تقارب الطرق العددية والاعتماد على معلمة مشاكل القيمة الذاتية min-plus: نماذج Frenkel-Kontorova وتجانس معادلات

Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185 – 1195 https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01575357

Nicolas Bacaër

ملخص

نستخدم إصدار min-plus من صيغة نصف القطر الطيفي لإثبات أن القيمة الذاتية الفريدة لمشكلة القيمة الذاتية min-plus تعتمد باستمرار على المعلمات نثبت أيضًا أن الطريقة العددية التي قدمها Chou و Griffiths لحساب هذه القيمة الذاتية تتقارب توضح مجموعة الأدوات التي طورتها INRIA مؤخرًا هذه النتائج. نستخدم نماذج Frenkel-Kontorova كمثال. نحن نصر أيضا على القياس مع تجانس معادلات هاملتون-جاكوبي.

الكلمات الرئيسية: مشاكل القيمة الذاتية min-plus؛ التحليل العددي؛ نموذج Frenkel-Kontorova ؛ معادلات هاميلتون-جاكوبي

المقدمة

يمكن صياغة بعض مشاكل التحسين باستخدام شبه الحلقة

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes), \quad \lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad , \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

بحيث تظهر كنظائر للمشاكل الكلاسيكية للقيمة الذاتية. مثلا،

$$\min_{1 \leq j \leq n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i, \qquad \sum_{1 \leq j \leq n} K_{i,j} imes u_j = \lambda imes u_i$$

تبدو متشابهة ، وكذلك

$$\min_{a \leq y \leq b} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \qquad \int_a^b K(x,y) imes u(y) \, dy = \lambda imes u(x).$$

تم استخدام هذه المقارنات لتطوير نظرية طيفية للمصفوفات [5] وعوامل متكاملة [14] في هذه الحلقة شبه. [6] استخدمت طريقة عددية لحل "المشاكل المتكاملة" لقيمة min-plus eigenvalue وبالتالي رسم مخططات طورية لنماذج Frenkel-Kontorova. الهدف الرئيسي هنا هو إثبات تقارب هذه الطريقة.

القسم 1 ، مستوحى من [12] ، يتذكر كيفية إضفاء الطابع الرسمي على القياس مع إدخال بعض التعريفات العامة. يستذكر القسم 2 النظريات الرئيسية للنظرية الطيفية \mathbb{R}_{\min} . \mathbb{R}_{\min} . لقسم أن القيّمة الذاتية λ يعتمد بشكل مستمر على المعلمات المشاركين في وظيفة λ . القسم 4 يثبت تقارب التقريب العددي لمشاكل القيمة الذاتية \mathbb{R}_{\min} . يتم استنتاج براهين القسمين 3 و 4 بسهولة من نوع من صيغة نصف القطر الطيفي المقدمة في القسم 2. ويتناول القسم 5 حالة الوظائف الدورية. يوضح القسم 6 النتائج السابقة في سياقين: نماذج Frenkel-Kontorova في فيزياء الحالة الصلبة وتجانس معادلات Hamilton-Jacobi.

لاحظ أن مشاكل القيمة الذاتية المعيارية لمعادلات هاملتون-جاكوبي ، والتي تعادل مشاكل القيمة الذاتية الزائدة لمين-زائد ، تظهر أيضًا في دراسة الموجات المتنقلة للدفع الصلب الدافع [3،15] . كان هذا التطبيق هو الدافع الأولي لدراستنا. ولكن نظرًا لتعقيد التفاصيل الفنية ، فسوف نوضحها في مكان آخر.

لاحظ أيضًا أن التحليل العددي لمشاكل Min-plus الخطية الأخرى ليس دائمًا بسيطًا مثلما هو الحال مع مشكلات القيمة الذاتية المقدمة هنا (انظر [4] للحصول على مناقشة).

1. الجبر الخطى المعمم

التعریف \mathcal{R} هی مجموعة مع قانون التكوین الداخلی \mathcal{R} بارة عن شبه مجموعة إذا كان \mathcal{R} متر ابطًا وله عنصر محاید. \mathcal{R} عبارة عن شبه مجموعة تبادلية إذا كانت + تبادلية أيضًا.

