Konvergenz numerischer Methoden und Abhängigkeit von einem Parameter von Min-Plus-Eigenwertproblemen: Frenkel-Kontorova-Modelle und Homogenisierung von Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

Zusammenfassung

Wir verwenden die Min-Plus-Version der Spektralradiusformel, um zu beweisen, dass der eindeutige Eigenwert eines Min-Plus-Eigenwertproblems kontinuierlich von den Parametern abhängt. Wir beweisen auch, dass die von Chou und Griffiths eingeführte numerische Methode zur Berechnung dieses Eigenwerts konvergiert. Eine kürzlich von INRIA entwickelte Toolbox veranschaulicht diese Ergebnisse. Wir verwenden die Frenkel-Kontorova-Modelle als Beispiel. Wir bestehen auch auf der Analogie zur Homogenisierung der Hamilton-Jacobi-Gleichungen.

Schlüsselwörter: Min-Plus-Eigenwertprobleme; numerische Analyse; Frenkel-Kontorova-Modell; Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Einführung

Einige Optimierungsprobleme können unter Verwendung des Halbrings formuliert werden

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

so dass sie als Analoga der klassischen Probleme des Eigenwerts erscheinen. Zum Beispiel,

$$\min_{1 \le j \le n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \le j \le n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

sehen gleich aus, sowie

$$\min_{a \le y \le b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) \times u(y)\, dy = \lambda \times u(x).$$

Diese Analogien wurden verwendet, um eine Spektraltheorie von Matrizen [5] und Integraloperatoren [14] auf diesem Halbring zu entwickeln. [6] verwendeten eine numerische Methode, um "Integralprobleme" des Min-Plus-Eigenwerts zu lösen und damit Phasendiagramme für Frenkel-Kontorova-Modelle zu zeichnen. Das Hauptziel hierbei ist es, die Konvergenz dieser Methode zu beweisen.

Abschnitt 1, inspiriert von [12], erinnert daran, wie die Analogien mit der Einführung einiger allgemeiner Definitionen formalisiert werden können. Abschnitt 2 erinnert an die Hauptsätze der Spektraltheorie über $\mathbb{R}_{\min}$. Der Abschnitt 3 zeigt, dass der Eigenwert λ kontinuierlich von den an der Funktion *K* beteiligten Parametern abhängt . Abschnitt 4 beweist die Konvergenz der numerischen Approximation von Eigenwertproblemen auf $\mathbb{R}_{\min}$. Die Beweise der Abschnitte 3 und 4 lassen sich leicht aus einer Art Spektralradiusformel ableiten, die in Abschnitt 2 dargestellt ist. Abschnitt 5 befasst sich mit dem Fall periodischer Funktionen. Abschnitt 6 veranschaulicht die vorherigen Ergebnisse in zwei Zusammenhängen: den Frenkel-Kontorova-Modellen in der Festkörperphysik und der Homogenisierung der Hamilton-Jacobi-Gleichungen.

Beachten Sie, dass die parametrischen Eigenwertprobleme für Hamilton-Jacobi-Gleichungen, die den Min-Plus-Eigenwertproblemen entsprechen, auch bei der Untersuchung von Wanderwellen für den Festtreibstoffantrieb auftreten [3,15]. . Diese Anwendung war die erste Motivation für unsere Studie. Da die technischen Details jedoch komplizierter sind, werden wir sie an anderer Stelle erläutern.

Beachten Sie auch, dass die numerische Analyse anderer linearer Min-Plus-Probleme nicht immer so einfach ist wie die der hier vorgestellten Eigenwertprobleme (siehe [4] für eine Diskussion).

1. Verallgemeinerte lineare Algebra

Definition . $\mathcal{R}$ ist eine Menge mit einem internen Zusammensetzungsgesetz $+$. $(\mathcal{R}, +)$ ist eine Halbgruppe, wenn + assoziativ ist und ein neutrales Element hat. $(\mathcal{R}, +)$ ist eine kommutative Halbgruppe, wenn + auch kommutativ ist.

