

# Análise numérica de problemas generalizados de autovalores max-plus

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

## resumo

Estamos interessados no problema de otimização determinística em tempo discreto com horizonte infinito em um espaço métrico compacto com um critério de custo médio que envolve duas funções, custo e tempo. Primeiro, reunimos as diferentes caracterizações do valor  $\lambda$  como um valor próprio máximo mais e como um problema de programação linear. Então, provamos um limite ao erro cometido em  $\lambda$  quando o espaço é discretizado.

Keywords: otimização em tempo discreto; Custo médio; Programação linear; Análise numérica

## 1. Introdução

Estamos interessados no problema de otimização determinística em tempo discreto em um horizonte infinito com um critério de custo médio

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

$X$  é um espaço métrico compacto.  $K$  e  $T$  são funções contínuas com  $T > 0$ . O conjunto  $X$  é o espaço de estado.  $x_n$  é o estado do sistema no momento  $n$ .  $K(x_n, x_{n+1})$  é o custo.  $T(x_n, x_{n+1})$  é o tempo associado à transição de estado  $x_n \rightarrow x_{n+1}$ . O problema é motivado por exemplos

- em física (modelos de Frenkel e Kontorova para transições de fase [8]),
- em engenharia (programação de máquinas [10]),
- em economia ([11], agricultura [3], vendedor ambulante).

O objetivo aqui é duplo. Primeiro, coletamos as diferentes caracterizações de  $\lambda$  como um problema generalizado de autovalor max-plus (também chamado de equação de otimalidade de Bellman)

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

e como um problema de programação linear. Essas caracterizações parecem ter sido demonstradas apenas no caso particular em que  $T = 1$  [7, 8, 13] ou de um conjunto finito  $X$  [11, 14, 10, 4]. Segundo, mostramos um limite para o erro cometido em  $\lambda$  quando o espaço  $X$  é discretizado. Isso generaliza um trabalho recente [2] que supunha  $T = 1$ .

Vamos mencionar algumas áreas de pesquisa relacionadas ao nosso estudo. Problemas de programação linear em dimensões infinitas que se assemelham à equação (4) abaixo aparecem no problema de transporte de massa de Monge e Kantorovich e no problema de transbordo de Kantorovich e Rubinstein estudado em [17]. Naturalmente, também existem análogos no tempo contínuo do nosso problema. Um análogo de tempo contínuo da fórmula (4) intervém, por exemplo, no estudo de sistemas lagrangianos [12]. A propriedade (7) também é um ingrediente básico da teoria de Aubry e Mather [5, 6]. Problemas de custo médio também são encontrados na estrutura da teoria do controle estocástico [15, 16]. Esses estudos assumem que  $T = 1$  e, portanto, não cobrimos nosso trabalho. Note que aqui, não será necessário usar métodos sofisticados de programação linear em dimensão infinita [1] (topologias fracas, teorema de Alaoglu, teorema de separação por hiperplano) para provar a "forte dualidade".

## 2. Pontuações e resultados

Vamos relembrar algumas definições. Se  $X$  é um espaço métrico compacto,  $C^0(X)$  é o espaço de funções contínuas em  $X$  com valores reais. É um espaço de Banach quando é fornecido com a norma do supremo.  $\mathcal{M}(X)$  é o espaço de formas lineares contínuas sobre  $C^0(X)$ . Se  $\rho \in \mathcal{M}(X)$ ,  $\rho \geq 0$  significa que  $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$  com  $u \geq 0$ . Os colchetes denotam o produto da dualidade.

A afirmação do primeiro teorema requer algumas notações especiais. Nós definimos

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

Se  $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$ , definimos  $P_1 \rho$  e  $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$  de

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

Se  $E$  é um conjunto e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , então a notação  $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$  significa que  $x \in E$  e  $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$ .

**Teorema 1.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto,  $K \in C^0(X^2)$  e  $T \in C^0(X^2)$ . Nós presumimos  $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ . Nós temos então*

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

Além disso,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

Se tivermos (1), então  $(\lambda, u)$  atingir o mínimo em (3). Se tivermos  $x_0 \in X$  e

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

temos

- $(x_n)$  atinge o máximo em (2);

- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$  definido com

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

atinge o máximo em (4).

- se tiver-mos  $0 \leq i < j$ ,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

Dizemos que o único número real  $\lambda$  definido no teorema 1 é o autovalor de  $(K, T)$ . Uma função  $u$  com (1) é uma "função própria" de  $(K, T)$ . A proposição a seguir diz respeito ao problema transposto.

**Proposição 1.** Mesmas hipóteses que no Teorema 1. Definimos

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

Seja  $\lambda$  o autovalor de  $(K, T)$  e  $\lambda'$  o autovalor de  $(K', T')$ . Nós temos então  $\lambda = \lambda'$ .

O teorema a seguir aborda a questão da análise numérica de (1). Lembre-se de que, uma vez discretizados, existem algoritmos conhecidos para resolver o problema finito resultante, por exemplo, o algoritmo de iteração de [9].

