Convergenza di metodi numerici e dipendenza da un parametro di problemi di autovalori min-plus: modelli di Frenkel-Kontorova e omogeneizzazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

riassunto

Usiamo la versione min-plus della formula del raggio spettrale per dimostrare che l'autovalore unico di un problema di autovalore min-plus dipende continuamente dai parametri. Dimostriamo anche che il metodo numerico introdotto da Chou e Griffiths per calcolare questo autovalore converge. Una cassetta degli attrezzi recentemente sviluppata da INRIA illustra questi risultati. Usiamo i modelli Frenkel-Kontorova come esempio. Insistiamo anche sull'analogia con l'omogeneizzazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi.

Parole chiave: problemi di autovalori min-plus; analisi numerica; Modello di Frenkel-Kontorova; Equazioni di Hamilton-Jacobi

introduzione

Alcuni problemi di ottimizzazione possono essere formulati utilizzando il semi-ring

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

in modo che appaiano come analoghi dei problemi classici degli autovalori. Per esempio,

$$\min_{1 \le j \le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \le j \le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

assomigliare, così come

$$\min_{a \le y \le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

Queste analogie sono state usate per sviluppare una teoria spettrale delle matrici [5] e degli operatori integrali [14] su questo semi-anello. [6] ha usato un metodo numerico per risolvere "problemi integrali" di autovalori min-plus e quindi disegnare diagrammi di fase per i modelli di Frenkel-Kontorova. L'obiettivo principale qui è dimostrare la convergenza di questo metodo.

La sezione 1, ispirata a [12], ricorda come formalizzare le analogie con l'introduzione di alcune definizioni generali. La sezione 2 richiama i principali teoremi della teoria spettrale su $\mathbb{R}_{\min}$. La sezione 3 mostra che l'autovalore λ dipende continuamente sui parametri coinvolti nella funzione *K* . La sezione 4 dimostra la convergenza dell'approssimazione numerica dei problemi di autovalori su $\mathbb{R}_{\min}$. Le prove delle sezioni 3 e 4 sono facilmente deducibili da una sorta di formula del raggio spettrale presentata nella sezione 2. La sezione 5 tratta il caso delle funzioni periodiche. La sezione 6 illustra i risultati precedenti in due contesti: i modelli di Frenkel-Kontorova nella fisica dello stato solido e l'omogeneizzazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi.

Si noti che i problemi di autovalori parametrici per le equazioni di Hamilton-Jacobi, che sono equivalenti a problemi di autovalori min-plus, compaiono anche nello studio delle onde mobili per la propulsione a propellente solido [3,15] . Questa applicazione è stata la motivazione iniziale per il nostro studio. Ma poiché i dettagli tecnici sono più complicati, li spiegheremo altrove.

Si noti inoltre che l'analisi numerica di altri problemi lineari min-plus non è sempre così semplice come quella dei problemi di autovalori presentati qui (vedere [4] per una discussione).

1. Algebra lineare generalizzata

Definizione . $\mathcal{R}$ è un set con una legge sulla composizione interna $+$. $(\mathcal{R}, +)$ è un semi-gruppo se + è associativo e ha un elemento neutro. $(\mathcal{R}, +)$ è un semi-gruppo commutativo se + è anche commutativo.

Definizione . $\mathcal{R}$ è un set con due leggi di composizione interna + e ×. $(\mathcal{R}, +, \times)$ è un semi-ring se

- $(\mathcal{R}, +)$ è un semi-gruppo commutativo il cui elemento neutro è 0,
- $(\mathcal{R}, \times)$ è un semi-gruppo il cui elemento neutro è 1,
- × è distributivo rispetto a +,

- $\forall \lambda \in \mathcal{R}, 0 \times \lambda = \lambda \times 0 = 0.$

Esempi .

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ e $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ sono semi-anelli.
- Con $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ è un semianello con elementi neutri $+\infty$ e 0.

Definizione . $(\mathcal{R}, +, \times)$ è un semi-ring e $(X, +)$ un semi-gruppo commutativo. Supponiamo che $\forall \lambda \in \mathcal{R},\ \forall x \in X, \lambda \cdot x \in X$. Lo diciamo $(X, +, \cdot)$ è un semi-modulo acceso $(\mathcal{R}, +, \times)$ Se $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}, \forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,, \\
&(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \\
&\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\
&1 \cdot x = x.
\end{aligned}$$

Diciamo che *Y* è un semimodulo di *X* se *Y* è un semimodulo e $Y \subset X$.