Definition . $\mathcal{R}$ ist eine Menge mit zwei internen Zusammensetzungsgesetzen + und ×. $(\mathcal{R}, +, \times)$ ist ein Halbring, wenn

- $(\mathcal{R}, +)$ ist eine kommutative Halbgruppe, deren neutrales Element 0 ist,
- $(\mathcal{R}, \times)$ ist eine Halbgruppe, deren neutrales Element 1 ist,
- × ist verteilend in Bezug auf +,
- $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $0 \times \lambda = \lambda \times 0 = 0$.

Beispiele .

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ und $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ sind Halbringe.
- Mit $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ ist ein Halbring mit neutralen Elementen $+\infty$ und 0.

Definition . $(\mathcal{R}, +, \times)$ ist ein Halbring und $(X, +)$ eine kommutative Halbgruppe. Wir nehmen das an $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $\forall x \in X$, $\lambda \cdot x \in X$. Das sagen wir $(X, +, \cdot)$ ist ein Halbmodul auf $(\mathcal{R}, +, \times)$ wenn $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x\,, \\
&(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \\
&\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\
&1 \cdot x = x.
\end{aligned}$$

Wir sagen, dass *Y* ein Sub-Semi-Modul von *X ist,* wenn *Y* ein Semi-Modul ist und $Y \subset X$.

Beispiel . Sei *X* eine Menge und $(\mathcal{R}, +, \times)$ ein Halbring.

$$\forall f,g \in \mathcal{R}^X, \quad \forall x \in X, \quad (f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \times f(x).$$

$(\mathcal{R}^X, +, \cdot)$ ist dann ein semi-modul an $\mathcal{R}$.

Beispiel . Sei *X* eine Menge und $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ alle Funktionen $X \to \mathbb{R}_{\min}$ die unten begrenzt sind. $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ ist ein Sub-Semi-Modul von $(\mathbb{R}_{\min}^X, \min, +)$.

Definition . $(\mathcal{R}, +, \times)$ ist ein Halbring. $(X, +, \cdot)$ und $(Y, +, \cdot)$ sind zwei Halbmodule und $L : X \to Y$. Wir sagen, dass *L* ein linearer Operator ist, wenn $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}, \forall x, y \in X, L(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot L(x) + \mu \cdot L(y)$.

Beispiel . Sei *X* eine Menge und $K : X^2 \to \mathbb{R}_{\min}$ eine unten begrenzte Funktion. $\mathcal{K}$ ist die Anwendung von $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ an sich $u \mapsto \mathcal{K}u$ mit

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\}.$$

$\mathcal{K}$ ist ein linearer Operator.

Definition . $(\mathcal{R}, +, \times)$ ist ein Halbring, $(X, +, \cdot)$ ein Halbmodul auf $\mathcal{R}$, $L : X \to X$ ein linearer Operator und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass λ ein Eigenwert von *L ist,* wenn $\exists x \in X,\ x \neq 0,\ L(x) = \lambda \cdot x$. In diesem Fall sagen wir, dass *x* ein mit λ assoziierter Eigenvektor ist.

Beispiel . Gleiche Notationen wie im vorherigen Beispiel. $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ ist ein Eigenwert von $\mathcal{K}$ wenn es existiert $u \in B(X, \mathbb{R}_{\min})$ mit *u* nicht identisch + ∞ und

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \tag{1}$$

2. Spektraltheorie auf $\mathbb{R}_{\min}$

Satz 1 . *Sei X eine Menge und* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die unten begrenzt ist. Angenommen, es gibt* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und eine unten begrenzte Funktion* $u : X \to \mathbb{R}$ *mit (1). Wir haben dann*

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}. \tag{2}$$

Diese Formel ist das Analogon für $\mathbb{R}_{\min}$ der Spektralradiusformel. [6] gibt es nicht spezifiziert für $X = [0,1]$. [16] gibt es nur für eine Menge *X,* die endlich ist. In diesem Fall ist die folgende Formel (3) interessanter. Für eine Interpretation der Formel hinsichtlich des Spektralradius in einer normalisierten Halbalgebra siehe [3].

