

广义最大正特征值问题的数值分析

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

摘要

我们对紧度量空间上具有无限视野的离散时间中的确定性优化问题感兴趣，该度量空间具有平均成本准则，其中涉及成本和时间这两个功能。我们首先将值 λ 的不同特征汇总为最大特征值和线性规划问题。然后我们证明了当空间离散时对 λ 产生的误差的界。

关键词：离散时间优化 平均费用；线性规划；数值分析

1.简介

我们对具有平均成本准则的无限时间的离散时间中的确定性优化问题感兴趣

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X 是一个紧度量空间。 K 和 T 是具有 $T > 0$ 。集合 X 是状态空间。 x_n 是系统在时间 n 的状态。 $K(x_n, x_{n+1})$ 是成本。 $T(x_n, x_{n+1})$ 是与状态转换相关的时间 $x_n \rightarrow x_{n+1}$ 。这个问题是由例子引起的

- 在物理学中（用于相变的Frenkel和Kontorova模型[8]），
- 在工程中（机器调度[10]），
- 经济学（[11]，农业[3]，旅行推销员）。

这里的目标是双重的。首先，我们将 λ 的不同特征收集为广义的最大加特征值问题（也称为Bellman最优方程）

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

作为线性规划问题。这些特征似乎仅在 $T = 1$ [7, 8, 13]或有限集 X [11, 14, 10, 4]的特定情况下得到证明。其次，当空间 X 离散时，我们证明了对 λ 的误差的界线。这概括了最近的工作[2]，假定 $T = 1$ 。

让我们提及一些与我们的研究有关的研究领域。在[17]中研究的Monge和Kantorovich的质量输运问题以及Kantorovich和Rubinstein的转运问题中出现了与下面的等式（4）极为相似的无限维线性规划问题。我们的问题连续不断地自然也有类似物。公式（4）的连续时间类似物介入例如拉格朗日系统的研究[12]。属性（7）也是奥布里和马瑟理论[5, 6]的基本组成部分。在随机控制理论的框架中也发现了平均成本问题[15, 16]。这些研究假设 $t = 1$ ，因此不涵盖我们的工作。请注意，这里没有必要使用无穷维[1]中的线性编程的复杂方法（弱拓扑，Alaoglu定理，超平面分离定理）来证明“强对偶性”。

2.分数和结果

让我们回顾一些定义。如果 X 是一个紧度量空间， $C^0(X)$ 是 X 上具有实数值的连续函数的空间。当具有最高范数时，它是一个Banach空间。 $\mathcal{M}(X)$ 是连续线性形式的空间 $C^0(X)$ 。如果 $\rho \in \mathcal{M}(X)$ ， $\rho \geq 0$ 表示 $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ 与 $u \geq 0$ 。方括号表示对偶性的乘积。

第一个定理的陈述需要一些特殊的符号。我们定义

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, (Q_1 u)(x, y) = u(x), (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

如果 $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$, 我们定义 $P_1\rho$ 和 $P_2\rho \in \mathcal{M}(X)$ 通过

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1\rho \rangle = \langle Q_1u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2\rho \rangle = \langle Q_2u, \rho \rangle.$$

如果 E 是一个集合, 并且 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 然后是记号 $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ 意思是 $x \in E$ 和 $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$ 。

定理1. 令 X 为一个紧致的度量空间, $K \in C^0(X^2)$ 和 $T \in C^0(X^2)$ 。我们猜测 $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ 。然后我们有

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

此外,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\}. \quad (4)$$

如果我们 (1), 那么 (λ, u) 达到 (3) 中的最小值。如果我们 (1) 有 $x_0 \in X$ 和

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

我们有

- (x_n) 达到 (2) 中的最大值;
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ 用定义

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

达到 (4) 中的最大值。

- 如果我们 (1) 有 $0 \leq i < j$,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

我们说定理1中定义的唯一实数 λ 是 (K, T) 的特征值。功能 u (1) 是 (K, T) 的“本征函数”。以下命题涉及转置问题。

主张1. 与定理1中的假设相同。我们定义

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

设 λ 为的特征值 (K, T) 和 λ' 的特征值 (K', T') 。然后我们有 $\lambda = \lambda'$ 。

以下定理解决了 (1) 的数值分析问题。回想一下, 一旦离散化, 就有众所周知的算法可以解决由此产生的有限问题, 例如[9]的迭代算法。

定理2. 令 (X, d) 是一个紧致的度量空间。 $K: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $T: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz常数的Lipschitz函数 C_K 和 C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\}$$

$$|T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

我们猜测 $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ 。设 λ 为的特征值 (K, T) 。 $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ 是 X 的有限子集的序列, 使得