التعريف \mathcal{R} عبارة عن قانونين داخليين + و imes imes هو شبه الدائري إذا \mathcal{R}

- ($\mathcal{R},+$) هي شبه مجموعة تبادلية يكون العنصر المحايد فيها 0 • (\mathcal{R},\times) هي مجموعة شبه عنصر ها المحايد 1
 - - × توزيعية بالنسبة إلى +،
 - $0.0 imes \lambda = \lambda imes 0 = 0 \ rac{1}{2} rac{1}{2} \in \mathcal{R} \ ullet$

أمثلة

- و $(\mathbb{R},+, imes)$ هي شبه حلقات. $(\mathbb{R},+, imes)$
- .0 مع $\{+\infty\}$ مع عناصر محايدة $\infty+\infty$ هو شبه حلقة مع عناصر محايدة $\infty+$ و ه

التعریف . $(X,+,\times)$ هو شبه الدائري و $(X,+,\times)$ شبه تبادلیة مجموعة. نحن نفترض ذلك $X \in \mathcal{R}, \ \forall x \in X$ هو شبه الدائري و $(X,+,\times)$ شبه تبادلیة مجموعة. نحن نفترض ذلك $(X,+,\times)$ هو شبه الدائري و $(X,+,\times)$

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, 1 \cdot x = x.$$

. $Y\subset X$ نقول أن Y هي وحدة شبه فرعية من X إذا كانت Y وحدة شبه و

مثال . دع X یکون مجموعة و $(\mathcal{R},+,\times)$ نصف الدائري.

$$orall f,g\in \mathcal{R}^X, \quad orall x\in X, \quad (f+g)(x):=f(x)+g(x), \quad (\lambda\cdot f)(x):=\lambda imes f(x).$$

 \mathcal{R} ثم وحدة نمطية على $(\mathcal{R}^X,+,\cdot)$

 \mathbb{R}^{X} التي يحدها أدناه. $B(X,\mathbb{R}_{\min},+)$ هي وحدة شبه فر عية من $B(X,\mathbb{R}_{\min},+)$ مثال . دع X يكون مجموعة و $B(X,\mathbb{R}_{\min},+)$ جميع الوظائف $X \to \mathbb{R}_{\min}$ التي يحدها أدناه.

 $(\forall x,y\in X: \forall \lambda,\mu\in\mathcal{R})$ هو شبه الدائري. $(X,+,\cdot)$ و $(X,+,\cdot)$ هي وحدتين شبه و L:X o Y التعريف . L:X o Y هي وحدتين شبه و $(X,+,\cdot)$ هي التعريف . $L(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)=\lambda\cdot L(x)+\mu\cdot L(y)$

مثال . دع X يكون مجموعة و $B(X,\mathbb{R}_{\min})$ دالة مقيدة أدناه $K:X^2 o \mathbb{R}_{\min}$ في ذاته $u\mapsto \mathcal{K}u$ مع

$$orall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\}.$$

X عامل خطى.

التعریف . $(\mathcal{R},+, imes)$ نصف حلقة ، $(X,+,\cdot)$ وحدة شبه علی \mathcal{R} ، \mathcal{R} عامل خطي و \mathbb{R} . نقول أن λ هي قيمة ذاتية لـ λ إذا $L:X \to X$ نصف حلقة ، $\exists x \in X, \ x \neq 0, \ L(x) = \lambda \cdot x$

مع u ليس متطابقاm و m المثال السابقu السابقu ليس متطابقا m هو قيمة ذاتية m إذا كانت موجودة m المثال السابقm ليس متطابقا m

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \tag{1}$$

\mathbb{R}_{\min} النظرية الطيفية على 2.

نظرية 1 . دع X يكون مجموعة و $x:X o \mathbb{R}$ دالله مقيدة أدناه . افترض أن هناك $\lambda \in \mathbb{R}$ ووظيفة مقيدة أدناه $u:X o \mathbb{R}$ مع $u:X o \mathbb{R}$ مع نظرية u:X o X

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \to +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \dots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \,. \tag{2}$$

هذه الصيغة هي التناظرية \mathbb{R}_{\min} من صيغة الشعاع الطيفي. [6] يعطيها غير محددX = [0,1] = X. [16] يعطيها فقط لمجموعة X المحدودة. في هذه الحالة ، تكون الصيغة (3) أدناه أكثر إثارة للاهتمام. لتفسير الصيغة من حيث نصف القطر الطيفي في الجبر شبه الطبيعي ، انظر [3].

