



**HAL**  
open science

## Sur le genre d'une paire de substitutions

Alain Marie Jacques

► **To cite this version:**

Alain Marie Jacques. Sur le genre d'une paire de substitutions . Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1968, Série A, t. 267, pp.625-627. hal-01573917

**HAL Id: hal-01573917**

**<https://hal.science/hal-01573917>**

Submitted on 11 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS  
ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

ALGÈBRE. — *Sur le genre d'une paire de substitutions.*  
Note (\*) de M. ALAIN JACQUES, présentée par M. Henri Villat.

On établit une inégalité reliant les nombres d'orbites de plusieurs substitutions du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Un cas particulier de celle-ci équivaut à la relation d'Euler pour un graphe topologique associé à ces substitutions.

Dans un travail en cours de rédaction nous avons défini pour chaque paire  $(\alpha, \sigma)$  de substitutions de  $\mathfrak{S}_n$  ( $n < \infty$ ) un graphe topologique  $\Gamma(\alpha, \sigma)$ . Cette construction généralise celle d'Edmonds (1) qui ne peut s'appliquer que si  $\alpha$  est une involution ( $\alpha^2 = \varepsilon$ ) et elle conduit à considérer la quantité

$$(1) \quad g(\alpha, \sigma) = z(\alpha, \sigma) + \frac{1}{2} (z(\varepsilon) - z(\sigma) - z(\alpha) - z(\alpha, \sigma)),$$

où, de façon générale, pour  $\alpha, \beta, \dots, \sigma \in \mathfrak{S}_n$  la notation  $z(\alpha, \beta, \dots, \sigma)$  désigne le nombre d'orbites du sous-groupe  $\{\alpha, \beta, \dots, \sigma\}^*$  engendré par  $\{\alpha, \beta, \dots, \sigma\}$ . On montre que  $g(\alpha, \sigma)$  est le minimum du genre de toute surface orientable dans laquelle  $\Gamma(\alpha, \sigma)$  peut être plongé. Il s'en déduit que  $g(\alpha, \sigma)$  est un entier non négatif et dans la présente Note nous prouvons de façon purement algébrique un théorème qui admet ce résultat comme cas particulier.

THÉORÈME. — Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathfrak{S}_n$  ( $k \geq 1, n < \infty$ ). On a l'inégalité

$$(2) \quad z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) + \sum_{1 \leq i \leq k} z(\alpha_0, \alpha_i) - 2z(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leq (k-1)z(\alpha_0).$$

Nous utiliserons la généralisation suivante d'un lemme de Serret (2).

LEMME. — Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathfrak{S}_n$  ( $k \geq 1, n < \infty$ ) et  $\tau$  une transposition, la différence

$$d = z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) - z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \tau)$$

est égale à 0 ou  $\pm 1$ . Elle est non nulle si elle est égale à

$$z(\alpha_k) - z(\alpha_k \tau)$$

et, dans ce cas,

$$z(\alpha_0, \alpha_k) - z(\alpha_0, \alpha_k \tau) = z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) - z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \tau) = d.$$

Démonstration du théorème. — Le théorème est trivialement vrai pour  $k = 1$  et supposant qu'il est établi pour  $k' < k$  ( $k' \geq 1$ ), il est encore vrai si  $\alpha_k = 2$  puisque, dans ce cas, le membre de gauche de (2) est égal à la somme de

$$z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \varepsilon) = z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$$

et du membre de gauche de (2) pour  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ . Nous pouvons donc procéder par induction descendante sur le nombre des points fixes de  $\alpha_k$  en supposant le résultat établi quand  $\alpha_k$  a  $q' \geq q$  points fixes. Supposons que  $\alpha_k$  a  $q - 1 \geq 0$  points fixes ( $q \leq n$ ). Il existe deux points distincts  $a$  et  $b$  tels que  $\alpha_k a = b$ . Soit  $\tau$  la transposition échangeant  $a$  et  $b$  et  $\alpha'_k = \alpha_k \tau$ . Tous les points fixes de  $\alpha_k$  sont des points fixes de  $\alpha'_k$  et, en outre,  $a$  est point fixe de  $\alpha'_k$ . D'après l'hypothèse de récurrence :

$$z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha'_k) + \sum_{1 \leq i \leq k-1} z(\alpha_0, \alpha_i) + z(\alpha_0, \alpha'_k) - 2z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha'_k) \leq (k-1)z(\alpha_0).$$

