

Численный анализ обобщенных задач с максимальным и собственным значениями

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Baccar

резюме

Нас интересует проблема детерминированной оптимизации в дискретном времени с бесконечным горизонтом на компактном метрическом пространстве с критерием средней стоимости, включающим две функции: стоимость и время. Сначала мы объединяем различные характеристики значения λ как собственное значение max-plus и как задачу линейного программирования. Затем мы докажем оценку ошибки, допущенной на λ при дискретизации пространства.

Ключевые слова: оптимизация в дискретном времени; Средняя стоимость; Линейное программирование; Числовой анализ

1. Введение

Нас интересует проблема детерминированной оптимизации в дискретном времени на бесконечном горизонте с критерием средней стоимости

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X - компактное метрическое пространство. K и T являются непрерывными функциями с $T > 0$. Множество X является пространством состояний. x_n это состояние системы в момент времени n . $K(x_n, x_{n+1})$ это стоимость. $T(x_n, x_{n+1})$ время, связанное с переходом состояния $x_n \rightarrow x_{n+1}$. Проблема мотивирована примерами

- в физике (модели Френкеля и Конторова для фазовых переходов [8]),
- в машиностроении (машинное планирование [10]),
- в экономике ([11], сельское хозяйство [3], коммивояжер).

Цель здесь двоякая. Во-первых, мы собираем различные характеристики λ как обобщенную задачу на собственные значения max-plus (также называемую уравнением оптимальности Беллмана).

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

и как проблема линейного программирования. Эти характеристики, по-видимому, были продемонстрированы только в частном случае, когда $T = 1$ [7, 8, 13] или конечного множества X [11, 14, 10, 4]. Во-вторых, мы показываем оценку для ошибки, сделанной на λ , когда пространство X дискретизировано. Это обобщает недавнюю работу [2], в которой предполагается, что $T = 1$.

Давайте упомянем некоторые области исследований, связанных с нашим исследованием. Задачи линейного программирования в бесконечной размерности, которые очень похожи на уравнение (4) ниже, появляются в задаче о массовом переносе Монжа и Канторовича и в проблеме перегрузки Канторовича и Рубинштейна, изученной в [17]. Естественно, есть и аналоги в непрерывном времени нашей проблемы. Непрерывный временной аналог формулы (4) вмешивается, например, в исследование лагранжевых систем [12]. Свойство (7) также является основным компонентом теории Обри и Мазера [5, 6]. Проблемы средней стоимости также находятся в рамках теории стохастического управления [15, 16]. Эти исследования предполагают, что $T = 1$ и поэтому не охватывают нашу работу. Отметим, что здесь нет необходимости использовать сложные методы линейного программирования в бесконечном измерении [1] (слабые топологии, теорема Алаоглу, теорема разделения по гиперплоскости), чтобы доказать «сильную двойственность».

2. Счета и результаты

Напомним некоторые определения. Если X компактное метрическое пространство, $C^0(X)$ пространство непрерывных функций на X с действительными значениями. Это банахово пространство, когда оно снабжено нормой супремума. $\mathcal{M}(X)$ пространство непрерывных линейных форм над $C^0(X)$. Если $\rho \in \mathcal{M}(X)$ $\rho \geq 0$ означает, что $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ с $u \geq 0$, Квадратные скобки обозначают произведение двойственности.

Утверждение первой теоремы требует некоторых специальных обозначений. Мы определяем

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

Если $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$ мы определяем $P_1 \rho$ а также $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$ по

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

Если E является множеством и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ то обозначение $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ Значит это $x \in E$ а также $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$,

Теорема 1. Пусть X - компактное метрическое пространство, $K \in C^0(X^2)$ а также $T \in C^0(X^2)$, Мы предполагаем $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$, У нас тогда

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

Более того,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

Если у нас есть (1), то (λ, u) достичь минимума в (3). Если мы имеем $x_0 \in X$ а также

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

у нас есть

- (x_n) достигает максимума в (2);
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ определяется с

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

достигает максимума в (4).

- если мы имеем $0 \leq i < j$,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

Мы говорим, что единственное действительное число λ , определенное в теореме 1, является собственным значением (K, T) . Функция u с (1) является "собственной функцией" из (K, T) . Следующее предложение касается транспонированной проблемы.

Предложение 1. Те же гипотезы, что и в теореме 1. Определим

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

Пусть λ будет собственным значением (K, T) а также λ' собственное значение (K', T') , У нас тогда $\lambda = \lambda'$,

Следующая теорема касается вопроса о численном анализе (1). Напомним, что после дискретизации существуют хорошо известные алгоритмы решения конечной задачи, например, алгоритм итерации из [9].

