Convergencia de métodos numéricos y dependencia de un parámetro de problemas de valor propio min-plus: modelos de Frenkel-Kontorova y homogeneización de ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 − 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

resumen

Usamos la versión min-plus de la fórmula del radio espectral para demostrar que el valor propio único de un problema de valor propio min-plus depende continuamente de los parámetros. También demostramos que el método numérico introducido por Chou y Griffiths para calcular este valor propio converge. Una caja de herramientas desarrollada recientemente por INRIA ilustra estos resultados. Utilizamos los modelos Frenkel-Kontorova como ejemplo. También insistimos en la analogía con la homogeneización de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

Palabras clave: problemas de valor propio min-plus; análisis numérico; Modelo Frenkel-Kontorova; Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Introducción

Algunos problemas de optimización pueden formularse usando el semi-anillo

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

para que aparezcan como análogos de los problemas clásicos del valor propio. Por ejemplo,

$$\min_{1\le j\le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1\le j\le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

se parecen, así como

$$\min_{a\le y\le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

Estas analogías se han utilizado para desarrollar una teoría espectral de matrices [5] y operadores integrales [14] en este semianillo. [6] utilizó un método numérico para resolver "problemas integrales" del valor propio min-plus y así dibujar diagramas de fase para los modelos de Frenkel-Kontorova. El objetivo principal aquí es demostrar la convergencia de este método.

La Sección 1, inspirada en [12], recuerda cómo formalizar las analogías con la introducción de algunas definiciones generales. La sección 2 recuerda los principales teoremas de la teoría espectral sobre $\mathbb{R}_{\min}$. La sección 3 muestra que el valor propio λ depende continuamente en los parámetros que intervienen en la función K . La sección 4 demuestra la convergencia de la aproximación numérica de los problemas de valor propio en $\mathbb{R}_{\min}$. Las pruebas de las secciones 3 y 4 se deducen fácilmente de un tipo de fórmula de radio espectral presentada en la sección 2. La sección 5 trata el caso de las funciones periódicas. La sección 6 ilustra los resultados anteriores en dos contextos: los modelos de Frenkel-Kontorova en física de estado sólido y la homogeneización de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

Tenga en cuenta que los problemas de valores propios paramétricos para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, que son equivalentes a los problemas de valores propios min-plus, también aparecen en el estudio de ondas viajeras para propulsión de propulsores sólidos [3,15] . Esta aplicación fue la motivación inicial para nuestro estudio. Pero como los detalles técnicos son más complicados, los explicaremos en otra parte.

Tenga en cuenta también que el análisis numérico de otros problemas lineales min-plus no siempre es tan simple como el de los problemas de valores propios presentados aquí (ver [4] para una discusión).

1. Álgebra lineal generalizada

Definición . $\mathcal{R}$ es un conjunto con una ley de composición interna $+$. $(\mathcal{R}, +)$ es un semi-grupo si + es asociativo y tiene un elemento neutral. $(\mathcal{R}, +)$ es un semi-grupo conmutativo si + también es conmutativo.

Definición . $\mathcal{R}$ es un conjunto con dos leyes de composición interna + y ×. $(\mathcal{R}, +, \times)$ es un semi-anillo si

- $(\mathcal{R}, +)$ es un semi-grupo conmutativo cuyo elemento neutral es 0,
- $(\mathcal{R}, \times)$ es un semi-grupo cuyo elemento neutral es 1,
- × es distributivo con respecto a +,
- $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $0 \times \lambda = \lambda \times 0 = 0$.

Ejemplos .

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ y $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ Son semi-anillos.
- Con $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ es un semi-anillo con elementos neutros $+\infty$ y 0.

Definición . $(\mathcal{R}, +, \times)$ es un semi-anillo y $(X, +)$ Un semi-grupo conmutativo. Suponemos que $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $\forall x \in X$, $\lambda \cdot x \in X$. Dicen que $(X, +, \cdot)$ es un semi-módulo en $(\mathcal{R}, +, \times)$ Si $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,, \\
&(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \\
&\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\
&1 \cdot x = x.
\end{aligned}$$

Decimos que Y es un submódulo de X si Y es un semi-módulo y $Y \subset X$.