 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ دينا بعد ذلك دليل . يتم تحديد

$$orall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1},y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1},x_n) + u(x_n).$$

دعونا نضيف المعادلات الأولى n نحصل

$$orall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0,x_1) + \cdot + K(x_{n-1},x_n) + u(x_n).$$

بما أن u مقيد ، اقسم على n وخذ $\infty+\infty$ نحصل

$$\lambda \leq \liminf_{n o +\infty} rac{K(x_0,x_1)+\cdots +K(x_{n-1},x_n)}{n}\,.$$

کان تعسفا. اذا لدینا (x_n)

$$\lambda \leq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n o +\infty} rac{K(x_0,x_1) + \cdots + K(x_{n-1},x_n)}{n} \ .$$

 $(y_n)\in X^{\mathbb{N}}$ لإثبات عدم المساواة ، دعنا 0<0 و 0<0 و يمكننا بناء تسلسل بالتتابع

$$orall n\in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1},y_n)+u(y_n)\leq \inf_{x\in X}\{K(y_{n-1},x)+u(x)\}+arepsilon=\lambda+u(y_{n-1})+arepsilon.$$

دعونا نضيف المعادلات n الأولى ونقسمها على n نحصل

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0,y_1)+\dots+K(y_{n-1},y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

مع $+\infty o n$ ، نحصل

$$egin{aligned} \lambda &\geq \liminf_{n o +\infty} rac{K(y_0,y_1) + \dots + K(y_{n-1},y_n)}{n} - arepsilon \ &\geq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n o +\infty} rac{K(x_0,x_1) + \dots + K(x_{n-1},x_n)}{n} - arepsilon. \end{aligned}$$

 $u\in C^0(X,\mathbb{R})$ مع $u\in C^0(X,\mathbb{R})$ التي وجدت من أجلها $\lambda\in\mathbb{R}$ مع $u\in C^0(X,\mathbb{R})$ مع $u\in C^0(X,\mathbb{R})$ مع التي وجدت من أجلها

إنه تناظري ل \mathbb{R}_{\min} من نظرية Krein ورتمان. [5] يعطي إثباتًا لمجموعة X محدودة. [7] يعطي دليلا على X = [0,1] = X ويلاحظ أن التعميمات المختلفة ممكنة. [9] يمتد الدليل إلى X = [0,1] تختلف قليلاً عن تلك المستخدمة في [7،9] وأقل وضوحًا. الدليل أدناه هو تعميم مباشر لذلك في [7،9].

نحدد .Banach أم $E=C^0(X,\mathbb{R})$ بنجد . $\|u\|=\sup_{x\in X}|u(x)|$ نحدد . $E=C^0(X,\mathbb{R})$. نحدد

$$orall u \in E, \quad orall x \in X, \quad (Tu)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z,y) + u(y)\}.$$

، محموعة متساوية. في الواقع ، دعونا >0. بما أن < مستمر بشكل موحد ، <

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x, y, x', y' \in X, \quad \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \leq \alpha \ \Rightarrow \ |K(x, y) - K(x', y')| \leq \varepsilon.$$

يتم تحديد $x,x'\in X$ مع مع $d(x,x')\leq lpha$ يتم تحديد

$$egin{aligned} orall u \in E, \quad (Tu)(x)-(Tu)(x')&=\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}-\inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\}\ &\leq \inf_{y\in X}\{K(x',y)+arepsilon+u(y)\}-\inf_{y\in X}\{K(x',y)+u(y)\}&=arepsilon. \end{aligned}$$

. $|(Tu)(x)-(Tu)(x')|\leq arepsilon$ مع x' من x ، نحصل x'

 $u,v\in E$ الوظيفة $u\mapsto Tu$ ، T:E o Eمستمر. مع

$$egin{aligned} orall x \in X, & (Tv)(x) &= \inf_{y \in X} \{K(x,y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \ &- \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z,y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y \in X} \{v(y) - u(y)\} - \inf_{y \in X} \{v(y) - u(y)\} \ &\leq (Tu)(x) + 2\|v - u\|. \end{aligned}$$

. $\|Tv-Tu\|\leq 2\|v-u\|$ دعنا نتبادل أدوار v و v . نحصل

نحدد

$$egin{aligned} K_-&=\inf_{x,y\in X}K(x,y),\quad K_+&=\sup_{x,y\in X}K(x,y),\ C&=\{u\in E;\ orall x\in X,\ 0\leq u(x)\leq K_+-K_-\}. \end{aligned}$$