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

根据定理1

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p: X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

我们定义 $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ 和 $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$ 。然后我们有

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

和 $\lambda_p \rightarrow \lambda$ 如果 $p \rightarrow +\infty$ 。

在第3节中回顾了一些可用于证明定理1的第一部分的结果。例如，这些结果可在[2]中找到。定理1的第一部分的证明在第4节中找到。我们证明了公式 (2) 和最优性 (x_n) 在第5节中，我们证明了公式 (3)，(4) 和 (λ, u) 和的 ρ^* 在第6节中，通过概括[10]的证明。我们在第7节中证明了属性 (7)，在第8节中证明了命题1，在第9节中证明了定理2。最后，我们在第10节中提出了对解 (λ, u) (1)。证据在于从更新的成本问题开始到极限。与第4节相比，此方法的优点是它不使用下面的命题4（基于Schauder的不动点定理）。它仅使用Banach的不动点定理。

3.已知结果

命题2。 令 X 为一个紧致的度量空间， $K \in C^0(X)$ 。我们有

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

此外，

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

命题3。 令 X 为紧致度量空间。 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$ 。我们猜测 $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ 是凸函数。对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_\alpha$ 是命题2的唯一实数。 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ 的 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数。

4.定理1的第一部分的证明

我们定义

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

根据命题2，

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

使用公式 (8)，

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

但 $T \geq 0$ 。 $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$ 的 $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ 因此是一个递减函数。公式 (9) 然后表明 $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ 的 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 也是一个递减函数。 K_λ 是 λ 的线性函数，因此是凸函数。命题3表明 Λ 是一个凸函数，因此也是一个连续函数。

我们取等于的平稳序列 x_0 对于 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 在 (9) 中。然后我们有

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

但 $T(x_0, x_0) > 0$ 。所以我们有 $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ 如果 $\lambda \rightarrow -\infty$ 和 $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ 如果 $\lambda \rightarrow -\infty$ 。

由于 X 是紧的并且函数 T 是连续的并且严格为正，所以我们有

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

我们定义

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

令 $\varepsilon > 0$ 。我们有

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

根据公式 (9), $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$ 。

由于连续函数 Λ 具有正值和负值, $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \Lambda(\lambda^*) = 0$ 。最后,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

这证明了定理1的存在部分。唯一性由公式 (2) 得出, 这将在下一部分中证明。

5.公式 (2) 的证明

• 我们选择 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 。根据 (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

让我们加上前 N 个不等式。我们获得

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

但 $T > 0$ 。所以我们有

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

因为 $T \geq \delta_T > 0$, 我们有 $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ 如果 $N \rightarrow +\infty$ 。 u 是一个有界函数。所以我们得到

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

但 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 是任意的。所以我们有

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

• 我们选择 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 与 (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

我们添加这些方程, 我们得到

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

因此, 我们有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

用 (10) 证明了公式 (2) 以及 (x_n) 达到最大。

6.公式 (3) 和 (4) 的证明

我们定义

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\}.$$

我们有

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1v - Q_2v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

所以我们有

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

通过定理1的第一部分, 我们知道 $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ 与 (1)。我们有

$\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. 所以我们有 $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ 和

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

从 (6), 我们可以很容易地看到 $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$, $\rho^* \geq 0$ 和 $\langle T, \rho^* \rangle = 1$ 。我们有

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1\rho^* \rangle &= \langle Q_1u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2\rho^* \rangle &= \langle Q_2u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

所以我们有 $\langle u, P_1\rho^* \rangle = \langle u, P_2\rho^* \rangle$ (因为 u 有界), 和 $P_1\rho^* = P_2\rho^*$ 。因此, 我们有 $\rho^* \in E$ 。此外,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

因为 (x_n) 达到 (2) 中的最大值。所以我们有

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

结论,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* 达到最大值 (λ, u) 达到最小值。

7.证明 (7)

我们猜测 $0 \leq i < j$ 和 $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 与 $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ 。我们有