Ejemplo . Deje X *ser* un conjunto y $(\mathcal{R}, +, \times)$ Un semi-anillo.

$$\forall f, g \in \mathcal{R}^X, \quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X, +, \cdot)$ es entonces un semi-módulo en $\mathcal{R}$.

Ejemplo . Deje *X ser* un conjunto y $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ todas las funciones $X \to \mathbb{R}_{\min}$ que están delimitados a continuación. $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ es un submódulo de $(\mathbb{R}_{\min}^X, \min, +)$.

Definición . $(\mathcal{R}, +, \times)$ Es un semi-anillo. $(X, +, \cdot)$ y $(Y, +, \cdot)$ son dos semi-módulos y $L : X \to Y$. Decimos que *L* es un operador lineal si $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$, $L(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot L(x) + \mu \cdot L(y)$.

Ejemplo . Deje *X ser* un conjunto y $K : X^2 \to \mathbb{R}_{\min}$ una función limitada a continuación. $\mathcal{K}$ es la aplicación de $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ en si mismo $u \mapsto \mathcal{K}u$ con

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ Es un operador lineal.

Definición . $(\mathcal{R}, +, \times)$ es un semi-anillo, $(X, +, \cdot)$ un semi-módulo en $\mathcal{R}$, $L : X \to X$ un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{R}$. Decimos que λ es un valor propio de *L* si $\exists x \in X,\ x \neq 0,\ L(x) = \lambda \cdot x$. En este caso, decimos que *x* es un vector propio asociado con λ.

Ejemplo . Las mismas anotaciones que en el ejemplo anterior. $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ es un valor propio de $\mathcal{K}$ si existiera $u \in B(X, \mathbb{R}_{\min})$ con *u* no idénticamente + ∞ y

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \tag{1}$$

2. Teoría espectral sobre $\mathbb{R}_{\min}$

Teorema 1 . *Deje X ser un conjunto y $K : X^2 \to \mathbb{R}$ una función que está limitada a continuación. Supongamos que hay $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función limitada a continuación $u : X \to \mathbb{R}$ con (1). Tenemos entonces*

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \tag{2}$$

Esta fórmula es el análogo de $\mathbb{R}_{\min}$ de la fórmula del radio espectral. [6] da no especificado para $X = [0, 1]$. [16] da solo para un conjunto *X* que es finito. En este caso, la fórmula (3) a continuación es más interesante. Para una interpretación de la fórmula en términos de radio espectral en un semi-álgebra normalizada, ver [3].

Evidencia. Nosotros elegimos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Tenemos entonces

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1}, y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Agreguemos las primeras *n* ecuaciones. Obtenemos

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0, x_1) + \cdot + K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Como *u* está acotado, divida por *n* y tome $n \to +\infty$. Obtenemos

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

(x_n) Fue arbitrario. Entonces tenemos

$$\lambda \leq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Para probar la desigualdad opuesta, dejemos ε> 0 y $y_0 \in X$. Podemos construir sucesivamente una secuencia $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ con

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1}, y_n) + u(y_n) \leq \inf_{x \in X} \{K(y_{n-1}, x) + u(x)\} + \varepsilon = \lambda + u(y_{n-1}) + \varepsilon.$$

Agreguemos las primeras *n* ecuaciones y dividamos entre *n* . Obtenemos

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

Con $n \to +\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema 2 . *Dejar ser un espacio métrico compacto (X, d) y $K \in C^0(X^2, \mathbb{R})$. Hay un único $\lambda \in \mathbb{R}$ para lo cual existe $u \in C^0(X, \mathbb{R})$ con (1).*

Es un análogo para $\mathbb{R}_{\min}$ del teorema de Krein y Rutman. [5] da una prueba de un conjunto *X* que es finito. [7] da evidencia de $X = [0, 1]$ y señala que son posibles varias generalizaciones. [9] extiende la evidencia a $X = [0, 1]^n$. [14] da pruebas en el contexto general e incluso con hipótesis más débiles. Pero el método de prueba de [14] es un poco diferente del utilizado en [7,9] y menos claro. La prueba a continuación es una generalización directa de eso en [7,9].

