)/(2\pi)^2$。私たちは取る $\{0,1/p,2/p,\ldots,(p-1)/p\}$ 離散化する $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。我々は持っています

$$\forall\alpha\in[0,1/2],\quad \forall x,y\in[0,1],\quad \inf_{p\in\mathbb{Z}}K_\alpha(x,y+p)=V(x)+\inf_{p\in\{-1,0,1\}}\left\{\frac{(y-x+p)^2}{2}-\alpha(x-y-p)\right\}.$$

図（a）は、 $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$。図（b）は、 $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ αの連続関数でもありますが、「悪魔の階段」として機能します。これがオーブリーの結果[1,2]とグリフィスの発言[13]から推定できるかどうかについては疑問が残る。



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

図1.フレンケルとコントロバモデルの最小エネルギー。

ハミルトン・ヤコビ方程式の均質化

我々が選択しました $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$。とする

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, v) = L(x, v).$$

私たちは定義します

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x,y) &= \inf\left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds\,;\ \xi \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ \xi(0) = y,\ \xi(1) = x \right\}, \\ K_\alpha(x,y) &= K_0(x,y) - \alpha(x-y) \end{aligned} \tag{10}$$

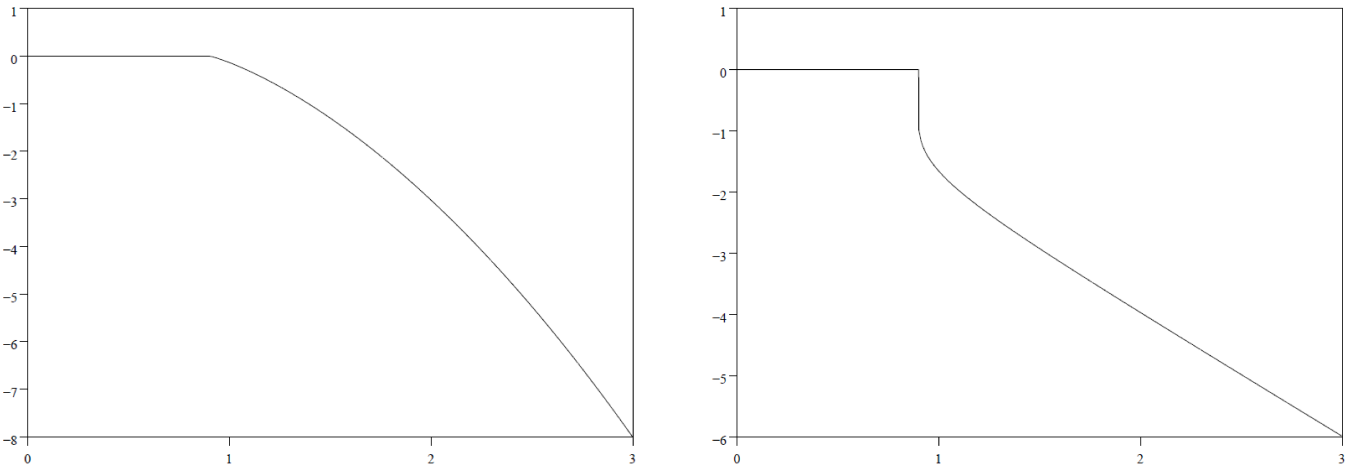
仮定（7）および（8）が検証されます。この状況の特殊なケースは、 $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 期間1の周期的であり、

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x,v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

この状況では、固有値のほとんど明示的な式があります λ_α （たとえば[9]を参照）、つまり

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\, |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \lambda]}\, dx & \forall\, |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx. \end{cases}$$

図2は、 λ_α αに関して $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$。図1との類似点と相違点に注意してください。このような2つの近いモデルの動作が非常に異なるのは奇妙です。



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

図2.アイコナール方程式の有効ハミルトニアン。

場合 $L(x,v)$ はvに関して凸であり、[9]は、関数（10）の固有値問題（9）がセルの問題と同等であることを示しています。

$$H\left(x,\alpha+\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)=\bar{H}(\alpha),$$

と $\bar{H}(\alpha)=-\lambda_\alpha$ そして

$$\forall x,p\in\mathbb{R},\quad H(x,p)=\sup_{v\in\mathbb{R}}\{p\cdot v-L(x,v)\}.$$

細胞に関するこの問題は、均質化が原因であることに注意してください。 $\varepsilon\to 0$ 方程式の

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+H\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\right)=0.$$