نملك

$$orall u \in E, \quad orall x \in X, \quad 0 \leq (Tu)(x) \leq \inf_{u \in X} \{K_+ + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{u \in X} \{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

اذا لدينا $T(E) \subset T(E)$. بالخصوص، $T(C) \subset T(C)$ و T(C) يحدها. T(E) متساوي. T(C) وبالتالي متساوي أيضا. $T(E) \subset T$ مضغوط نسببًا في E(C) وفقًا لنظرية Ascoli و Arzela و Ascoli و Arzela و محدبة من مساحة Banach بقيم في مجموعة فر عية مضغوطة من E(C) بقيم انظرية E(C) بالمحاول على وظيفة مستمرة لمجموعة فر عية مخلقة ومحدبة من مساحة E(C) بقيم في مجموعة فر عية مضغوطة من E(C) بالمحاول على مجموعة فر عية مخلقة ومحدبة من مساحة E(C) بالمحتوطة من محتوطة من E(C) بالمحتوطة من محتوطة محتوطة من محتوطة من محتوطة من محتوطة من محتوطة محتوطة من محتوطة محتو

$$\lambda = \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z,y) + u(y)\}.$$

تفرد قيمة eigenvalue from من نظرية 1.

3. المشاكل التي تعتمد على معلمة

لا يبدو أنه تمت دراسة مشكلات min-plus eigenvalue التي تعتمد على معلمة حتى الأن.

الاقتراح 1 . فليكن مساحة متري مدمجة $\Omega\left(X,d
ight)$ مساحة طوبوغرافية و $K:lpha\mapsto K:lpha\mapsto K:lpha$ وظيفة مستمرة لل $(C^0(X^2,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ هو الرقم الحقيقى الوحيد المرتبط به $K:lpha\mapsto \lambda_lpha$ للحقيقى الوحيد المرتبط به $K:lpha\mapsto \lambda_lpha$ من $R:lpha\mapsto \Omega$ هي وظيفة مستمرة .

$$eta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x,y \in X} |K_lpha(x,y) - K_eta(x,y)| \leq arepsilon.$$

لدينا بعد ذلك

$$egin{aligned} orall (x_n) \in X^\mathbb{N}, & orall n \in \mathbb{N}^*, & rac{K_lpha(x_0,x_1) + \dots + K_lpha(x_{n-1},x_n)}{n} - arepsilon \leq rac{K_eta(x_0,x_1) + \dots + K_eta(x_{n-1},x_n)}{n} \ & \leq rac{K_lpha(x_0,x_1) + \dots + K_lpha(x_{n-1},x_n)}{n} + arepsilon. \end{aligned}$$

لنأخذ $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ من هذه التفاوتات ، ثم الحد الأدنى على الإطلاق الإطلاق التمام عليه من الصيغة (2) ذلك التأخذ

$$\lambda_{\alpha} - \varepsilon \leq \lambda_{\beta} \leq \lambda_{\alpha} + \varepsilon$$
.

الاقتراح 2 . فليكن مساحة متري مدمجة Ω (X,d) مجموعة فرعية محدبة من فضاء متجه حقيقي. $K_{lpha}\in C^0(X^2,\mathbb{R})$. ومن المفترض Ω مجموعة فرعية محدبة من فضاء متجه حقيقي الوحيد المرتبط به K_{lpha} بواسطة Ω N من N من N من N من N مي وظيفة مقعرة . N هو الرقم الحقيقي الوحيد المرتبط به N بواسطة N بواسطة N من عرق فظيفة مقعرة . N من N من N من N من N من وظيفة مقعرة .

$$\Omega=\mathbb{R}$$
 و $X=[0,1]$ يذكر هذه الخاصية ل $X=[0,1]$

ىلىل. مع $lpha\in\Omega$ ، $\mathbf{x}=(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ ، نحدد

$$S(\mathbf{x},n,lpha) = rac{K_lpha(x_0,x_1) + \cdots + K_lpha(x_{n-1},x_n)}{n} \,.$$

يتم تحديد [0,1] و $lpha,eta\in\Omega$. لدينا بعد ذلك

$$orall \mathbf{x} \in X^\mathbb{N}, \quad orall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(\mathbf{x}, n, t \cdot lpha + (1-t) \cdot eta) \geq t \, S(\mathbf{x}, n, lpha) + (1-t) S(\mathbf{x}, n, eta)$$