Evidencia. $E = C^0(X, \mathbb{R})$. Definimos $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$ Si $u \in E$. Entonces *E* es un espacio de Banach. Definimos

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z, y) + u(y)\}.$$

$T(E)$ Es un conjunto equicontinuo. De hecho, sea ε> 0. Como *K* es uniformemente continuo,

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x, y, x', y' \in X, \quad \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \leq \alpha \ \Rightarrow\ |K(x, y) - K(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Nosotros elegimos $x, x' \in X$ con $d(x, x') \leq \alpha$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \forall u \in E, \quad (Tu)(x) - (Tu)(x') &= \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} - \inf_{y \in X} \{K(x', y) + u(y)\} \\ &\leq \inf_{y \in X} \{K(x', y) + \varepsilon + u(y)\} - \inf_{y \in X} \{K(x', y) + u(y)\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Con x' en lugar de x , obtenemos $|(Tu)(x) - (Tu)(x')| \leq \varepsilon$.

La funcion $T : E \to E$, $u \mapsto Tu$ es continuo Con $u, v \in E$,

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y) - u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y) - u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + 2\|v - u\|.\end{aligned}$$

Cambiemos los roles de *v* y *u* . Obtenemos $\|Tv - Tu\| \leq 2\|v - u\|$.

Definimos

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C = \{u \in E;\ \forall x \in X,\ 0 \leq u(x) \leq K_+ - K_-\}.$$

Se tiene

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad 0 \leq (Tu)(x) \leq \inf_{y\in X}\{K_+ + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

Entonces tenemos $T(E) \subset C$. En particular, $T(C) \subset C$ y $T(C)$ está ligado. $T(E)$ es equicontinuo $T(C)$ es por lo tanto también equicontinuo. $T(C)$es relativamente compacto en *E* según el teorema de Ascoli y Arzela. *C* es un subconjunto cerrado y convexo. Para una función continua de un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach con valores en un subconjunto compacto de *C* , hay un punto fijo de acuerdo con el teorema de Schauder: $\exists u \in C,\ Tu = u$, lo que significa (1) con

$$\lambda = \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y) + u(y)\}.$$

La unicidad del valor propio λ resulta del teorema 1.

3. Problemas que dependen de un parámetro.

Los problemas de valor propio min-plus que dependen de un parámetro no parecen haber sido estudiados todavía.

Proposición 1 . *Dejar ser un espacio métrico compacto (X, d), Ω un espacio topológico y $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ una función continua de $\Omega \to (C^0(X^2, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. λ_α es el único número real asociado con K_α según el teorema 2. Entonces tenemos: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de $\Omega \to \mathbb{R}$ Es una función continua.*

Evidencia. Nosotros elegimos $\alpha \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Hay un barrio $\mathcal{V}$ de α con

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y\in X} |K_\alpha(x,y) - K_\beta(x,y)| \leq \varepsilon.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_\alpha(x_0,x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon &\leq \frac{K_\beta(x_0,x_1) + \cdots + K_\beta(x_{n-1},x_n)}{n} \\ &\leq \frac{K_\alpha(x_0,x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Tomemos el $\liminf_{n\to+\infty}$ de estas desigualdades, entonces el infimum en todos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Obtenemos de la fórmula (2) que

$$\lambda_\alpha - \varepsilon \leq \lambda_\beta \leq \lambda_\alpha + \varepsilon.$$

Proposición 2 . *Dejar ser un espacio métrico compacto (X, d) y Ω un subconjunto convexo de un espacio vectorial real. $K_\alpha \in C^0(X^2, \mathbb{R})$ Si $\alpha \in \Omega$. Asumimos $\forall x, y \in X$, $\alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ de $\Omega \to \mathbb{R}$ Es una función cóncava. λ_α es el único número real asociado con K_α por el teorema 2. Luego tenemos: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de $\Omega \to \mathbb{R}$ Es una función cóncava.*

[6] menciona esta propiedad para $X = [0, 1]$ y $\Omega = \mathbb{R}$.