Beweise. Wir wählen $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Wir haben dann

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1},y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1},x_n) + u(x_n).$$

Addieren wir die ersten *n* Gleichungen. Wir erhalten

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0,x_1) + \cdot + K(x_{n-1},x_n) + u(x_n).$$

Da *u* begrenzt ist, dividiere durch *n* und nimm $n \to +\infty$. Wir erhalten

$$\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

(x_n) war willkürlich. Also haben wir

$$\lambda \leq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

Um die entgegengesetzte Ungleichung zu beweisen, sei ε> 0 und $y_0 \in X$. Wir können nacheinander eine Sequenz konstruieren $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1},y_n) + u(y_n) \leq \inf_{x \in X} \{K(y_{n-1},x) + u(x)\} + \varepsilon = \lambda + u(y_{n-1}) + \varepsilon.$$

Addieren wir die ersten *n* Gleichungen und dividieren durch *n* . Wir erhalten

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0,y_1) + \cdots + K(y_{n-1},y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

Mit $n \to +\infty$, wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(y_0,y_1) + \cdots + K(y_{n-1},y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 2 . *Sei ein kompakter metrischer Raum* (X,d) *und* $K \in C^0(X^2, \mathbb{R})$. *Es gibt eine einzigartige* $\lambda \in \mathbb{R}$ *für die es existiert* $u \in C^0(X, \mathbb{R})$ *mit (1).*

Es ist ein Analogon für $\mathbb{R}_{\min}$ des Satzes von Krein und Rutman. [5] liefert einen Beweis für eine Menge *X,* die endlich ist. [7] gibt Hinweise auf $X = [0,1]$ und stellt fest, dass verschiedene Verallgemeinerungen möglich sind. [9] erweitert die Beweise auf $X = [0,1]^n$. [14] liefert Beweise im allgemeinen Kontext und auch bei schwächeren Hypothesen. Die Beweismethode von [14] unterscheidet sich jedoch ein wenig von der in [7,9] verwendeten und ist weniger klar. Der folgende Beweis ist eine direkte Verallgemeinerung des in [7,9].

Beweise. $E = C^0(X, \mathbb{R})$. Wir definieren $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$ wenn $u \in E$. Dann ist *E* ein Banachraum. Wir definieren

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z,y) + u(y)\}.$$

$T(E)$ ist eine gleichkontinuierliche Menge. In der Tat sei ε> 0. Da *K* gleichmäßig stetig ist,

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x, y, x', y' \in X, \quad \max\{d(x,x'); d(y,y')\} \leq \alpha \ \Rightarrow\ |K(x,y) - K(x',y')| \leq \varepsilon.$$

Wir wählen $x, x' \in X$ mit $d(x,x') \leq \alpha$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\forall u \in E, \quad (Tu)(x) - (Tu)(x') &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} \\ &\le \inf_{y\in X}\{K(x',y)+\varepsilon+u(y)\} - \inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit x' anstelle von x bekommen wir $|(Tu)(x) - (Tu)(x')| \le \varepsilon$.

Funktion $T : E \to E$, $u \mapsto Tu$ ist kontinuierlich. Mit $u, v \in E$,

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \quad (Tv)(x) &= \inf_{y\in X}\{K(x,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+v(y)-u(y)+u(y)\} \\ &\le (Tu)(x) + \sup_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} - \inf_{y\in X}\{v(y)-u(y)\} \\ &\le (Tu)(x) + 2\|v-u\|.\end{aligned}$$

Lassen Sie uns die Rollen von v und u tauschen . Wir erhalten $\|Tv - Tu\| \le 2\|v-u\|$.