بسبب افتراض التقعر. مع خصائص lim inf ، نحصل

$$orall x \in X^{\mathbb{N}}, \quad \liminf_{n o +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot lpha + (1-t) \cdot eta) \geq t \ \liminf_{n o +\infty} S(\mathbf{x}, n, lpha) + (1-t) \ \liminf_{n o +\infty} S(\mathbf{x}, n, eta).$$

خذ الحد الأدنى على الإطلاق $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$ نحصل

$$\inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n o +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot lpha + (1-t) \cdot eta) \ \geq t \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n o +\infty} S(\mathbf{x}, n, lpha) + (1-t) \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n o +\infty} S(\mathbf{x}, n, eta).$$

 $\lambda_{t\cdotlpha+(1-t)\cdoteta}\geq t\,\lambda_lpha+(1-t)\lambda_eta$ ، (2) لذا ، وفقًا للصيغة

4. الأساليب العددية

يثبت الاقتراح التالي تقارب الطريقة العددية المستخدمة بواسطة [6].

$$K:X^2 o\mathbb{R}$$
 الاقتراح 3 . فليكن مساحة مترى مدمجة (X,d) . فلتكن دالة شفاه

 $\exists \kappa > 0, \quad \forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \le \kappa \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$

وفقًا لنظرية 2 ، فلنكن الرقم الحقيقي الوحيد الذي $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ النكن سلسلة من مجموعات فرعية محدودة من X_n مع $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ مع

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x,y) \mathop{\longrightarrow}_{p o +\infty} 0.$$

وفقًا لنظرية 2 ،

$$orall p \in \mathbb{N}, \quad \exists ! \, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists \, u_p : X_p o \mathbb{R}, \quad orall x \in X_p, \quad \min_{y \in X_p} \{K(x,y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

$$p o +\infty$$
 لدينا بعد ذلك $\lambda_p o \lambda o \lambda_p \le \lambda + \kappa \, h_p$ لدينا بعد ذلك

يرتبط هذا الاقتراح بوجهة نظر التحليل غير القياسي لـ [10] ، الذي يأخذ في الاعتبار القيم الكبيرة اللامتناهي ص .

(2) . $p \in \mathbb{N}$ يتم تحديد u

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n o + \infty} rac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \ , \ \lambda_p = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}_p} \liminf_{n o + \infty} rac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \ .$$

من جهة، $X_p \subset X^{\mathbb{N}}$ ، اذا لدينا $\lambda \leq \lambda_p$ من ناحية أخرى ، دعونا 0 < 3. يوجد

$$\lambda \leq \liminf_{n o +\infty} rac{K(x_0,x_1)+\cdots +K(x_{n-1},x_n)}{n} \leq \lambda + arepsilon\,.$$

بفرضية ، $|K(x_n,x_{n+1})-K(y_n,y_{n+1})|\leq \kappa\,h_p$ ، $orall n\in\mathbb{N}$ ، لكن K هو Lipschitz بغرضية ، $K(x_n,x_{n+1})-K(y_n,y_{n+1})=0$.

$$egin{aligned} \lambda_p & \leq \liminf_{n o + \infty} rac{K(y_0, y_1) + \dots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} \ & \leq \liminf_{n o + \infty} rac{K(x_0, x_1) + \dots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} + \kappa \, h_p \leq \lambda + arepsilon + \kappa \, h_p. \end{aligned}$$

 $\lambda_p \leq \lambda + \kappa \, h_p$ لأن $\lambda_p \leq \lambda + \kappa \, h_p$ نحصل ϵ

الاقتراح 4 لنكن مجموعة مع عناصر X_n و لنكن بعد ذلك الاقتراح 4 النكن مجموعة مع عناصر

$$\lambda_p = \min_{1 \leq n \leq q} \ \min_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in X_p^n} rac{K(x_0, x_1) + \dots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \,.$$

دليل. انظر [5] على سبيل المثال.