Evidencia. Con $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $\alpha \in \Omega$, definimos

$$S(\mathbf{x}, n, \alpha) = \frac{K_\alpha(x_0,x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

Nosotros elegimos $t \in]0, 1[$ y $\alpha, \beta \in \Omega$. Tenemos entonces

$$\forall \mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x}, n, t\cdot\alpha + (1-t)\cdot\beta) \geq t\, S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t) S(\mathbf{x}, n, \beta)$$

por el supuesto de concavidad. Con las propiedades de $\liminf$, obtenemos

$$\forall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x}, n, t\cdot\alpha + (1-t)\cdot\beta) \geq t\ \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t)\ \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta).$$

Toma el infimum en todos $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x}, n, t\cdot\alpha + (1-t)\cdot\beta) \\ &\quad \geq t\ \inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1-t)\ \inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta).\end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo con la fórmula (2), $\lambda_{t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta} \geq t\,\lambda_\alpha + (1-t)\lambda_\beta$.

4. Métodos numéricos.

La siguiente proposición prueba la convergencia del método numérico utilizado por [6].

Proposición 3 . *Dejar ser un espacio métrico compacto* (X,d)*. Dejar ser una función de lipchitzia* $K : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x,y) - K(x',y')| \leq \kappa \max\{d(x,x'); d(y,y')\}.$$

Según el teorema 2, deje que λ *sea el único número real para el cual* $\exists\, u \in C^0(X, \mathbb{R})$ *con (1). Sea una serie de subconjuntos finitos de* X *,* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *, con*

$$h_p = \sup_{x\in X} \min_{y\in X_p} d(x,y) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Según el teorema 2,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y\in X_p}\{K(x,y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

Tenemos entonces $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ *y* $\lambda_p \to \lambda$ *Si* $p \to +\infty$*.*

Esta proposición está relacionada con el punto de vista del análisis no estándar de [10], que considera valores infinitamente grandes de p .

Evidencia. Nosotros elegimos $p \in \mathbb{N}$. De acuerdo con (2),

$$\lambda = \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n},$$
$$\lambda_p = \inf_{(x_n)\in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

De un lado, $X_p \subset X$, Entonces tenemos $\lambda \leq \lambda_p$. Por otro lado, sea ε> 0. Existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ con

$$\lambda \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon\,.$$

Por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in X_p$, $d(x_n, y_n) \leq h_p$. Pero K es Lipschitz, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $|K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$. En conclusión,

$$\begin{aligned}\lambda_p &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0,y_1) + \cdots + K(y_{n-1},y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda + \varepsilon + \kappa\, h_p.\end{aligned}$$

Como ε fue arbitrario, obtenemos $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$.

Proposición 4 . *Dejado ser un conjunto con q elementos,* X_p*. Tenemos entonces*

$$\lambda_p = \min_{1\leq n\leq q} \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in X_p^n} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}. \tag{3}$$

Evidencia. Ver [5] por ejemplo.

λ_p es el "promedio cíclico mínimo". Este promedio se calcula con un número finito de operaciones. La prueba es similar a la de (2). Sin embargo, no es la fórmula (3) la que se usa en la práctica. Hay mejores algoritmos, como el algoritmo de Karp que requiere $O(q^3)$ operaciones, o el algoritmo de Howard que parece ser el más rápido [8]. Tenga en cuenta que en el análisis numérico de los problemas de valor propio min-plus, las matrices involucradas son completas y muy grandes. Por lo tanto, los algoritmos eficientes son bienvenidos, especialmente cuando el problema depende de un parámetro que variamos como en las siguientes secciones. El algoritmo de Karp es muy fácil de programar, mientras que Howard está disponible a través de la caja de herramientas Maxplus de Scilab. Ver www-rocq.inria.fr/scilab/ y www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html .