Wir definieren

$$K_- = \inf_{x,y\in X} K(x,y), \quad K_+ = \sup_{x,y\in X} K(x,y),$$

$$C = \{u \in E;\ \forall x \in X,\ 0 \le u(x) \le K_+ - K_-\}.$$

Wir haben

$$\forall u \in E, \quad \forall x \in X, \quad 0 \le (Tu)(x) \le \inf_{y\in X}\{K_+ + u(y)\} - \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

Also haben wir $T(E) \subset C$. Bestimmtes, $T(C) \subset C$ und $T(C)$ ist begrenzt. $T(E)$ ist gleich kontinuierlich. $T(C)$ ist daher auch gleichkontinuierlich. $T(C)$ist in E nach dem Satz von Ascoli und Arzela relativ kompakt . C ist eine geschlossene und konvexe Teilmenge. Für eine stetige Funktion einer geschlossenen und konvexen Teilmenge eines Banachraums mit Werten in einer kompakten Teilmenge von C gibt es einen festen Punkt nach dem Schauder-Theorem: $\exists u \in C,\ Tu = u$, was bedeutet (1) mit

$$\lambda = \inf_{z\in X}\inf_{y\in X}\{K(z,y)+u(y)\}.$$

Die Eindeutigkeit des Eigenwertes λ ergibt sich aus Satz 1.

3. Probleme, die von einem Parameter abhängen

Die min-plus-Eigenwertprobleme, die von einem Parameter abhängen, scheinen noch nicht untersucht worden zu sein.

Satz 1 . *Sei ein kompakter metrischer Raum (X,d), Ω ein topologischer Raum und $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ eine kontinuierliche Funktion von $\Omega \to (C^0(X^2,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. λ_α ist die einzige reelle Zahl, die mit zugeordnet ist K_α nach Satz 2. Wir haben dann: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ von $\Omega \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion.*

Beweise. Wir wählen $\alpha \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt eine Nachbarschaft $\mathcal{V}$ von α mit

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y\in X} |K_\alpha(x,y) - K_\beta(x,y)| \le \varepsilon.$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned}\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} - \varepsilon &\le \frac{K_\beta(x_0,x_1)+\cdots+K_\beta(x_{n-1},x_n)}{n} \\ &\le \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Nehmen wir das $\liminf_{n\to+\infty}$ von diesen Ungleichungen dann das Infimum an allen $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Wir erhalten aus Formel (2), dass

$$\lambda_\alpha - \varepsilon \le \lambda_\beta \le \lambda_\alpha + \varepsilon.$$

Satz 2 . *Sei ein kompakter metrischer Raum (X,d) und Ω eine konvexe Teilmenge eines realen Vektorraums. $K_\alpha \in C^0(X^2,\mathbb{R})$ wenn $\alpha \in \Omega$. Wir nehmen an $\forall x,y \in X$, $\alpha \mapsto K_\alpha(x,y)$ von $\Omega \to \mathbb{R}$ ist eine konkave Funktion. λ_α ist die einzige reelle Zahl, die mit zugeordnet ist K_α nach Satz 2. Wir haben dann: $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ von $\Omega \to \mathbb{R}$ ist eine konkave Funktion.*

[6] erwähnt diese Eigenschaft für $X = [0,1]$ und $\Omega = \mathbb{R}$.

Beweise. Mit $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $\alpha \in \Omega$, wir definieren

$$S(\mathbf{x},n,\alpha) = \frac{K_\alpha(x_0,x_1)+\cdots+K_\alpha(x_{n-1},x_n)}{n}.$$

Wir wählen $t \in]0,1[$ und $\alpha, \beta \in \Omega$. Wir haben dann

$$\forall \mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta) \ge t\,S(\mathbf{x},n,\alpha) + (1-t)S(\mathbf{x},n,\beta)$$

wegen der Konkavitätsannahme. Mit den Eigenschaften von $\liminf$, wir erhalten

$$\forall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta) \ge t\ \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\alpha) + (1-t)\ \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\beta).$$

Nehmen Sie das Infimum auf alle $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$, wir erhalten

$$\begin{aligned}&\inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta) \\ &\quad \ge t\ \inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\alpha) + (1-t)\ \inf_{\mathbf{x}\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} S(\mathbf{x},n,\beta).\end{aligned}$$

Also nach Formel (2), $\lambda_{t\cdot\alpha+(1-t)\cdot\beta} \ge t\,\lambda_\alpha + (1-t)\lambda_\beta$.