Esempio . Lascia che *X sia* un set e $(\mathcal{R}, +, \times)$ un semi-anello.

$$\forall f, g \in \mathcal{R}^X, \quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X, +, \cdot)$ è quindi un semi-modulo acceso $\mathcal{R}$.

Esempio . Lascia che *X sia* un set e $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ tutte le funzioni $X \to \mathbb{R}_{\min}$ che sono delimitati di seguito. $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ è un sotto-semimodulo di $(\mathbb{R}_{\min}^X, \min, +)$.

Definizione . $(\mathcal{R}, +, \times)$ è un semi-anello. $(X, +, \cdot)$ e $(Y, +, \cdot)$ sono due semi-moduli e $L : X \to Y$. Diciamo che *L* è un operatore lineare se $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}, \forall x, y \in X, L(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot L(x) + \mu \cdot L(y)$.

Esempio . Lascia che *X sia* un set e $K : X^2 \to \mathbb{R}_{\min}$ una funzione limitata sotto. $\mathcal{K}$ è l'applicazione di $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ in se stesso $u \mapsto \mathcal{K}u$ con

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ è un operatore lineare.

Definizione . $(\mathcal{R}, +, \times)$ è un semi-anello, $(X, +, \cdot)$ un semi-modulo acceso $\mathcal{R}$, $L : X \to X$ un operatore lineare e $\lambda \in \mathbb{R}$. Diciamo che λ è un autovalore di *L* se $\exists x \in X,\ x \neq 0,\ L(x) = \lambda \cdot x$. In questo caso, diciamo che *x* è un autovettore associato a λ.

Esempio . Stesse notazioni dell'esempio precedente. $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ è un autovalore di $\mathcal{K}$ se esiste $u \in B(X, \mathbb{R}_{\min})$ con *u* non identicamente + ∞ e

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \tag{1}$$

2. Teoria spettrale su $\mathbb{R}_{\min}$

Teorema 1 . *Lascia che X sia un set e* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata di seguito. Supponiamo che ci sia* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e una funzione limitata sotto* $u : X \to \mathbb{R}$ *con (1). Abbiamo quindi*

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}\,. \tag{2}$$

Questa formula è l'analogo per $\mathbb{R}_{\min}$ della formula del raggio spettrale. [6] non lo specifica $X = [0, 1]$. [16] lo dà solo per un set *X* che è finito. In questo caso, la formula (3) di seguito è più interessante. Per un'interpretazione della formula in termini di raggio spettrale in una semi-algebra normalizzata, vedere [3].

Prova. Noi scegliamo $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Abbiamo quindi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1}, y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Aggiungiamo le prime *n* equazioni. Otteniamo

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0, x_1) + \cdot + K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Dal momento che *u* è limitato, dividi per *n* e prendi $n \to +\infty$. Otteniamo

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}\,.$$

(x_n) era arbitrario. Quindi abbiamo

$$\lambda \leq \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, lascia ε> 0 e $y_0 \in X$. Possiamo costruire per successione una sequenza $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ con

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1},y_n)+u(y_n) \leq \inf_{x\in X}\{K(y_{n-1},x)+u(x)\}+\varepsilon = \lambda + u(y_{n-1})+\varepsilon.$$

Aggiungiamo le prime *n* equazioni e dividiamo per *n* . Otteniamo

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

Con $n \to +\infty$, otteniamo

$$\begin{aligned}\lambda &\geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon.\end{aligned}$$

Teorema 2 . *Lascia che sia uno spazio metrico compatto* (X,d) *e* $K \in C^0(X^2,\mathbb{R})$. *C'è un unico* $\lambda \in \mathbb{R}$ *per cui esiste* $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ *con (1).*

È un analogo per $\mathbb{R}_{\min}$ del teorema di Krein e Rutman. [5] fornisce una prova per un set *X* che è finito. [7] fornisce prove per $X=[0,1]$ e osserva che sono possibili varie generalizzazioni. [9] estende le prove a $X=[0,1]^n$. [14] fornisce prove nel contesto generale e anche con ipotesi più deboli. Ma il metodo di prova di [14] è un po 'diverso da quello usato in [7,9] e meno chiaro. La prova che segue è una generalizzazione diretta di quella in [7,9].