5. Funciones periódicas

Proposición 5 . *Dejar ser un grupo topológico abeliano* $(X,+)$*, una función delimitada a continuación* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *y P un subgrupo de X . Asumimos*

$$\forall p \in P,\ \forall (x,y) \in X^2,\ K(x+p, y+p) = K(x,y).$$

$(\mathbf{X},+)$ *es el grupo topológico que es el cociente de X por P . Definimos*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y) \tag{4}$$

con $x \in \mathbf{x}$*. Deje* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

- *Si tenemos una función continua* $u : X \to \mathbb{R}$ *con*

  $$\forall p \in P, \quad \forall x \in X, \quad u(x+p) = u(x)$$

  y

  $$\inf_{y\in X}\{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \tag{5}$$

  entonces la función de cociente $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *deducido de usted es continuo y*

  $$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- *Por el contrario, si* $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *es una función continua con (6), entonces la función periódica del período P ,* $u : X \to \mathbb{R}$*, deducido de* $\mathbf{u}$ *es continuo y verifica (5).*

[6] prueba esta proposición para $X = \mathbb{R}$ y $P = \mathbb{Z}$, [9] para $X = \mathbb{R}^n$ y $P = \mathbb{Z}^n$.

Evidencia. Primero, tenga en cuenta que $\mathbf{K}$ está bien definido, porque

$$\forall x \in X, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \forall p \in P, \quad \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x+p,y) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y-p) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x,y).$$

El resto se deduce fácilmente del hecho de que si $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y $x \in \mathbf{x}$, se tiene

$$\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} = \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\inf_{y\in\mathbf{y}}\{K(x,y)+u(y)\} = \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\inf_{y\in\mathbf{y}}\{K(x,y)+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}$$
$$= \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{u}(\mathbf{y})\}.$$

6. Ejemplos

Para todos los α ∈ $\mathbb{R}$, $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Suponemos que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad K_0(x+1,y+1) = K_0(x,y) \tag{7}$$
$$K_\alpha(x,y) = K_0(x,y) - \alpha(x-y). \tag{8}$$

Definimos

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad \lambda_\alpha = \inf_{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ Es compacto. De acuerdo con el Teorema 2 y la Proposición 5, λ_α es el único número real para el que hay una función periódica del período 1, $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ con

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad \inf_{y\in\mathbb{R}}\{K_\alpha(x,y)+u_\alpha(y)\} = \lambda_\alpha + u_\alpha(x). \tag{9}$$

De acuerdo con la proposición 2, $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$Es una función cóncava. Entonces tiene una derivada en el lado derecho $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ para todos los α, y $\alpha\mapsto\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ Es una función decreciente.

Modelos Frenkel y Kontorova

Nosotros elegimos $L\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Asumimos

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \quad L(x+1,y+1) = L(x,y).$$

Definimos

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \quad K_\alpha(x,y) = L(x,y) - \alpha(x-y).$$

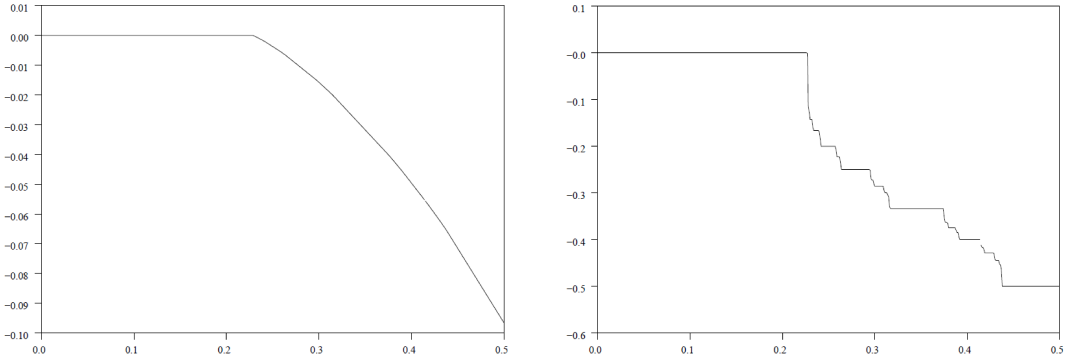
Se verifican los supuestos (7) y (8). Un caso especial es aquel donde $V\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es periódica del período 1 y