4. Numerische Methoden

Der folgende Satz beweist die Konvergenz der von [6] verwendeten numerischen Methode.

Satz 3 . *Sei ein kompakter metrischer Raum* (X, d). *Sei eine lipschitzsche Funktion* $K : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq \kappa \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Nach Satz 2 sei λ *die einzige reelle Zahl, für die* $\exists\, u \in C^0(X, \mathbb{R})$ *mit (1). Sei eine Reihe endlicher Teilmengen von* X *,* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$h_p = \sup_{x\in X} \min_{y\in X_p} d(x, y) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach Satz 2

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists\, u_p : X_p \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \min_{y\in X_p}\{K(x, y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

Wir haben dann $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$ *und* $\lambda_p \to \lambda$ *wenn* $p \to +\infty$.

Dieser Satz bezieht sich auf den Standpunkt der Nicht-Standard-Analyse von [10], die unendlich große Werte von *p* berücksichtigt .

Beweise. Wir wählen $p \in \mathbb{N}$. Nach (2)

$$\lambda = \inf_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n},$$
$$\lambda_p = \inf_{(x_n)\in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Auf der einen Seite, $X_p \subset X$, Also haben wir $\lambda \leq \lambda_p$. Andererseits sei ε> 0. Es existiert $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ mit

$$\lambda \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon\,.$$

Nach der Hypothese $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in X_p$, $d(x_n, y_n) \leq h_p$. Aber *K* ist Lipschitz, also $\forall n \in \mathbb{N}$, $|K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq \kappa\, h_p$. Abschließend,

$$\begin{aligned}\lambda_p &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} + \kappa\, h_p \leq \lambda + \varepsilon + \kappa\, h_p.\end{aligned}$$

Weil ε willkürlich war, bekommen wir $\lambda_p \leq \lambda + \kappa\, h_p$.

Satz 4 . *Sei eine Menge mit q Elementen,* X_p. *Wir haben dann*

$$\lambda_p = \min_{1\leq n\leq q} \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in X_p^n} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \tag{3}$$

Beweise. Siehe zum Beispiel [5].

λ_p ist der "minimale zyklische Durchschnitt". Dieser Durchschnitt wird mit einer endlichen Anzahl von Operationen berechnet. Der Beweis ist ähnlich dem von (2). In der Praxis wird jedoch nicht Formel (3) verwendet. Es gibt bessere Algorithmen, wie den Karp-Algorithmus, der dies erfordert $O(q^3)$ Operationen oder Howards Algorithmus, der am schnellsten zu sein scheint [8]. Beachten Sie, dass bei der numerischen Analyse von Min-Plus-Eigenwertproblemen die beteiligten Matrizen voll und sehr groß sind. Effiziente Algorithmen sind daher willkommen, insbesondere wenn das Problem von einem Parameter abhängt, den wir wie in den nächsten Abschnitten variieren. Karps Algorithmus ist sehr einfach zu programmieren, während Howard über die Maxplus-Toolbox von Scilab verfügbar ist. Siehe www-rocq.inria.fr/scilab/ und www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html .

5. Periodische Funktionen

Satz 5 . *Sei eine abelsche topologische Gruppe* $(X, +)$, *eine unten begrenzte Funktion* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *und P eine Untergruppe von X . Wir nehmen an*

$$\forall p \in P,\ \forall (x, y) \in X^2,\ K(x + p, y + p) = K(x, y).$$

$(\mathbf{X}, +)$ *ist die topologische Gruppe, die der Quotient von X durch P ist . Wir definieren*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{y\in\mathbf{y}} K(x, y) \tag{4}$$

mit $x \in \mathbf{x}$. *Sei* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Wenn wir eine stetige Funktion haben* $u : X \to \mathbb{R}$ *mit*

  $$\forall p \in P, \quad \forall x \in X, \quad u(x + p) = u(x)$$

  und

  $$\inf_{y\in X}\{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \tag{5}$$

  dann die Quotientenfunktion $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *abgeleitet von u ist stetig und*

  $$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \inf_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