Теорема 2. Пусть (X, d) компактное метрическое пространство. $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ а также $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ являются липшицевыми функциями с липшицевыми константами C_K а также C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \\ |T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Мы предполагаем $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$, Пусть λ будет собственным значением (K, T) , $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ является последовательностью конечных подмножеств X такой, что

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Согласно теореме 1

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

Мы определяем $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ а также $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$, У нас тогда

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

а также $\lambda_p \rightarrow \lambda$ если $p \rightarrow +\infty$,

Некоторые результаты, полезные для доказательства первой части теоремы 1, приведены в разделе 3. Эти результаты приведены, например, в [2]. Доказательство первой части теоремы 1 приведено в разделе 4. Докажем формулу (2) и оптимальность (x_n) в разделе 5. Докажем формулы (3), (4) и оптимальность (λ, u) и из ρ^* в разделе 6, обобщив доказательства из [10]. Свойство (7) мы докажем в разделе 7, предложение 1 в разделе 8, теорема 2 в разделе 9. Наконец, в разделе 10 мы предлагаем альтернативное доказательство существования решения (λ, u) из (1). Доказательство основывается на переходе к пределу, начиная с обновленной проблемы стоимости. Преимущество этого подхода по сравнению с разделом 4 состоит в том, что он не использует предложение 4 ниже (которое основано на теореме Шаудера о неподвижной точке). Он использует только теорему Банаха о неподвижной точке.

3. Известные результаты

Предложение 2. Пусть X - компактное метрическое пространство и $K \in C^0(X)$, У нас есть

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

Более того,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

Предложение 3. Пусть X - компактное метрическое пространство. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$, Мы предполагаем $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ является выпуклой функцией. Для всех $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_\alpha$ является единственным действительным числом предложения 2. Тогда мы имеем $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой функцией.

4. Доказательство первой части теоремы 1

Мы определяем

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

Согласно предложению 2,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

С формулой (8),

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_{\lambda}(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Но $T \geq 0$, $\lambda \mapsto K_{\lambda} = K - \lambda T$ из $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ поэтому является убывающей функцией. Формула (9) тогда показывает, что $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ также является убывающей функцией. K_{λ} является линейной и, следовательно, выпуклой функцией от λ . Предложение 3 показывает, что Λ является выпуклой функцией, поэтому также является непрерывной функцией.

Возьмем стационарную последовательность, равную x_0 за $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ в (9). У нас тогда

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_{\lambda}(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Но $T(x_0, x_0) > 0$, Итак, мы имеем $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ если $\lambda \rightarrow -\infty$, а также $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ если $\lambda \rightarrow -\infty$,

Поскольку X компактно и функция T непрерывна и строго положительна, мы имеем

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

Мы определяем

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. У нас есть

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_{\lambda}(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

Согласно формуле (9) $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$, $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$,

Поскольку непрерывная функция Λ принимает положительные и отрицательные значения, $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$, $\Lambda(\lambda^*) = 0$, В заключение,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

Это доказывает существование части теоремы 1. Единственность вытекает из формулы (2), которая доказана в следующем разделе.

5. Доказательство формулы (2)

- Мы выбираем $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, Согласно (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Добавим первые N неравенств. Мы получаем

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Но $T > 0$, Итак, мы имеем

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Потому что $T \geq \delta_T > 0$, у нас есть $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ если $N \rightarrow +\infty$, u является ограниченной функцией. Итак, мы получаем

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Но $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ был произвольным. Итак, мы имеем

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

- Мы выбираем $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ с (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Добавляем эти уравнения и получаем

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

У нас есть таким образом

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

С помощью (10) это доказывает формулу (2) и тот факт, что (x_n) достигает максимума.

6. Доказательство формул (3) и (4)

Мы определяем

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\}.$$

У нас есть

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1v - Q_2v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

Итак, мы имеем

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Из первой части теоремы 1 мы знаем, что есть $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ с (1). У нас есть $\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. Итак, мы имеем $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ а также

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

Из (6) легко увидеть, что $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$, $\rho^* \geq 0$ а также $\langle T, \rho^* \rangle = 1$, У нас есть

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1\rho^* \rangle &= \langle Q_1u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2\rho^* \rangle &= \langle Q_2u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем $\langle u, P_1\rho^* \rangle = \langle u, P_2\rho^* \rangle$ (потому что u ограничен), и $P_1\rho^* = P_2\rho^*$, У нас есть таким образом $\rho^* \in E$, Более того,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

потому что (x_n) достигает максимума в (2). Итак, мы имеем

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

В заключении,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* достигает максимума и (λ, u) достигает минимума.

