



HAL
open science

ALGÈBRE. - Un résultat extrémal en théorie des permutations.

Alain Jacques, Claude Lenormand, André Lentin, Jean-François Perrot

► **To cite this version:**

Alain Jacques, Claude Lenormand, André Lentin, Jean-François Perrot. ALGÈBRE. - Un résultat extrémal en théorie des permutations. . Comptes Rendus Académie des Sciences, Paris, 1968, Série A, t. 266, pp.446-448. hal-01573916

HAL Id: hal-01573916

<https://hal.science/hal-01573916>

Submitted on 11 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ALGÈBRE. — *Un résultat extrémal en théorie des permutations.* Note (*) de MM. ALAIN JACQUES, CLAUDE LENORMAND, ANDRÉ LENTIN et JEAN-FRANÇOIS PERROT, présentée par M. Jean Leray.

On calcule un Max-min et un min-Max sur l'ensemble des décompositions d'une permutation donnée en un produit de deux permutations.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de n objets ⁽¹⁾; désignons par $z(\sigma)$ le nombre des cycles disjoints de σ , y compris les cycles de longueur 1. Le but de cette Note est d'établir le

THÉORÈME 1 :

(i) $\text{Max}\{\min\{z(\tau), z(\theta)\}; \tau, \theta \in \mathfrak{S}_n, \sigma = \tau\theta\} = [(n + z(\sigma))/2]$, où $[a/b]$ note la partie entière de a/b ;

(ii) $\min\{\text{Max}\{z(\tau), z(\theta)\}; \tau, \theta \in \mathfrak{S}_n; \sigma = \tau\theta\} = 1$ ou 2 selon que σ est paire ou impaire.

L'énoncé (i) se rencontre naturellement dans la théorie des équations dans les monoïdes libres. (ii) se déduit du résultat suivant, qui précise le théorème 1 de Ore ⁽²⁾ :

THÉORÈME 2. — *Toute permutation paire de n objets est le commutateur d'un cycle de longueur n et d'une involution.*

Les démonstrations font appel aux propriétés suivantes :

A. DÉFINITION. — Une décomposition $\sigma = \alpha\beta$ ($\sigma, \alpha, \beta \in \mathfrak{S}_n$) sera dite *normale* si elle satisfait les trois conditions :

(a) α et β sont des involutions, i. e. $\alpha^2 = \beta^2 = 1$;

(b) $|z(\alpha) - z(\beta)| \leq 1$;

(c) si $k = z(\sigma)$ et $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ sont les cycles de σ , alors $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ et $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$ avec pour $r = 1, 2, \dots, k$, $\gamma_r = \alpha_r \beta_r$ décomposition normale de γ_r . En particulier, $\sigma i = i$ entraîne $\alpha i = \beta i = i$.

PROPOSITION 1. — *Tout cycle $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ de longueur n admet exactement n décompositions normales $\gamma = \alpha\beta$. Si n est impair, α et β ont toujours chacune un seul point fixe. Si n est pair, dans la moitié des cas α a deux points fixes et β n'en a aucun, dans les autres cas c'est l'inverse qui se produit.*

En effet, si $\gamma = \alpha\beta$ est une décomposition normale, on déduit de (a) que α et β vérifient $\alpha\gamma\alpha^{-1} = \gamma^{-1}$ et $\beta = \alpha\gamma$. Par suite, si $\gamma = \alpha'\beta'$ est une autre décomposition normale de γ , on a $\alpha' = \alpha\xi$ et $\beta' = \beta\xi$ où ξ commute avec γ , donc $\xi = \gamma^k$: il n'y a donc pas plus de n décompositions normales différentes de γ . Considérons alors $\gamma = (1, 2, \dots, n)$ et, pour $n = 2p + 1$,

$$(1) \quad \alpha = (2, 2p+1)(3, 2p)\dots(p+1, p+2), \quad \beta = (1, 2p+1)(2, 2p)\dots(p, p+2),$$

où $\alpha 1 = 1$ et $\beta(p+1) = p+1$; et pour $n = 2p$,

$$(2) \quad \alpha = (1, 2p)(2, 2p-1)\dots(p, p+1), \quad \beta = (1, 2p-1)(2, 2p-2)\dots(p-1, p+1)$$

et

$$(2') \quad \begin{cases} \alpha = (1, 2p-1)(2, 2p-2)\dots(p-1, p+1), \\ \beta = (2p-1, 2p)(1, 2p-2)(2, 2p-3)\dots(p-1, p), \end{cases}$$

avec dans (2), $\beta(2p) = 2p$, $\beta p = p$ et dans (2'), $\alpha(2p) = 2p$, $\alpha p = p$. En remarquant que si $\gamma = \alpha\beta$ est une décomposition normale, $\gamma = \gamma^k \alpha \gamma^{-k} \gamma^k \beta \gamma^{-k}$ en est encore une, on voit que, pour $n = 2p + 1$, (1) donne naissance à n décompositions normales distinctes de γ et que, pour $n = 2p$, (2) et (2') en donnent p chacune, ce qui achève de prouver la proposition.

PROPOSITION 2. — *Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ admet au moins une décomposition normale, et toute décomposition normale $\sigma = \alpha\beta$ de σ vérifie*

$$z(\alpha) + z(\beta) = n + z(\sigma).$$

Remarquons d'abord qu'en vertu de (c) il suffit de vérifier la proposition pour les cycles et les produits de deux cycles disjoints de longueur paire : en effet, si σ est paire, on a nécessairement $z(\alpha) = z(\beta)$ d'après (b), et toute permutation impaire σ s'écrit $\sigma = \sigma'\gamma$ où σ' est paire et γ est un cycle de longueur paire.