**Teorema 2.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto.  $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções Lipschitz com constantes Lipschitz  $C_K$  e  $C_T$

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \\ |T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Nós presumimos  $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ . Seja  $\lambda$  o autovalor de  $(K, T)$ .  $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de subconjuntos finitos de  $X$ , de modo que

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

De acordo com o Teorema 1,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

Nós definimos  $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$  e  $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$ . Nós temos então

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left( \frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

e  $\lambda_p \rightarrow \lambda$  e  $u_p \rightarrow u$  se  $p \rightarrow +\infty$ .

Alguns resultados úteis para provar a primeira parte do Teorema 1 são lembrados na seção 3. Esses resultados são encontrados, por exemplo, em [2]. A prova da primeira parte do Teorema 1 é encontrada na seção 4. Provamos a fórmula (2) e a otimização de  $(x_n)$  na seção 5. Provamos as fórmulas (3), (4) e a otimalidade de  $(\lambda, u)$  e de  $\rho^*$  na seção 6, generalizando as provas de [10]. Provamos a propriedade (7) na seção 7, proposição 1 na seção 8, teorema 2 na seção 9. Finalmente, propomos na seção 10 uma prova alternativa da existência de uma solução  $(\lambda, u)$  de (1). A prova baseia-se em uma passagem para o limite a partir de um problema de custo atualizado. Uma vantagem dessa abordagem em comparação com a da seção 4 é que ela não usa a proposição 4 abaixo (que é baseada no teorema do ponto fixo de Schauder). Ele usa apenas o teorema do ponto fixo de Banach.

### 3. Resultados conhecidos

**Proposição 2.** Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $K \in C^0(X)$ . Nós temos

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

Além disso,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

**Proposição 3.** Seja  $X$  um espaço métrico compacto.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$ . Nós presumimos  $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$  é uma função convexa. Para todos os  $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_\alpha$  é o único número real da proposição 2. Temos então  $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$  do  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa.

### 4. Prova da primeira parte do Teorema 1

Nós definimos

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

De acordo com a proposição 2,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Com a fórmula (8),

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Mas  $T \geq 0$ .  $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$  do  $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$  é, portanto, uma função decrescente. A fórmula (9) mostra então que  $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$  do  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também é uma função decrescente.  $K_\lambda$  é uma função linear e, portanto, convexa de  $\lambda$ . A proposição 3 mostra que  $\Lambda$  é uma função convexa e, portanto, também uma função contínua.

Tomamos a sequência estacionária igual a  $x_0$  para  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  em (9). Nós temos então

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Mas  $T(x_0, x_0) > 0$ . Então nós temos  $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$  E se  $\lambda \rightarrow -\infty$  e  $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$  E se  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

Como  $X$  é compacto e como a função  $T$  é contínua e estritamente positiva, temos

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

Nós definimos

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Nós temos

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

De acordo com a fórmula (9),  $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$ ,  $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$ .

Como a função contínua  $\Lambda$  assume valores positivos e negativos,  $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ ,  $\Lambda(\lambda^*) = 0$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

Isso prova a existência da parte do Teorema 1. A singularidade resulta da fórmula (2), que é provada na próxima seção.

## 5. Prova de fórmula (2)

• Nós escolhemos  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ . De acordo com (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Vamos adicionar as primeiras  $N$  desigualdades. Nós obtemos

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Mas  $T > 0$ . Então nós temos

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Porque  $T \geq \delta_T > 0$ , temos  $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$  E se  $N \rightarrow +\infty$ .  $u$  é uma função limitada. Então nós temos

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Mas  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  foi arbitrário. Então nós temos

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

• Nós escolhemos  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  com (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Nós adicionamos essas equações e obtemos

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Temos assim

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Com (10), isso prova a fórmula (2) e o fato de que  $(x_n)$  atinge o máximo.

## 6. Prova de fórmulas (3) e (4)

Nós definimos

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\}.$$

Nós temos

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1v - Q_2v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

Então nós temos

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Com a primeira parte do Teorema 1, sabemos que existe  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$  com (1). Nós temos  $\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$ . Então nós temos  $(\lambda, u) \in \tilde{E}$  e

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

De (6), podemos ver facilmente que  $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ ,  $\rho^* \geq 0$  e  $\langle T, \rho^* \rangle = 1$ . Nós temos

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho^* \rangle &= \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2 \rho^* \rangle &= \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Então nós temos  $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$  (Porque  $u$  é limitado) e  $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$ . Temos assim  $\rho^* \in E$ . Além disso,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

Porque  $(x_n)$  atinge o máximo em (2). Então nós temos

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

Em conclusão,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

$\rho^*$  atinge o máximo e  $(\lambda, u)$  atinge o mínimo.