هو "الحد الأدنى من المتوسط الدوري". يتم حساب هذا المتوسط بعدد محدود من العمليات. والدليل مشابه للدليل (2). ومع ذلك ، ليست الصيغة (3) التي يتم استخدامها في الممارسة. هناك خوارزميات أفضل ، مثل خوارزمية كارب التي تتطلب $O(q^3)$ العمليات ، أو خوارزمية هوارد التي تبدو الأسرع [8]. لاحظ أنه في التحليل العددي لمشكلات القيمة الذاتية min-plus ، فإن المصفوفات المعنية ممثلئة وكبيرة جدًا. لذا فإن الخوارزميات الفعالة مرحب بها ، خاصة عندما تعتمد المشكلة على معلمة نختلف عنها في الأقسام التالية. من السهل جدًا برمجة خوارزمية Karp ، بينما يتوفر Howard في مربع أدوات Scilab's Maxplus. انظر $\frac{www}{vocq.inria.fr/scilab}$.

5. وظائف دورية

الاقتراح 5 لنكن مجموعة طوبولوجيا أبيلية (X,+) ، وهي وظيفة مقيدة أدناه $X:X^2 o \mathbb{R}$ مجموعة فرعية من X ومن المفترض

$$\forall p \in P, \ \forall (x,y) \in X^2, \ K(x+p,y+p) = K(x,y).$$

هي مجموعة الطوبو غر افية و هو حاصل من X بواسطة P . نحدد $(\mathbf{X},+)$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{u \in \mathbf{y}} K(x, y)$$
 (4)

 $.\in\mathbb{R}$ دع دع دع دع $x\in\mathbf{x}$

ه إذا كان لدينا وظيفة مستمرة $u:X o\mathbb{R}$ مع

$$orall p \in P, \quad orall x \in X, \quad u(x+p) = u(x)$$

و

$$\inf_{y\in X}\{K(x,y)+u(y)\}=\lambda+u(x), \tag{5}$$

ثم دالة القسمة $\mathbb{R} o \mathbb{R}$ استنتج من u هو مستمر و

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y}) \} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

على العكس من ذلك ، إذا $\mathbf{u}:\mathbf{X} o\mathbb{R}$ هي دالة مستمرة مع (6) ، ثم الوظيفة الدورية للفترة $u:X o\mathbb{R}$ ، خصم من \mathbf{u} مستمر ويتحقق (5).

$$X=\mathbb{Z}^n$$
 و $X=\mathbb{R}^n$ و $X=\mathbb{R}^n$ و $X=\mathbb{R}^n$ و $X=\mathbb{R}^n$ و $X=\mathbb{R}^n$ و [9] يثبت هذا الاقتراح ل

دليل أو لا ، لاحظ ذلك له هو تعريف جيد ، لأنه

$$orall x \in X, \quad orall y \in \mathbf{X}, \quad orall p \in P, \quad \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x+p,y) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x,y-p) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x,y).$$

يتم استنتاج الباقى بسهولة من حقيقة أنه إذا $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ و $x \in x$ ، نملك

$$\begin{split} \inf_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}} \{K(x,y) + u(y)\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}} \{K(x,y) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\}. \end{split}$$

6. أمثلة

للجميع $K_lpha\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ، $\in \mathbb{R}$ نحن نفتر ض ذلك

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad K_0(x+1, y+1) = K_0(x, y)$$
 (7)

$$K_{\alpha}(x,y) = K_0(x,y) - \alpha(x-y). \tag{8}$$

نحدد

$$orall lpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda_lpha = \inf_{(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}} \liminf_{n o +\infty} rac{K_lpha(x_0,x_1) + \dots + K_lpha(x_{n-1},x_n)}{n} \,.$$

منعوط. وفقًا للنظرية 2 والمقترح 5 ، λ_lpha هو الرقم الحقيقي الوحيد الذي توجد فيه وظيفة دورية للفترة 1 ، λ_lpha ، λ_lpha ، λ_lpha ، λ_lpha ، λ_lpha ، λ_lpha مع

$$orall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}} \{K_{lpha}(x,y) + u_{lpha}(y)\} = \lambda_{lpha} + u_{lpha}(x).$$

وفقًا للاقتراح $lpha \mapsto rac{d\lambda}{dlpha}(lpha^+)$ هي وظيفة مقعرة. لذلك لديها مشتق على الجانب الأيمن $rac{d\lambda}{dlpha}(lpha^+)$ للجميع $lpha \mapsto \lambda_lpha$ هي وظيفة متناقصة.