Prova. $E = C^0(X,\mathbb{R})$. Definiamo $\|u\| = \sup_{x\in X}|u(x)|$ Se $u \in E$. Quindi *E* è uno spazio di Banach. Definiamo

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

$T(E)$ è un insieme equo continuo. In effetti, lascia ε> 0. Poiché *K* è uniformemente continuo,

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x,y,x',y' \in X, \quad \max\{d(x,x');d(y,y')\} \leq \alpha \;\Rightarrow\; |K(x,y)-K(x',y')| \leq \varepsilon.$$

Noi scegliamo $x,x' \in X$ con $d(x,x') \leq \alpha$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\forall u \in E, \quad (Tu)(x)-(Tu)(x') &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} \\ &\leq \inf_{y\in X}\{K(x',y)+\varepsilon+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Con x' invece di *x* , otteniamo $|(Tu)(x)-(Tu)(x')| \leq \varepsilon$.

Funzione $T : E \to E$, $u \mapsto Tu$ è continuo. Con $u,v \in E$,

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + 2\|v-u\|.\end{aligned}$$

Scambiamo i ruoli di *v* e *u* . Otteniamo $\|Tv-Tu\| \leq 2\|v-u\|$.

Definiamo

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C = \{u \in E;\ \forall x \in X,\ 0 \leq u(x) \leq K_+ - K_-\}.$$

abbiamo

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad 0 \leq (Tu)(x) \leq \inf_{y\in X}\{K_+ + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

Quindi abbiamo $T(E) \subset C$. In particolare, $T(C) \subset C$ e $T(C)$ è limitato. $T(E)$ è equo e continuo. $T(C)$ è quindi anche equicontinuo. $T(C)$è relativamente compatto in *E* secondo il teorema di Ascoli e Arzela. *C* è un sottoinsieme chiuso e convesso. Per una funzione continua di un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach con valori in un sottoinsieme compatto di *C* , esiste un punto fisso secondo il teorema di Schauder: $\exists u \in C,\ Tu = u$, che significa (1) con

$$\lambda = \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

L'unicità dell'autovalore λ risulta dal teorema 1.

3. Problemi che dipendono da un parametro

I problemi di autovalori min-plus che dipendono da un parametro non sembrano ancora essere stati studiati.

Proposta 1 . *Lascia che sia uno spazio metrico compatto (X, d), Ω uno spazio topologico e $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ una funzione continua di $\Omega \to (C^0(X^2, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. λ_α è l'unico numero reale associato a K_α secondo il Teorema 2. Abbiamo quindi: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ di $\Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.*

Prova. Noi scegliamo $\alpha \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. C'è un quartiere $\mathcal{V}$ di α con

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y \in X} |K_\alpha(x, y) - K_\beta(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n} - \varepsilon &\leq \frac{K_\beta(x_0, x_1) + \cdots + K_\beta(x_{n-1}, x_n)}{n} \\ &\leq \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Prendiamo il $\liminf_{n \to +\infty}$ di queste disuguaglianze, quindi l'infima su tutti $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Otteniamo dalla formula (2) che

$$\lambda_\alpha - \varepsilon \leq \lambda_\beta \leq \lambda_\alpha + \varepsilon.$$

Proposta 2 . *Lascia che sia uno spazio metrico compatto (X, d) e Ω un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale reale. $K_\alpha \in C^0(X^2, \mathbb{R})$ Se $\alpha \in \Omega$. Assumiamo $\forall x, y \in X$, $\alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ di $\Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione concava. λ_α è l'unico numero reale associato a K_α di Teorema 2. Abbiamo quindi: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ di $\Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione concava.*

[6] menziona questa proprietà per $X = [0, 1]$ e $\Omega = \mathbb{R}$.