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \quad L(x,y) = V(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\,.$$

La Figura 1 muestra la dependencia de λ_α con respecto a α si $V(x) = C[1-\cos(2\pi x)]$ con otro parámetro C. Frenkel y Kontorova propusieron este ejemplo en 1938. Tomamos $C = (4/3)/(2\pi)^2$. Se toma $\{0,1/p,2/p,\ldots,(p-1)/p\}$ discretizar $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Se tiene

$$\forall\alpha\in[0,1/2], \quad \forall x,y\in[0,1], \quad \inf_{p\in\mathbb{Z}} K_\alpha(x,y+p) = V(x) + \inf_{p\in\{-1,0,1\}}\left\{\frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x-y-p)\right\}.$$

La figura (a) ilustra la continuidad de $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$. La figura (b) sugiere que $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ También es una función continua de α, pero como una "escalera del diablo". Queda una duda sobre si esto puede deducirse de los resultados de Aubry [1,2] y los comentarios de Griffith [13].



(a) $\alpha\mapsto\lambda_\alpha$ (b) $\alpha\mapsto\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Figura 1. La energía mínima del modelo de Frenkel y Kontorova.

Homogeneización de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Nosotros elegimos $L\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Asumimos

$$\forall x,v\in\mathbb{R}, \quad L(x+1,v) = L(x,v).$$

Definimos

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \quad K_0(x,y) = \inf\left\{\int_0^1 L(\xi(s),\dot\xi(s))\,ds\,;\ \xi\in C^1([0,1],\mathbb{R}),\ \xi(0)=y,\ \xi(1)=x\right\},$$
$$K_\alpha(x,y) = K_0(x,y) - \alpha(x-y) \tag{10}$$

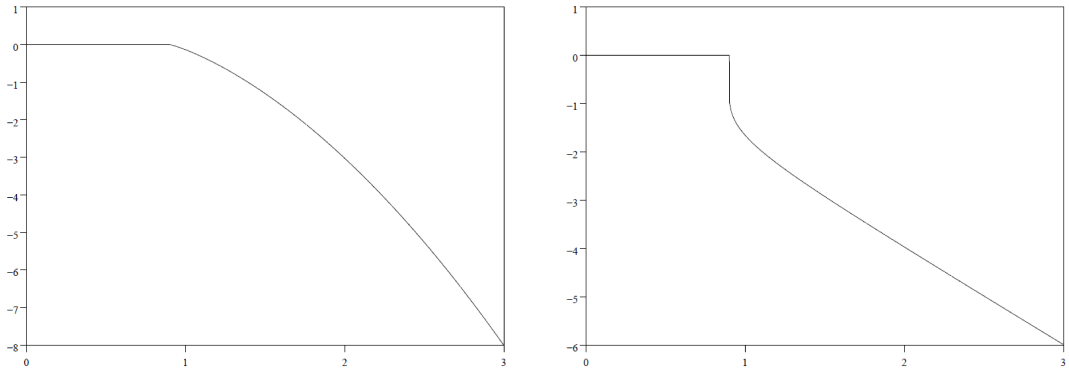
Se verifican los supuestos (7) y (8). Un caso especial de esta situación es donde $V\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es periódica del período 1, y

$$\forall x,v\in\mathbb{R}, \quad L(x,v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

En esta situación, hay una fórmula casi explícita para el valor propio λ_α (ver [9] por ejemplo), a saber

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\, |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \lambda]}\, dx & \forall\, |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx. \end{cases}$$

La figura 2 muestra la dependencia de λ_α con respecto a α si $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$. Tenga en cuenta las similitudes y diferencias con la Figura 1. Es extraño que dos de estos modelos cercanos se comporten de manera tan diferente.