[11]は、オーブリーとマザーの理論とハミルトンとヤコビの方程式の間の他のリンクを公開しています。また、カーネル（10）の計算はすでに困難であるため、フレンケルとコントロバのモデルではかなり簡単な数値法は、ハミルトン方程式とヤコビ方程式の場合に簡単に適応できません。場合によっては、（10）のオイラーおよびラグランジュ方程式にリンクされた境界問題を解決するソフトウェアを使用できます。これは他の場所で研究する必要があります。

収束速度

フレンケルとコントロバのモデルに戻りましょう。[6]のように、期間1の周期関数を部分ごとに放物線状に選択し、 $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$、

$$V(x)=\begin{cases}\frac{c}{2}\,x^2 & -1/4\le x\le 1/4,\\ \frac{c}{16}-\frac{c}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 & 1/4\le x\le 3/4\end{cases}$$

と $c\ge 0$。を使用しております $\{0,1/p,2/p,\dots,(p-1)/p\}$ 離散化のため。命題3によれば $h_p=1/p$、 我々は持っています

$$\log_{10}(\lambda_p-\lambda)\le\log_{10}(\kappa)-\log_{10}(p).$$

κは関数のリプシッツ定数 $\mathbf{K}$ （4）で定義。とする $c=4/3$ そして $\alpha=13/32$。次に、[6]に示されているように、λが明示的に計算されます。 $\lambda=-\frac{265}{2048}$。図3は $\log_{10}(\lambda_p-\lambda)$ の面では $-\log_{10}(p)$。Kの特定のプロパティのため、関数の勾配は2に近いようです。これは、誤差が2次であることを示唆しています。ただし、収束速度が線形のみであるmin-plus固有値問題の例を構築できます。収束が二次であるためには、カーネルで十分な仮説を見つける必要があります。

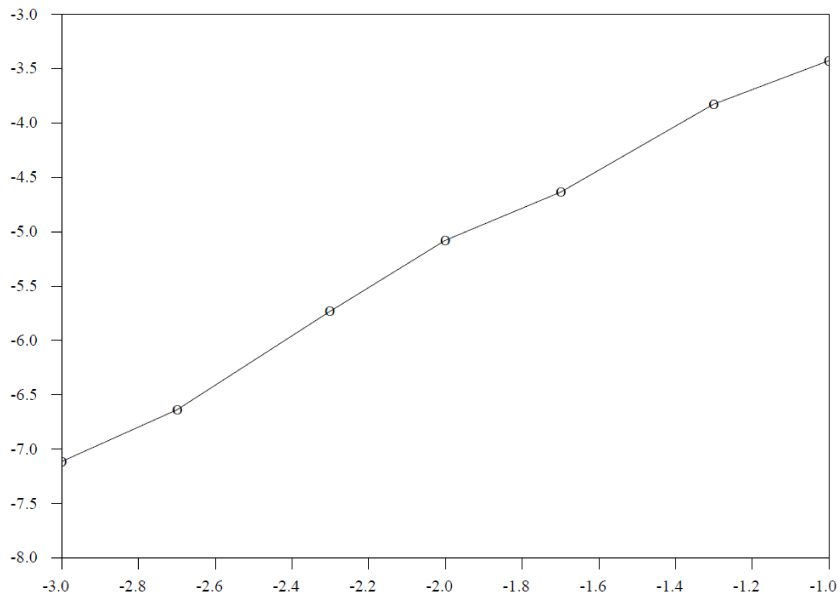


図3.収束。 $\log_{10}(\lambda_p-\lambda)$ の面では $-\log_{10}(p)$。

ありがとう

著者は、偏微分方程式の粘度法に関する刺激的なワークショップをしてくれたLin Yi-Jiunとブリティッシュコロンビア大学に感謝します。

参考文献

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer − Verlag, Berlin (1978) 264 − 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel − Kontorova model and the devil′s staircase. Physica D 7 (1983) 240 − 258.
3. N. Bacaër, Min − plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 − 736.
4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max − plus toolbox to solve eikonal equations? In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 − 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one − dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 − 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 − 498.
8. J. Cochet − Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max − plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton − Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 − 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR − Izv. 38 (1992) 91 − 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 − 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel − Kontorova models of commensurate − incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd., North − Holland, Amsterdam (1990) 69 − 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays − Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The ‘‘hump ” effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 − 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 − 150.