Prova. Con $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Omega$, definiamo

$$S(\mathbf{x}, n, \alpha) = \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Noi scegliamo $t \in]0, 1[$ e $\alpha, \beta \in \Omega$. Abbiamo quindi

$$\forall \mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta) \geq t\, S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1 - t) S(\mathbf{x}, n, \beta)$$

a causa del presupposto della concavità. Con le proprietà di $\liminf$, otteniamo

$$\forall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta) \geq t \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1 - t) \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta).$$

Prendi l'informazione su tutto $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta) \\ &\qquad \geq t \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1 - t) \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta). \end{aligned}$$

Quindi secondo la formula (2), $\lambda_{t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta} \geq t\, \lambda_\alpha + (1 - t) \lambda_\beta$.

4. Metodi numerici

La seguente proposta dimostra la convergenza del metodo numerico usato da [6].

Proposta 3 . *Lascia che sia uno spazio metrico compatto (X, d). Lascia che sia una funzione lipschitziana $K : X^2 \to \mathbb{R}$*

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq \kappa \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Secondo il Teorema 2, sia λ l'unico numero reale per il quale $\exists\, u \in C^0(X, \mathbb{R})$ con (1). Sia una serie di sottoinsiemi finiti di X, $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$, con

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Secondo il Teorema 2,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y \in X_p} \{K(x, y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

Abbiamo quindi $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ *e* $\lambda_p \to \lambda$ *Se* $p \to +\infty$.

Questa proposizione è collegata al punto di vista dell'analisi non standard di [10], che considera valori infinitamente grandi di p .

Prova. Noi scegliamo $p \in \mathbb{N}$. Secondo (2),

$$\lambda = \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,,$$
$$\lambda_p = \inf_{(x_n)\in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

Da una parte, $X_p \subset X$, Quindi abbiamo $\lambda \leq \lambda_p$. D'altra parte, lascia ε> 0. Esiste $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ con

$$\lambda \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n} \leq \lambda+\varepsilon\,.$$

Per ipotesi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in X_p$, $d(x_n,y_n) \leq h_p$. Ma K è Lipschitz, quindi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|K(x_n,x_{n+1}) - K(y_n,y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$. In conclusione,

$$\begin{aligned}\lambda_p &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1)+\cdots+K(y_{n-1},y_n)}{n}\\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda+\varepsilon+\kappa\, h_p.\end{aligned}$$

Perché ε era arbitrario, otteniamo $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$.

Proposta 4 . *Lascia che sia un set con q elementi,* X_p. *Abbiamo quindi*

$$\lambda_p = \min_{1\leq n\leq q} \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in X_p^n} \frac{K(x_0,x_1)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)}{n}\,. \tag{3}$$

Prova. Vedi [5] per esempio.

λ_p è la "media ciclica minima". Questa media viene calcolata con un numero finito di operazioni. La prova è simile a quella di (2). Tuttavia, non è la formula (3) utilizzata nella pratica. Esistono algoritmi migliori, come l'algoritmo Karp che richiede $O(q^3)$ operazioni, o algoritmo di Howard che sembra essere il più veloce [8]. Si noti che nell'analisi numerica dei problemi di autovalori min-plus, le matrici coinvolte sono piene e molto grandi. Gli algoritmi così efficienti sono i benvenuti, specialmente quando il problema dipende da un parametro che possiamo variare come nelle prossime sezioni. L'algoritmo di Karp è molto facile da programmare, mentre quello di Howard è disponibile tramite la toolbox Maxplus di Scilab. Vedi www-rocq.inria.fr/scilab/ e www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html .

5. Funzioni periodiche

Proposta 5 . *Sia un gruppo topologico abeliano* $(X,+)$, *una funzione limitata di seguito* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *e P un sottogruppo di X . Assumiamo*

$$\forall p \in P,\ \forall (x,y) \in X^2,\ K(x+p,y+p) = K(x,y).$$

$(\mathbf{X},+)$ *è il gruppo topologico che è il quoziente di X da P . Definiamo*

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y) \tag{4}$$

con $x \in \mathbf{x}$. *Lascia* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Se abbiamo una funzione continua* $u : X \to \mathbb{R}$ *con*

  $$\forall p \in P, \quad \forall x \in X, \quad u(x+p) = u(x)$$

  e

  $$\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} = \lambda + u(x), \tag{5}$$

  quindi la funzione quoziente $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *dedotta da u è continua e*

  $$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- *Al contrario, se* $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua con (6), quindi la funzione periodica del periodo P ,* $u : X \to \mathbb{R}$, *dedotto da* $\mathbf{u}$ *è continuo e controlla (5).*

[6] dimostra questa proposta per $X = \mathbb{R}$ e $P = \mathbb{Z}$, [9] per $X = \mathbb{R}^n$ e $P = \mathbb{Z}^n$.