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

我们添加这些方程式, 然后使用 $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ 。我们获得

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8.命题证明2

我们选择一个本征函数 $u \in C^0(X)$ 的 (K, T) 。我们选择一个本征函数 $u' \in C^0(X)$ 的 (K', T') 。我们选择 $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$ 。存在 $x_1 \in X$ 与

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

注意

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

减去这两行。我们获得

$$(\lambda - \lambda')T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

所以我们有 $\lambda - \lambda' \leq 0$ 和 $\lambda \leq \lambda'$ 。如果我们交换 (K, T) 和 (K', T') ，我们获得 $\lambda' \leq \lambda$ 。所以我们有 $\lambda = \lambda'$ 。

9.定理证明3

我们选择 $p \in \mathbb{N}$ 。根据公式 (2)，

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

$$\lambda_p = \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}.$$

一方面， $X_p \subset X$ 。因此很明显 $\lambda \geq \lambda_p$ 。另一方面，我们选择 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 。根据定义 h_p ，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

但是 K 和 T 是 Lipschitz 函数

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq C_K h_p,$$

$$|T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| \leq C_T h_p.$$

为了简化，我们定义 $x = (x_n)$ ， $y = (y_n)$ ，

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

和相同的 $T_N(x)$ 。然后我们有

$$\forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| = \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right|$$

$$\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}.$$

因此，我们有

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

$$\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p.$$

但 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 是任意的。因此，我们获得了定理3的第二个不等式。

10.存在的替代证据：折现成本法

引理1。

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

证据。 让 $\alpha \in]0, 1[$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$ 。我们定义

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

由于 K 和 T 是一致连续的, $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$ 。我们有

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

所以对称 $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$ 。因为 $\alpha \in]0, 1[$, Banach 不动点定理表明 $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$, $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$ 。

引理2。 我们选择 $x_0 \in X$ 。我们有 $\forall \alpha \in]0, 1[, \exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \exists u_\alpha \in C^0(X)$, $u_\alpha(x_0) = 0$ 和

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

此外,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

证据。 让 $\alpha \in]0, 1[$ 。对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们选择 $v_{\alpha, \lambda}$ 如引理1中, 我们定义

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

根据引理1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

我们有

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

为了证明这一点, 我们有

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

我们将这个方程乘以 α^n 。我们总结并使用 $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$ 。我们获得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

如果在 (14) 中所有 n 都相等, 则不平等就是相等。这证明 (13)。

根据 (13), $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$ 是凸函数 (因此是连续函数) 和递减函数, 因为它是递减的 λ 线性函数的上包络。此外,

- $r_{\alpha, \lambda} < 0$ 如果 $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha, \lambda} > 0$ 如果 $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$ 。

所以我们有

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

我们定义 $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$ 。然后 u_α 是 (11) 的解。根据 (15),

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

如果平等

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

引理3. 我们选择 $x_0 \in X$ 。我们有： $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

证据。首先，公式 (12) 表示对于所有 $\alpha \in]0, 1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$ 。我们将展示： $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ 是一个连续家庭。让 $x \in X$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ 。由于函数 K 和 T 是一致连续的，

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

用 $d(x, x') \leq \eta$ ，我们有

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

对称地 $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$ 。 $(u_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ 因此是一个连续家庭。

我们将证明 $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2,1[}$ 是一个统一的家庭。有了 (11)，

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

所以我们有 $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ 。对于 (11)，我们也有

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

所以我们有 $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ 和 $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2,1[}$ 是一致有界的。

我们选择 $\alpha_n \in]1/2, 1[$ 与 $\alpha_n \rightarrow 1^-$ 如果 $n \rightarrow +\infty$ 。根据定理 Bolzano 阿斯科利定理， $\exists (\alpha_{\phi(n)})$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists u \in C^0(X)$ 与

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$ 一致地收敛到 u 。

取 (11) 中的极限。我们得到 (16)。用 $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$ ，我们还有 $u(x_0) = 0$ 。最后，事实是 $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ (并且不仅针对子序列) 满足 λ (16) 的唯一性，这已在第5节中得到证明。

书目参考

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.

6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, *Adv. in Appl. Math.* 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, *Phys. Rev. B* 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. –P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, *Minimax Algebra*, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : *Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967*, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, *C.R. Acad. Sci. Paris I* 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, *Idempotent Analysis and its Applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : *Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967*, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, *Discrete – time Markov Control Processes*, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, *Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes*, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschemdorf, *Mass Transportation Problems*, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), *Idempotent Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.