7. Доказательство (7)

Мы предполагаем $0 \leq i < j$ а также $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ с $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$, У нас есть

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

Добавляем эти уравнения и используем $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$, Мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8. Доказательство предложения 2

Мы выбираем собственную функцию $u \in C^0(X)$ из (K, T) , Мы выбираем собственную функцию $u' \in C^0(X)$ из (K', T') , Мы выбираем $x_0 \in \arg\max_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$, Это существует $x_1 \in X$ с

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Обратите внимание, что

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Вычтите эти две строки. Мы получаем

$$(\lambda - \lambda')T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

Итак, мы имеем $\lambda - \lambda' \leq 0$ а также $\lambda \leq \lambda'$, Если мы обменяемся (K, T) а также (K', T') , мы получаем $\lambda' \leq \lambda$, Итак, мы имеем $\lambda = \lambda'$,

9. Доказательство теоремы 3

Мы выбираем $p \in \mathbb{N}$, Согласно формуле (2)

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

С одной стороны, $X_p \subset X$, Поэтому ясно, что $\lambda \geq \lambda_p$, С другой стороны, мы выбираем $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, Согласно определению h_p ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

Но K и T являются липшицевыми функциями

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq C_K h_p, \\ |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| \leq C_T h_p.$$

Чтобы упростить, мы определяем $x = (x_n)$, $y = (y_n)$,

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

и то же самое для $T_N(x)$, У нас тогда

$$\forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| = \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ \leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ \leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}.$$

У нас есть таким образом

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p.$$

Но $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ был произвольным. Таким образом, мы получаем второе неравенство теоремы 3.

10. Альтернативное доказательство существования: метод дисконтированной стоимости

Лемма 1.

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in]0, 1[$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, Мы определяем

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Поскольку K и T равномерно непрерывны, $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$, У нас есть

$$\forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) \leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ \leq \alpha \|v_1 - v_2\|.$$

Так по симметрии, $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$, Потому что $\alpha \in]0, 1[$, Теорема Банаха о неподвижной точке показывает $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$, $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$,

Лемма 2. Мы выбираем $x_0 \in X$, У нас есть $\forall \alpha \in]0, 1[, \exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \exists u_\alpha \in C^0(X), u_\alpha(x_0) = 0$ а также

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

Более того,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in]0, 1[$, Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, мы выбираем $v_{\alpha, \lambda}$ как в лемме 1, и мы определяем

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

Согласно лемме 1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

У нас есть

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

Чтобы доказать это, мы имеем

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

Умножим это уравнение на α^n , Суммируем и используем $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$, Мы получаем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

Неравенство есть равенство, если в (14) есть равенство для всех n . Это доказывает (13).

Согласно (13), $\lambda \mapsto r_{\alpha,\lambda}$ является выпуклой (следовательно, непрерывной) функцией и убывающей функцией, поскольку она является верхней оболочкой убывающих линейных функций от λ . Более того,

- $r_{\alpha,\lambda} < 0$ если $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha,\lambda} > 0$ если $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$,

Итак, мы имеем

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha,\lambda_\alpha} = 0.$$

Мы определяем $u_\alpha = u_{\alpha,\lambda_\alpha}$, u_α является решением (11). Согласно (15),

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

с равенством, если

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

Лемма 3. Мы выбираем $x_0 \in X$, У нас есть $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Во-первых, из формулы (12) следует, что для всех $\alpha \in]0, 1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$. Мы собираемся показать: $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ это равноправная семья. Пусть $x \in X$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Поскольку функции K и T равномерно непрерывны,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

С $d(x, x') \leq \eta$, у нас есть

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

и по симметрии, $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$, $(u_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ следовательно, это равноправная семья.

Мы покажем, что $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ это равномерно ограниченная семья. С (11),

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \quad \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Итак, мы имеем $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. С помощью (11) мы также имеем

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Итак, мы имеем $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ а также $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ равномерно ограничен.

Мы выбираем $\alpha_n \in]1/2, 1[$ с $\alpha_n \rightarrow 1^-$ если $n \rightarrow +\infty$. Согласно теореме Bolzano и теореме Асколи, $\exists (\alpha_{\phi(n)}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$ с

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$ равномерно сходится к u ,

Возьмите предел в (11). Мы получаем (16). С $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$, у нас также есть $u(x_0) = 0$. Наконец, тот факт, что $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ (и не только для подпоследовательности) вытекает из единственности λ , которая удовлетворяет (16), что было доказано в разделе 5.

Библиографические ссылки

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Baccar, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Baccar, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. –P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.

14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.