## 7. Prova de (7)

Nós presumimos  $0 \leq i < j$  e  $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$  com  $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ . Nós temos

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

Nós adicionamos essas equações e usamos  $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ . Nós obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

## 8. Prova de proposição 2

Nós escolhemos uma função própria  $u \in C^0(X)$  do  $(K, T)$ . Nós escolhemos uma função própria  $u' \in C^0(X)$  do  $(K', T')$ . Nós escolhemos  $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$ . Isso existe  $x_1 \in X$  com

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Observe que

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Subtraia essas duas linhas. Nós obtemos

$$(\lambda - \lambda') T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

Então nós temos  $\lambda - \lambda' \leq 0$  e  $\lambda \leq \lambda'$ . Se trocarmos  $(K, T)$  e  $(K', T')$ , nós obtemos  $\lambda' \leq \lambda$ . Então nós temos  $\lambda = \lambda'$ .

## 9. Prova de Teorema 3

Nós escolhemos  $p \in \mathbb{N}$ . De acordo com a fórmula (2),

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

Por um lado,  $X_p \subset X$ . Portanto, é claro que  $\lambda \geq \lambda_p$ . Por outro lado, escolhemos  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ . De acordo com a definição de  $h_p$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

Mas  $K$  e  $T$  são funções de Lipschitz

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| &\leq C_K h_p, \\ |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| &\leq C_T h_p. \end{aligned}$$

Para simplificar, definimos  $x = (x_n)$ ,  $y = (y_n)$ ,

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

e o mesmo para  $T_N(x)$ . Nós temos então

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}. \end{aligned}$$

Temos assim

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left( \frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ &\leq \lambda_p + \left( \frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p. \end{aligned}$$

Mas  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  foi arbitrário. Obtemos, assim, a segunda desigualdade do Teorema 3.

## 10. Prova alternativa de existência: o método do custo descontado

**Lema 1 .**

$$\forall \alpha \in ]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

**Evidência.** Deixe  $\alpha \in ]0, 1[$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nós definimos

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Como  $K$  e  $T$  são uniformemente contínuos,  $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$ . Nós temos

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Então, por simetria,  $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$ . Porque  $\alpha \in ]0, 1[$ , O teorema do ponto fixo de Banach mostra  $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$ ,  $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$ .

**Lema 2 .** Nós escolhemos  $x_0 \in X$ . Nós temos  $\forall \alpha \in ]0, 1[, \exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \exists u_\alpha \in C^0(X), u_\alpha(x_0) = 0$  e

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

Além disso,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

**Evidência.** Deixe  $\alpha \in ]0, 1[$ . Para todos  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nós escolhemos  $v_{\alpha, \lambda}$  como no lema 1 e definimos

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

De acordo com o Lema 1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

Nós temos

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

Para provar isso, temos

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

Multiplicamos essa equação por  $\alpha^n$ . Somamos e usamos  $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$ . Nós obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

A desigualdade é uma igualdade se houver igualdade em (14) para todos os  $n$ . Isso prova (13).

De acordo com (13),  $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$  é uma função convexa (portanto contínua) e uma função decrescente, pois é o envelope superior das funções lineares decrescentes de  $\lambda$ . Além disso,

- $r_{\alpha, \lambda} < 0$  E se  $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha, \lambda} > 0$  E se  $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$ .

Então nós temos

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

Nós definimos  $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$ .  $u_\alpha$  é então uma solução de (11). De acordo com (15),

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

com igualdade se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

**Lema 3.** Nós escolhemos  $x_0 \in X$ . Nós temos  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$ ,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

**Evidência.** Primeiro, a fórmula (12) implica que, para todos os  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$ . Nós vamos mostrar:  $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  é uma família equicontinua. Seja  $x \in X$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Como as funções  $K$  e  $T$  são uniformemente contínuas,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Com  $d(x, x') \leq \eta$ , temos

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in ]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

e por simetria,  $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$ .  $(u_\alpha)_{\alpha \in ]0, 1[}$  é, portanto, uma família equicontinua.

Vamos mostrar que  $(u_\alpha)_{\alpha \in ]1/2, 1[}$  é uma família uniformemente limitada. Com (11),

$$\forall \alpha \in ]1/2, 1[, \quad \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Então nós temos  $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ . Com (11), também temos

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Então nós temos  $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$  e  $(u_\alpha)_{\alpha \in ]1/2, 1[}$  é uniformemente limitado.

Nós escolhemos  $\alpha_n \in ]1/2, 1[$  com  $\alpha_n \rightarrow 1^-$  e  $n \rightarrow +\infty$ . De acordo com o teorema de Bolzano e o teorema de Ascoli,  $\exists (\alpha_{\phi(n)}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$  com

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$  converge uniformemente para  $u$ .

Pegue o limite em (11). Nós temos (16). Com  $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$ , nos também temos  $u(x_0) = 0$ . Finalmente, o fato de que  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$  (e não apenas para uma subsequência) resulta da singularidade de  $\lambda$  que satisfaz (16), o que foi comprovado na seção 5.

## Referências bibliográficas

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O. Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. – P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.