Prova. Innanzitutto, nota che $\mathbf{K}$ è ben definito, perché

$$\forall x \in X, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \forall p \in P, \quad \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x+p, y) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y-p) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y).$$

Il resto è facilmente deducibile dal fatto che se $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $x \in \mathbf{x}$, noi abbiamo

$$\begin{aligned} \inf_{y \in X}\{K(x,y) + u(y)\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}}\{K(x,y) + u(y)\} &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}}\{K(x,y) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\}. \end{aligned}$$

6. Esempi

Per tutti α ∈ ℝ , $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supponiamo che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad K_0(x+1, y+1) = K_0(x,y) \tag{7}$$

$$K_\alpha(x,y) = K_0(x,y) - \alpha(x-y). \tag{8}$$

Definiamo

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda_\alpha = \inf_{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è compatto. Secondo il Teorema 2 e la Proposta 5, λ_α è l'unico numero reale per il quale esiste una funzione periodica del periodo 1, $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}}\{K_\alpha(x,y) + u_\alpha(y)\} = \lambda_\alpha + u_\alpha(x). \tag{9}$$

Secondo la proposizione 2, $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$è una funzione concava. Quindi ha un derivato sul lato destro $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ per tutto α e $\alpha \mapsto \frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ è una funzione decrescente.

Modelli di Frenkel e Kontorova

Noi scegliamo $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Assumiamo

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, y+1) = L(x,y).$$

Definiamo

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_\alpha(x,y) = L(x,y) - \alpha(x-y).$$

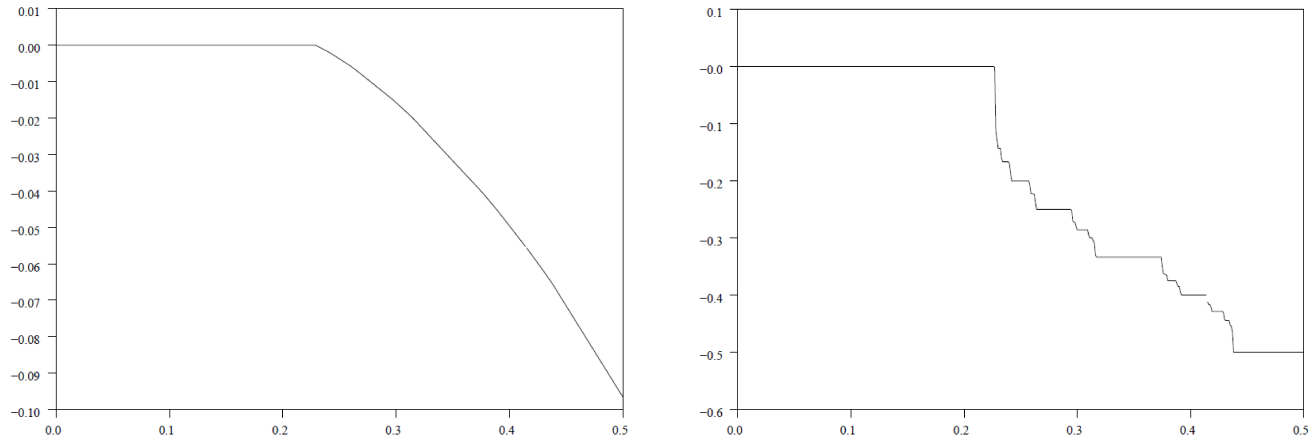
I presupposti (7) e (8) sono verificati. Un caso speciale è quello dove $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è periodico del periodo 1 e

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x,y) = V(x) + \frac{(y-x)^2}{2}.$$