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Figura 2. El Hamiltoniano efectivo para la ecuación eikonal.

En el caso de que $L(x, v)$ es convexo con respecto a v , [9] muestra que el problema de valor propio (9) con la función (10) es equivalente al problema para una celda

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

con $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ y

$$\forall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x, p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x, v)\}.$$

Recordemos que este problema para una célula proviene de la homogeneización cuando $\varepsilon \to 0$ de la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)\right) = 0.$$

[11] expone otros vínculos entre la teoría de Aubry y Mather y las ecuaciones de Hamilton y Jacobi. Tenga en cuenta también que el método numérico, que es bastante fácil para el modelo de Frenkel y Kontorova, no es fácil de adaptar al caso de las ecuaciones de Hamilton y Jacobi porque el núcleo (10) ya es difícil de calcular. En ciertos casos, uno podría usar un software que resuelva los problemas de límites relacionados con la ecuación de Euler y Lagrange para (10). Esto necesita ser estudiado en otro lado.

La velocidad de la convergencia.

Volvamos a los modelos de Frenkel y Kontorova. Como en [6], elegimos la función periódica del período 1, parabólica por piezas, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}\, x^2 & -1/4 \le x \le 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 1/4 \le x \le 3/4 \end{cases}$$

con $c \ge 0$. Utilizamos $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ para discretización De acuerdo con la proposición 3 con $h_p = 1/p$, se tiene

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \le \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p).$$

κ es la constante de lipschitz de la función $\mathbf{K}$ definido por (4). Asumimos $c = 4/3$ y $\alpha = 13/32$. Entonces λ se calcula explícitamente, como se indica en [6], a saber $\lambda = -\frac{265}{2048}$. La figura 3 muestra $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ en función de $-\log_{10}(p)$. Debido a las propiedades específicas de K , la pendiente de la función parece estar cerca de 2, lo que sugiere que el error es cuadrático. Sin embargo, podemos construir ejemplos de problemas de valor propio min-plus para los cuales la velocidad de convergencia es solo lineal. Queda por encontrar suficientes hipótesis en el núcleo para que la convergencia sea cuadrática.

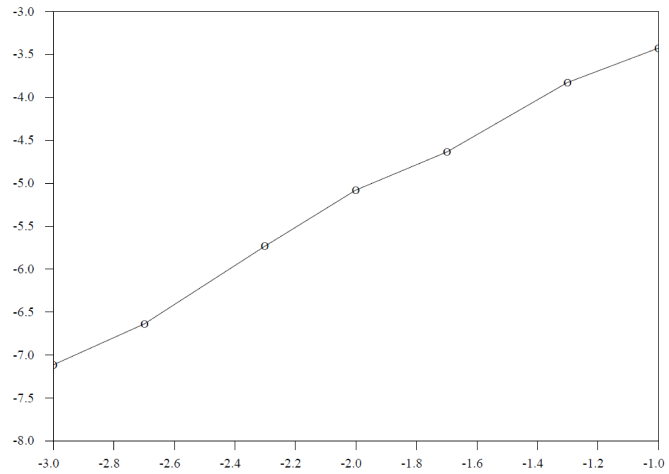


Figura 3. Convergencia. $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ en función de $-\log_{10}(p)$.

Gracias

El autor agradece a Lin Yi-Jiun y a la Universidad de Columbia Británica por el estimulante taller sobre métodos de viscosidad para ecuaciones diferenciales parciales.

Referencias bibliográficas

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil′s staircase. Physica D 7 (1983) 240 – 258.
3. N. Bacaër, Min – plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.
4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max – plus toolbox to solve eikonal equations? In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 – 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton – Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 – 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR – Izv. 38 (1992) 91 – 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 – 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel – Kontorova models of commensurate – incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd. , North – Holland, Amsterdam (1990) 69 – 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays – Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The ‘‘hump ’’ effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 – 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 – 150.