Pour les cycles, le résultat découle de la proposition 1 et de (c). Pour $\sigma = \gamma'\gamma''$ il suffit d'écrire $\gamma' = \alpha'\beta'$, décomposition normale du type (2) et $\gamma'' = \alpha''\beta''$ du type (2'), de constater que la décomposition $\sigma = \alpha\beta$ où $\alpha = \alpha'\alpha''$ et $\beta = \beta'\beta''$ possède les propriétés requises et de s'assurer que, d'après (c), toute décomposition normale de σ est obtenue par ce procédé.

B. NOTATION. — Soit i un des n objets sur lesquels opère \mathfrak{S}_n ; définissons pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $r_i\sigma = (i, \sigma i)\sigma = \sigma(i, \sigma^{-1}i)$: on peut considérer r_i comme un opérateur projetant \mathfrak{S}_n sur son sous-groupe de degré $n - 1$ laissant fixe i , et l'on vérifie immédiatement la

PROPOSITION 3 :

— Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $n \geq 2$, $r_i(\sigma^{-1}) = (r_i\sigma)^{-1}$;

— Soit $\sigma = \tau\theta$: on a $r_i\sigma = r_i\tau r_i\theta$ si et seulement si i est point fixe de l'une au moins des trois permutations σ , τ , θ .

Dans la suite, pour i donné (resp. pour i et j donnés, $i \neq j$) f_i (resp. f_{ij}) notera un isomorphisme du sous-groupe de \mathfrak{S}_n laissant i fixe (resp. i et j fixes) sur \mathfrak{S}_{n-1} (resp. \mathfrak{S}_{n-2}); il est clair que $z(f_i r_i\sigma) = z(\sigma) - 1$ ou $z(\sigma)$ selon que i est point fixe de σ ou non.

Démonstration du théorème 1. — Désignons par $M(\sigma)$ le premier membre de (i) : d'après la proposition 2 et en vertu de (b), on a $M(\sigma) \geq [(n + z(\sigma))/2]$. On vérifie directement que pour $n = 1$ et $n = 2$ on a l'égalité.

Supposons que ce ne soit pas toujours vrai et soit N l'entier minimal pour lequel il existe trois permutations de N objets, σ , τ , θ avec $\sigma = \tau\theta$ et $z(\tau), z(\theta) > [(N + z(\sigma))/2]$. De $z(\sigma) \geq 1$ on déduit que τ et θ ont chacune

au moins un point fixe; si elles ont un point fixe commun, soit i , c'est aussi un point fixe de σ et l'on a $z(f_i\xi) = z(\xi) - 1$ pour $\xi = \sigma, \tau, \theta$, d'où, dans \mathfrak{S}_{N-1} , $f_i\sigma = f_i\tau f_i\theta$ avec $z(f_i\tau), z(f_i\theta) > [(N-1 + z(f_i\sigma))/2]$, ce qui contredit la minimalité de N ; sinon, soient $\tau i = i, \theta j = j, i \neq j$, i et j ne sont pas points fixes de σ : posons $\bar{\xi} = f_{ij}r_i r_j \xi$ pour $\xi = \sigma, \tau, \theta$, en vertu de la proposition 3, on a $\bar{\sigma} = \bar{\tau} \cdot \bar{\theta}$ et $z(\bar{\sigma}) \leq z(\sigma), z(\bar{\tau}) = z(\tau) - 1, z(\bar{\theta}) = z(\theta) - 1$, donc une décomposition dans \mathfrak{S}_{N-2} telle que $z(\bar{\tau}), z(\bar{\theta}) > [(N-2 + z(\bar{\sigma}))/2]$, ce qui contredit encore la minimalité de N et achève de prouver l'égalité (i).

Démonstration du théorème 2. — Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ une permutation paire et $\sigma = \alpha\beta$ une décomposition normale de σ . Un raisonnement par récurrence sur n montre qu'il existe un cycle γ de longueur n tel que $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$.

Le résultat est trivial pour $n=1$ et $n=2$. Soit donc $n > 2$. D'après la proposition 2, α et β ont chacune $z(\sigma)$ points fixes, donc si $\sigma \neq 1$ (le cas $\sigma = 1$ est trivial) elles ont chacune au moins un point fixe qui n'est pas point fixe de σ , soient i et j , $i = \alpha i, j = \beta j$ et $\sigma i \neq i, \sigma j \neq j$, donc $i \neq j, \alpha j \neq j$ et $\beta i \neq i$. Posons $\bar{\xi} = f_{ij}r_i r_j \xi$ pour $\xi = \sigma, \alpha, \beta$: on a $\bar{\sigma} \in \mathfrak{A}_{n-2}$ et en vertu de la proposition 3, $\bar{\sigma} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ est une décomposition normale, comme on le vérifie facilement. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe dans \mathfrak{S}_{n-2} $\bar{\gamma}$ cycle de longueur $n-2$ tel que $\bar{\gamma}^{-1}\bar{\alpha} \cdot \bar{\gamma} = \bar{\beta}$. On vérifie alors que $\gamma = (i, \alpha j) f_{ij}^{-1} \bar{\gamma} (j, \beta i)$ est un cycle de longueur n et que $\beta = \gamma^{-1}\alpha\gamma$.

(ii) se déduisant immédiatement de ce résultat, le théorème 1 est complètement démontré.

(*) Séance du 5 février 1968.

(1) *Notations*: 1 désignera la permutation identique; la composition de la permutation θ par la permutation τ sera notée $\tau\theta$; les minuscules grecques désigneront, en général, des permutations.

(2) O. ORE, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, 1951, p. 307-314. Voir aussi N. ITÔ, *Math. Japon*, 2, 1951, p. 59-60.

(Institut de Programmation,
Impasse d'Aubervilliers, Paris, 19^e.)