La Figura 1 mostra la dipendenza di λ_α rispetto ad α if $V(x) = C[1 - \cos(2\pi x)]$ con un altro parametro C. Frenkel e Kontorova hanno proposto questo esempio nel 1938. Prendiamo $C = (4/3)/(2\pi)^2$. Prendiamo $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ discretizzare $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. abbiamo

$$\forall \alpha \in [0, 1/2], \quad \forall x, y \in [0,1], \quad \inf_{p \in \mathbb{Z}} K_\alpha(x, y+p) = V(x) + \inf_{p \in \{-1,0,1\}} \left\{ \frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x-y-p) \right\}.$$

La figura (a) illustra la continuità di $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$. La figura (b) suggerisce che $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ è anche una funzione continua di α, ma come una "scala del diavolo". Resta da dubitare che ciò possa essere dedotto dai risultati di Aubry [1,2] e dalle osservazioni di Griffith [13].



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Figura 1. L'energia minima del modello di Frenkel e Kontorova.

Omogeneizzazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi

Noi scegliamo $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Assumiamo

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, v) = L(x, v).$$

Definiamo

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x,y) &= \inf\left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds\,;\ \xi \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ \xi(0) = y,\ \xi(1) = x \right\}, \\ K_\alpha(x,y) &= K_0(x,y) - \alpha(x-y) \end{aligned} \tag{10}$$

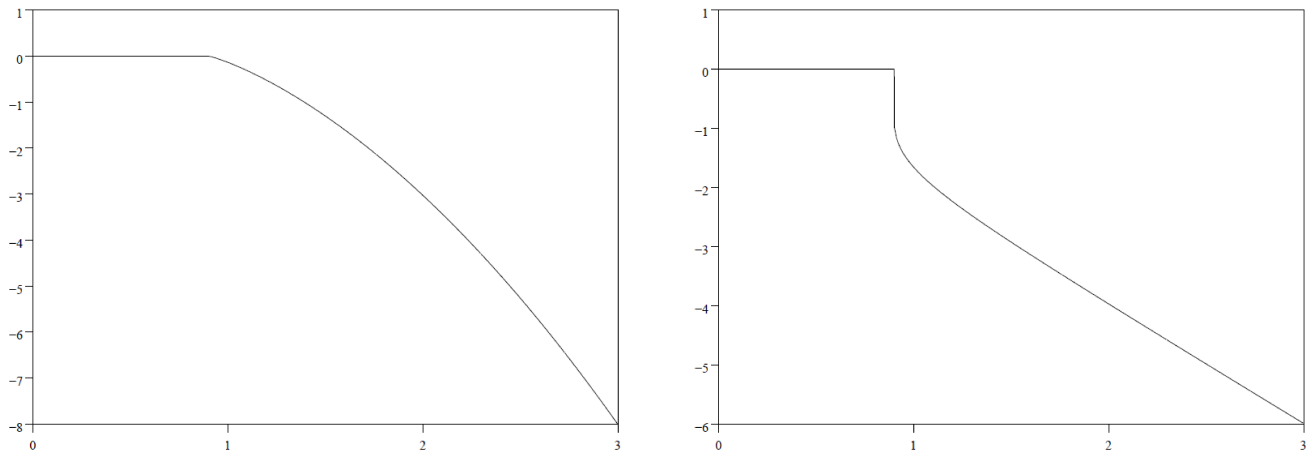
I presupposti (7) e (8) sono verificati. Un caso speciale di questa situazione è quello in cui $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è periodico del periodo 1 e

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x,v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

In questa situazione, esiste una formula quasi esplicita per l'autovalore λ_α (vedi [9] per esempio), vale a dire

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\, |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \lambda]}\, dx & \forall\, |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx. \end{cases}$$

La Figura 2 mostra la dipendenza di λ_α rispetto ad α if $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$. Nota le somiglianze e le differenze con la Figura 1. È strano che due modelli così vicini si comportino in modo così diverso.



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Figura 2. L'hamiltoniano efficace per l'equazione eikonale.