نماذج Frenkel و Kontorova

يتم تحديد $L\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ومن المفترض

$$orall x,y\in \mathbb{R}, \quad L(x+1,y+1)=L(x,y).$$

نحدد

$$orall lpha \in \mathbb{R}, \quad orall x,y \in \mathbb{R}, \quad K_lpha(x,y) = L(x,y) - lpha(x-y).$$

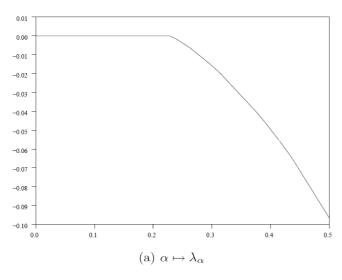
يتم التحقق من الافتراضات (7) و (8). حالة خاصة هي أن حيث $V\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هي دورية الفترة 1 و

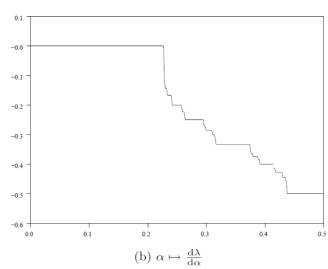
$$orall x,y\in \mathbb{R}, \quad L(x,y)=V(x)+rac{(y-x)^2}{2} \ .$$

يوضح الشكل 1 اعتماد λ_{lpha} فيما يتعلق lpha إذا $C[1-\cos(2\pi x)]$ مع معلمة أخرى C . اقترحت فرانكل وكونتوروفا هذا المثال في عام 1938. نأخذ $C=(4/3)/(2\pi)^2$. للتمييز \mathbb{R}/\mathbb{Z} للتمييز \mathbb{R}/\mathbb{Z} . نملك

$$\forall \alpha \in [0,1/2], \quad \forall x,y \in [0,1], \quad \inf_{p \in \mathbb{Z}} K_{\alpha}(x,y+p) = V(x) + \inf_{p \in \{-1,0,1\}} \bigg\{ \frac{(y-x+p)^2}{2} - \alpha(x-y-p) \bigg\}.$$

يوضح الشكل (أ) استمرارية $\lambda \mapsto \lambda_{\alpha}$. ويقترح الشكل (ب) ذلك $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ هي أيضًا وظيفة مستمرة لـ α ، ولكن باعتبار ها "سلم الشيطان". يبقى الشك حول ما إذا كان يمكن استنتاج ذلك من نتائج أوبري [1،2] وملاحظات جريفيث [13].





الشكل 1. الحد الأدنى من الطاقة من نموذج Frenkel و Kontorova.

تجانس معادلات هاملتون ـ جاكوبي

$$orall x,v\in \mathbb{R}, \quad L(x+1,v)=L(x,v).$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad K_0(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s)) \, ds \, ; \, \xi \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), \, \xi(0) = y, \, \xi(1) = x \right\},$$

$$K_{\alpha}(x, y) = K_0(x, y) - \alpha(x - y) \tag{10}$$

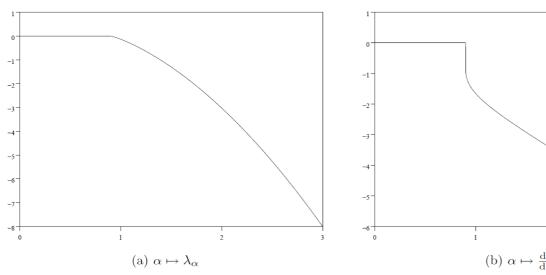
يتم التحقق من الافتراضات (7) و (8). حالة خاصة من هذا الوضع هو حيث $V\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هي دورية الفترة 1 و

$$orall x,v\in\mathbb{R},\quad L(x,v)=V(x)+rac{v^2}{2}\,.$$

في هذه الحالة ، هناك صيغة شبه صريحة للقيمة الذاتية λ_{lpha} (انظر [9] على سبيل المثال) ، أي

$$\lambda_lpha = egin{cases} \min V & orall \left[lpha
ight] \leq \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\min V]} \, dx \ \lambda, & \left[lpha
ight] = \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\lambda]} \, dx & orall \left[lpha
ight] > \int_0^1 \sqrt{2[V(x)-\min V]} \, dx. \end{cases}$$

يوضح الشكل 2 اعتماد λ_{lpha} فيما يتعلق lpha إذا $V(x)=1-\cos(2\pi x)$. لاحظ أوجه النشابه والاختلاف مع الشكل 1. ومن الغريب أن يتصرف نموذجان قريبان بشكل مختلف تمامًا.