- *Umgekehrt, wenn* $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *ist eine stetige Funktion mit (6), dann die periodische Funktion der Periode P ,* $u : X \to \mathbb{R}$, *abgezogen von* $\mathbf{u}$ *ist kontinuierlich und prüft (5).*

[6] beweist diesen Satz für $X = \mathbb{R}$ und $P = \mathbb{Z}$, [9] für $X = \mathbb{R}^n$ und $P = \mathbb{Z}^n$.

Beweise. Beachten Sie zunächst, dass $\mathbf{K}$ ist gut definiert, weil

$$\forall x \in X, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \forall p \in P, \quad \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x+p, y) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y-p) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y).$$

Der Rest lässt sich leicht aus der Tatsache ableiten, dass wenn $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ und $x \in \mathbf{x}$, wir haben

$$\begin{aligned} \inf_{y \in X}\{K(x,y) + u(y)\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}}\{K(x,y) + u(y)\} &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}}\{K(x,y) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}}\{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\}. \end{aligned}$$

6. Beispiele

Für alle α ∈ ℝ , $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wir nehmen das an

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad K_0(x+1, y+1) = K_0(x, y) \tag{7}$$

$$K_\alpha(x, y) = K_0(x, y) - \alpha(x - y). \tag{8}$$

Wir definieren

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda_\alpha = \inf_{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}\,.$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist kompakt. Nach Satz 2 und Satz 5 λ_α ist die einzige reelle Zahl, für die es eine periodische Funktion von Periode 1 gibt, $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}}\{K_\alpha(x, y) + u_\alpha(y)\} = \lambda_\alpha + u_\alpha(x). \tag{9}$$

Nach Satz 2, $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ist eine konkave Funktion. Es hat also eine Ableitung auf der rechten Seite $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ für alle α und $\alpha \mapsto \frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ ist eine abnehmende Funktion.

Frenkel und Kontorova Modelle

Wir wählen $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wir nehmen an

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, y+1) = L(x, y).$$

Wir definieren

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_\alpha(x, y) = L(x, y) - \alpha(x - y).$$

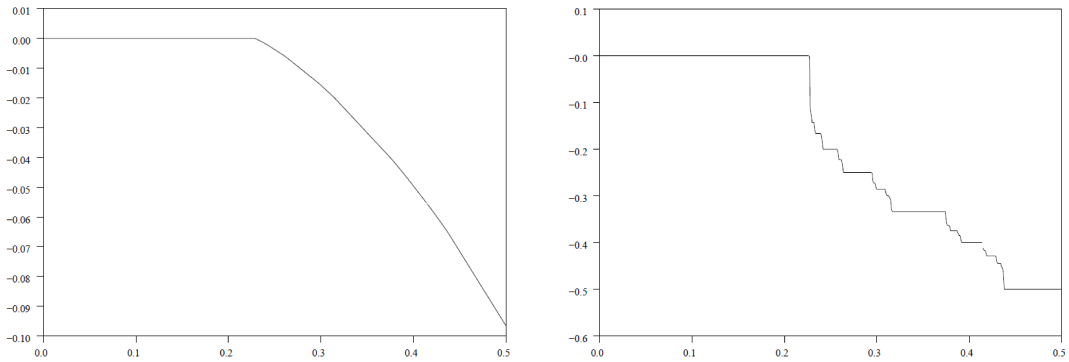
Die Annahmen (7) und (8) werden überprüft. Ein Sonderfall ist der wo $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist periodisch von Periode 1 und

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad L(x, y) = V(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\,.$$