Nel caso in cui $L(x,v)$ è convesso rispetto a v , [9] mostra che il problema degli autovalori (9) con la funzione (10) è equivalente al problema per una cella

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

con $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ e

$$\forall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x,v)\}.$$

Ricordiamo che questo problema per una cellula deriva dall'omogeneizzazione quando $\varepsilon \to 0$ dell'equazione

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\right) = 0.$$

[11] espone altri legami tra la teoria di Aubry e Mather e le equazioni di Hamilton e Jacobi. Si noti inoltre che il metodo numerico, che è abbastanza facile per il modello di Frenkel e Kontorova, non è facile da adattare al caso delle equazioni di Hamilton e Jacobi perché il kernel (10) è già difficile da calcolare. In alcuni casi, si potrebbe usare un software che risolve i problemi di confine legati all'equazione di Eulero e Lagrange per (10). Questo deve essere studiato altrove.

La velocità della convergenza

Torniamo ai modelli di Frenkel e Kontorova. Come in [6], scegliamo la funzione periodica del periodo 1, parabolica per pezzi, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}\, x^2 & -1/4 \le x \le 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 1/4 \le x \le 3/4 \end{cases}$$

con $c \ge 0$. Noi usiamo $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ per discretizzazione. Secondo la proposizione 3 con $h_p = 1/p$, noi abbiamo

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \le \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p).$$

κ è la costante di lipschitz della funzione **K** definito da (4). Assumiamo $c = 4/3$ e $\alpha = 13/32$. Quindi λ viene calcolato esplicitamente, come indicato in [6], vale a dire $\lambda = -\frac{265}{2048}$. La figura 3 mostra $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ in termini di $-\log_{10}(p)$. A causa delle proprietà specifiche di K, la pendenza della funzione sembra essere vicina a 2, il che suggerisce che l'errore è quadratico. Tuttavia, possiamo costruire esempi di problemi di autovalori min-plus per i quali la velocità di convergenza è solo lineare. Resta da trovare sufficienti ipotesi sul kernel affinché la convergenza sia quadratica.

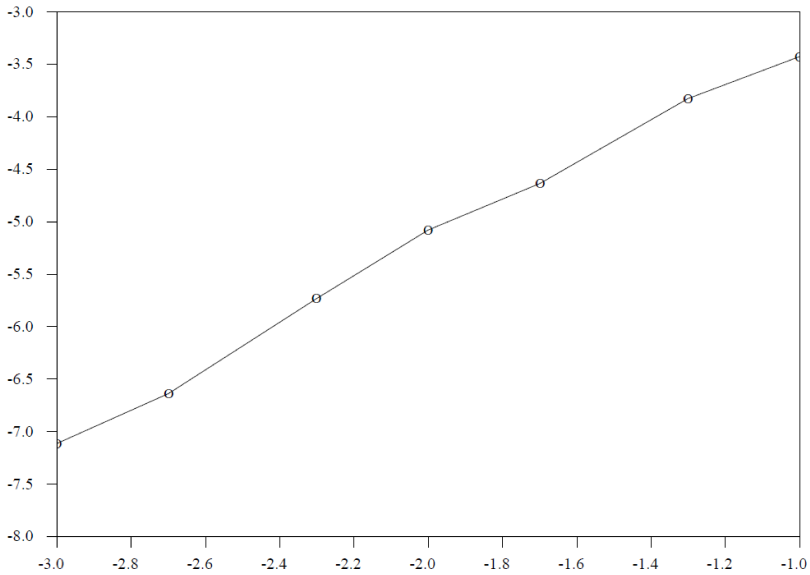


Figura 3. Convergenza. $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ in termini di $-\log_{10}(p)$.

Grazie

L'autore ringrazia Lin Yi-Jiun e l'Università della Columbia Britannica per l'officina stimolante sui metodi di viscosità per equazioni differenziali parziali.

Riferimenti bibliografici

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil's staircase. Physica D 7 (1983) 240 – 258.
3. N. Bacaër, Min – plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.

4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max − plus toolbox to solve eikonal equations?
In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 − 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one − dimensional systems using effective potentials.
Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 − 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming.
Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 − 498.
8. J. Cochet − Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat,
Numerical computation of spectral elements in max − plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton − Jacobi equations :
additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 − 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation.
Math. USSR − Izv. 38 (1992) 91 − 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I.
Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 − 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science.
Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel − Kontorova models of commensurate − incommensurate phase transitions,
in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd. ,
North − Holland, Amsterdam (1990) 69 − 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications.
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays − Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The "hump " effect in solid propellant combustion.
Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 − 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems,
in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications,
W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 − 150.