(b) $\alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\alpha}$

في حالة حيث L(x,v) هو محدب بالنسبة إلى [v, 0] يبين أن مشكلة القيمة الذاتية (9) مع الوظيفة (10) تعادل مشكلة الخلية

$$Higg(x,lpha+rac{\partial u}{\partial x}(x)igg)=ar{H}(lpha),$$

مع $ar{H}(lpha) = -\lambda_lpha$ و

$$orall x, p \in \mathbb{R}, \quad H(x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x,v)\}.$$

تذكر أن هذه المشكلة للخلية تأتى من التجانس عندما arepsilon o 0 المعادلة

$$rac{\partial v}{\partial t}(t,x) + Higg(rac{x}{arepsilon},rac{\partial v}{\partial x}(t,x)igg) = 0.$$

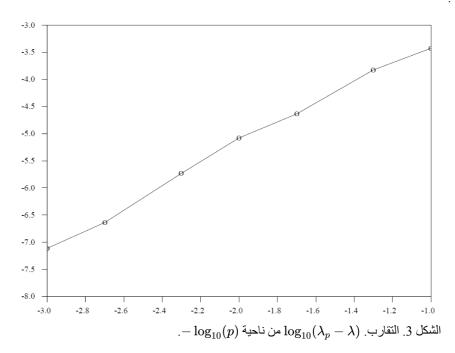
[11] يكشف روابط أخرى بين نظرية أوبري وماثر ومعادلات هاميلتون وجاكوبي. لاحظ أيضًا أن الطريقة العددية ، وهي سهلة إلى حد ما بالنسبة لنموذج Frenkel و Kontorova ، ليس من السهل التكيف مع حالة معادلات هاملتون وجاكوبي لأن النواة (10) يصعب حسابها بالفعل. في حالات معينة ، يمكن للمرء استخدام برنامج يحل مشاكل الحدود المرتبطة بمعادلة أويلر ولاغرانج لـ (10). هذا يحتاج إلى دراسة في مكان آخر.

سرعة التقارب

دعونا نعود إلى نماذج Frenkel و Kontorova. كما في [6] ، نختار الوظيفة الدورية للفترة 1 ، القطع المكافئ بالقطع $V:\mathbb{R} o V$ مع

$$V(x) = egin{cases} rac{c}{2} \, x^2 & -1/4 \leq x \leq 1/4, \ rac{c}{16} - rac{c}{2} ig(x - rac{1}{2} ig)^2 & 1/4 \leq x \leq 3/4 \end{cases}$$

مع
$$0 \geq 0$$
 منتعمل $h_p = 1/p$ مع $0 \leq 1$ لتقدير ها. وفقا للاقتراح 3 مع مع رايد مع $\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \leq \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p)$.



شكر

يشكر المؤلف لين يي-جيون وجامعة كولومبيا البريطانية على ورشة العمل المحفزة حول طرق اللزوجة للمعادلات التفاضلية الجزئية.

المراجع الببليوغرافية

- S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in Solitons and Condensed Matter Physics, A. R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer – Verlag, Berlin (1978) 264 – 277.
- 2. S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel Kontorova model and the devil's staircase. Physica D 7 (1983) 240 258.
- 3. N. Bacaër, Min plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In: System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731 – 736.
- 4. N. Bacaër, Can one use Scilab's max plus toolbox to solve eikonal equations? In: System Structure and Control 2001, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737 – 742.
- 5. F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, G. Cohen, Synchronization and Linearity. Wiley, Chichester (1992).
- 6. W. Chou, R. B. Griffiths, Ground states of one dimensional systems using effective potentials. Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 6234.
- 7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486-498.
- 8. J. Cochet Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J. P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max plus algebra. http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html
- 9. M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton Jacobi equations: additive eigenvalues and variational formula. Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 1095 1117.
- 10. P. I. Dudnikov, S. N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. Math. USSR Izv. 38 (1992) 91 105.
- 11. L. C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 1-33.
- 12. J. S. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
- 13. R. B. Griffiths, Frenkel Kontorova models of commensurate incommensurate phase transitions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII, H. van Beijeren, éd., North Holland, Amsterdam (1990) 69 110.
- 14. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays Bas (1997).

- 15. G. Namah, J.M. Roquejoffre, The "hump" effect in solid propellant combustion. Interfaces Free Bound. 2 (2000) 449-467.
- 16. S. J. Sheu, A. D. Wentzell,

On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications,

W. M. McEneaney et al. (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135 - 150.