En vertu du lemme,  $d = z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha'_k) - z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$  ou  $1$ .  
Si  $d = 0$

$$z(\alpha_0, \alpha'_k) - z(\alpha_0, \alpha_k) = 0 \text{ ou } 1$$

et

$$z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha'_k) - z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) = 0 \text{ ou } 1;$$

le théorème est alors vrai pour  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ , sinon

$$z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha'_k) - z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1,$$

d'où

$$z(\alpha_0, \alpha'_k) - z(\alpha_0, \alpha_k) = z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha'_k) - z(\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) = 1$$

et le théorème est encore vrai pour  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

On peut encore donner au théorème 1 la forme suivante :

**COROLLAIRE.** — Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_{r+s} \in \mathfrak{S}_n$ , on a l'inégalité

$$z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} \alpha_{r+2} \dots \alpha_{r+s}) + \sum_{1 \leq i \leq s} z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+i}) - 2z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) \leq (s-1)z(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

En effet, soit  $\alpha'_0$  une permutation dont les orbites sont celles du groupe engendré par  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ , il est clair que le théorème pour  $\alpha'_0, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}$  est équivalent au corollaire.

On déduit du théorème le cas particulier suivant ( $\alpha_0 = \varepsilon, \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta$ ) :

$$(3) \quad z(\alpha) + z(\beta) + z(\alpha\beta) - 2z(\alpha, \beta) \leq z(\varepsilon);$$

le genre dont nous avons parlé est donc un entier non négatif.

On en tire encore les résultats extrémaux suivants :

**PROPRIÉTÉ 1 :**

- (i)  $\text{Max} \{ z(\alpha) + z(\beta) - 2z(\alpha, \beta); \sigma = \alpha\beta \} = n - z(\sigma);$
- (ii)  $\text{Min} \{ z(\alpha) + z(\beta) - 2z(\alpha, \beta); \sigma = \alpha\beta \} = 0 \text{ ou } 1$  selon que  $\sigma$  est paire ou impaire.

L'énoncé (i) se déduit de (3) en remarquant que l'égalité est obtenue pour  $\alpha = \sigma$  et  $\beta = 1$ .

(ii) se déduit du fait que toute permutation paire est produit de deux cycles de longueur  $n$ <sup>(3)</sup>, et en conséquence, que toute permutation impaire est produit d'un cycle de longueur  $n$  et d'un cycle de longueur  $n - 1$ .

PROPRIÉTÉ 2 :

- (i)  $\text{Max} \{z(\alpha) + z(\beta); \sigma = \alpha\beta\} = n + z(\sigma);$   
 (ii)  $\text{min} \{z(\alpha) + z(\beta); \sigma = \alpha\beta\} = 2$  ou  $3$  selon que  $\sigma$  est paire ou impaire.

(ii) s'obtient de la même façon que précédemment et (i) dérive de (3) par la majoration

$$z(\alpha, \beta) \leq z(\alpha\beta).$$

Il résulte de (i) que l'on a

$$\text{Max} \{ \text{min} \{ z(\alpha), z(\beta) \}; \sigma = \alpha\beta \} \leq \left[ \frac{n + z(\sigma)}{2} \right],$$

où  $[a/b]$  note la partie entière de  $a/b$ , résultat que nous avons obtenu avec MM. C. Lenormand, A. Lentin et J. F. Perrot <sup>(\*)</sup>.

(\*) Séance du 7 octobre 1968.

(<sup>1</sup>) Cf. J. W. T. YOUNGS, *J. Math. Mech.*, 12, n° 2, 1963, p. 303-315.

(<sup>2</sup>) *Cours d'Algèbre supérieure*, 2, 3<sup>e</sup> édition Gauthier-Villars, Paris, 1866.

(<sup>3</sup>) *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 446.

(Institut de Programmation,  
 Faculté des Sciences,  
 9, quai Saint-Bernard, 75-Paris, 5<sup>e</sup>.)