Abbildung 1 zeigt die Abhängigkeit von λ_α in Bezug auf α wenn $V(x) = C[1 - \cos(2\pi x)]$ mit einem anderen Parameter C. Frenkel und Kontorova schlugen dieses Beispiel 1938 vor. Wir nehmen $C = (4/3)/(2\pi)^2$. Wir nehmen $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ zu diskretisieren $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wir haben

$$\forall \alpha \in [0, 1/2], \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad \inf_{p \in \mathbb{Z}} K_\alpha(x, y+p) = V(x) + \inf_{p \in \{-1,0,1\}} \left\{ \frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x - y - p) \right\}.$$

Abbildung (a) zeigt die Kontinuität von $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$. Abbildung (b) legt dies nahe $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ ist auch eine kontinuierliche Funktion von α, aber als "Teufelstreppe". Es bleibt ein Zweifel, ob dies aus den Ergebnissen von Aubry [1,2] und den Bemerkungen von Griffith [13] abgeleitet werden kann.



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Abbildung 1. Die minimale Energie des Frenkel- und Kontorova-Modells.

Homogenisierung von Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Wir wählen $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wir nehmen an

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x+1, v) = L(x, v).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x, y) &= \inf\left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s))\, ds\,;\ \xi \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ \xi(0) = y,\ \xi(1) = x \right\}, \\ K_\alpha(x, y) &= K_0(x, y) - \alpha(x - y) \end{aligned} \tag{10}$$

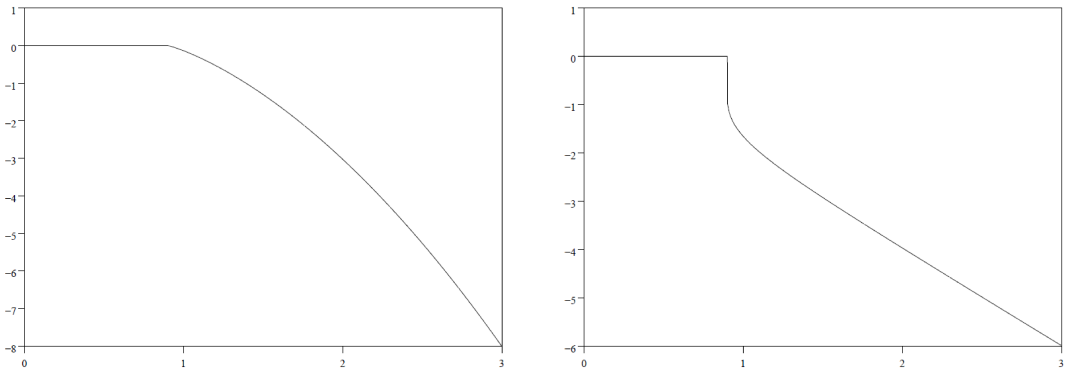
Die Annahmen (7) und (8) werden überprüft. Ein Sonderfall dieser Situation ist der wo $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist periodisch von Periode 1 und

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \quad L(x, v) = V(x) + \frac{v^2}{2}\,.$$

In dieser Situation gibt es eine fast explizite Formel für den Eigenwert λ_α (siehe [9] zum Beispiel), nämlich

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \forall\, |\alpha| \le \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx \\ \lambda, \quad |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \lambda]}\, dx & \forall\, |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]}\, dx. \end{cases}$$

Abbildung 2 zeigt die Abhängigkeit von λ_α in Bezug auf α wenn $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$. Beachten Sie die Ähnlichkeiten und Unterschiede zu Abbildung 1. Es ist seltsam, dass sich zwei so enge Modelle so unterschiedlich verhalten.



(a) $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ (b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

Abbildung 2. Der effektive Hamilton-Operator für die Eikonalgleichung.

In dem Fall wo $L(x, v)$ ist konvex in Bezug auf v , [9] zeigt, dass das Eigenwertproblem (9) mit der Funktion (10) dem Problem für eine Zelle äquivalent ist

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

mit $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ und

$$\forall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x, p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x, v)\}.$$

Denken Sie daran, dass dieses Problem für eine Zelle von der Homogenisierung herrührt, wenn $\varepsilon \to 0$ der Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)\right) = 0.$$

[11] enthüllt andere Zusammenhänge zwischen der Theorie von Aubry und Mather und den Gleichungen von Hamilton und Jacobi. Beachten Sie auch, dass die numerische Methode, die für das Frenkel- und Kontorova-Modell recht einfach ist, nicht einfach an den Fall der Hamilton- und Jacobi-Gleichungen anzupassen ist, da der Kernel (10) bereits schwer zu berechnen ist. In bestimmten Fällen könnte man Software verwenden, die die mit der Euler- und Lagrange-Gleichung für (10) verbundenen Grenzprobleme löst. Dies muss an anderer Stelle untersucht werden.

Die Geschwindigkeit der Konvergenz

Kehren wir zu den Modellen von Frenkel und Kontorova zurück. Wie in [6] wählen wir die periodische Funktion von Periode 1, parabolisch nach Stücken, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$mit

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}\, x^2 & -1/4 \le x \le 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 1/4 \le x \le 3/4 \end{cases}$$

mit $c \ge 0$. Wir gebrauchen $\{0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p\}$ zur Diskretisierung. Nach Satz 3 mit $h_p = 1/p$, wir haben

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \le \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p).$$

κ ist die Lipschitzkonstante der Funktion $\mathbf{K}$ definiert durch (4). Wir nehmen an $c = 4/3$ und $\alpha = 13/32$. Dann wird λ explizit berechnet, wie in [6] angegeben, nämlich $\lambda = -\frac{265}{2048}$. Abbildung 3 zeigt $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ bezüglich $-\log_{10}(p)$. Aufgrund der spezifischen Eigenschaften von K scheint die Steigung der Funktion nahe bei 2 zu liegen, was darauf hindeutet, dass der Fehler quadratisch ist. Wir können jedoch Beispiele für Min-Plus-Eigenwertprobleme konstruieren, für die die Konvergenzgeschwindigkeit nur linear ist. Es müssen noch genügend Hypothesen auf dem Kernel gefunden werden, damit die Konvergenz quadratisch ist.

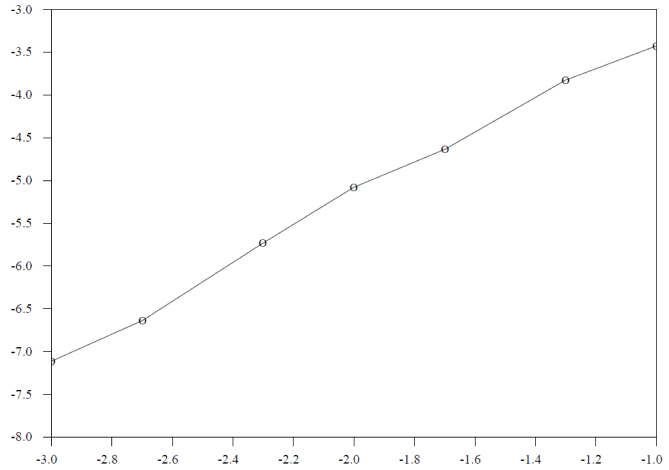


Abbildung 3. Konvergenz. $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ bezüglich $-\log_{10}(p)$.

Vielen Dank

Der Autor dankt Lin Yi-Jiun und der University of British Columbia für den anregenden Workshop zu Viskositätsmethoden für partielle Differentialgleichungen.

Literaturhinweise

1. S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil′s staircase. Physica D 7 (1983) 240 – 258.
3. N. Bacaër, Min – plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.
4. N. Bacaër, Can one use Scilab′s max – plus toolbox to solve eikonal equations? In : System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 – 742.
5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton – Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 – 1117.
10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR – Izv. 38 (1992) 91 – 105.
11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1 – 33.
12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
13. R. B. Griffiths, Frenkel – Kontorova models of commensurate – incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd., North – Holland, Amsterdam (1990) 69 – 110.
14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays – Bas (1997).
15. G. Namah, J. M. Roquejoffre, The ‘‘hump ” effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449 – 467.
16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 – 150.