

Numerieke analyse van generaliseerde max-plus eigenwaardeproblemen

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

Overzicht

We zijn geïnteresseerd in het deterministische optimalisatieprobleem in discrete tijd met oneindige horizon op een compacte metrische ruimte met een gemiddeld kostencriterium dat twee functies omvat, kosten en tijd. We brengen eerst de verschillende karakterisaties van de waarde λ samen als een max-plus eigenwaarde en als een lineair programmeerprobleem. Dan bewijzen we een grens aan de fout gemaakt op λ wanneer de ruimte wordt gediscrètiseerd.

Sleutelwoorden: Optimalisatie in discrete tijd; Gemiddelde kosten; Lineair programmeren; Numerieke analyse

1. Inleiding

We zijn geïnteresseerd in het deterministische optimalisatieprobleem in discrete tijd met oneindige horizon met een criterium van gemiddelde kosten

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X is een compacte metrische ruimte. K en T zijn continue functies met $T > 0$. De set X is de toestandsruimte. x_n is de toestand van het systeem op tijdstip n . $K(x_n, x_{n+1})$ zijn de kosten. $T(x_n, x_{n+1})$ is de tijd die hoort bij de overgang van de staat $x_n \rightarrow x_{n+1}$. Het probleem wordt gemotiveerd door voorbeelden

- in de natuurkunde (modellen van Frenkel en Kontorova voor faseovergangen [8]),
- in engineering (machineplanning [10]),
- economie ([11], landbouw [3], handelsreiziger).

Het doel is hier tweeledig. Eerst verzamelen we de verschillende karakterisaties van λ als een gegeneraliseerd max-plus eigenwaardeprobleem (ook wel Bellman-optimaliteitsvergelijking genoemd)

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

en als een lineair programmeerprobleem. Deze karakteristieken lijken alleen te zijn aangetoond in het specifieke geval waarin $T = 1$ [7, 8, 13] of van een eindige verzameling X [11, 14, 10, 4]. Ten tweede tonen we een grens voor de fout gemaakt op λ wanneer de ruimte X wordt gediscrètiseerd. Dit generaliseert een recent werk [2] dat veronderstelde $T = 1$.

Laten we enkele onderzoeksgebieden noemen die verband houden met onze studie. Problemen van lineaire programmering in oneindige dimensies die sterk lijken op vergelijking (4) hieronder verschijnen in het massatransportprobleem van Monge en Kantorovich en in het overslagprobleem van Kantorovich en Rubinstein bestudeerd in [17]. Er zijn natuurlijk ook analogen in continue tijd van ons probleem. Een continue tijdanalog met formule (4) komt bijvoorbeeld tussen in de studie van Lagrangiaanse systemen [12]. De eigenschap (7) is ook een basisingrediënt van de theorie van Aubry en Mather [5, 6]. Problemen met gemiddelde kosten worden ook gevonden in het kader van de theorie van stochastische controle [15, 16]. Deze studies gaan ervan uit dat $T = 1$ en hebben daarom geen betrekking op ons werk. Merk op dat het hier niet nodig is om de geavanceerde methoden van lineaire programmering in oneindige dimensie [1] (zwakke topologieën, Alaoglu-stelling, scheidingstheorie per hypervlak) te gebruiken om de "sterke dualiteit" te bewijzen.

2. Scores en resultaten

Laten we enkele definities in herinnering brengen. Als X een compacte metrische ruimte is, $C^0(X)$ is de ruimte van continue functies op X met echte waarden. Het is een Banach-ruimte wanneer deze is voorzien van de norm van het supremum. $\mathcal{M}(X)$ is de ruimte van continue lineaire vormen voorbij $C^0(X)$. Als $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $\rho \geq 0$ betekent dat $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ met $u \geq 0$. De vierkante haken geven het product van dualiteit aan.

De verklaring van de eerste stelling vereist enkele speciale notaties. We definiëren

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

Als $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$, definiëren we $P_1 \rho$ en $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$ door

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

Als E een verzameling is en $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, dan de notatie $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ betekent dat $x \in E$ en $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$.

Stelling 1. *Laat X een compacte metrische ruimte zijn, $K \in C^0(X^2)$ en $T \in C^0(X^2)$. Wij nemen aan $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. We hebben dan*

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

Bovendien

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

Als we (1) hebben, dan (λ, u) het minimum bereiken in (3). Als we hebben $x_0 \in X$ en

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

men heeft

- (x_n) bereikt het maximum in (2);
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ gedefinieerd met

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

bereikt het maximum in (4).

- als we hebben $0 \leq i < j$,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

We zeggen dat het enige reële getal λ dat in stelling 1 is gedefinieerd, de eigenwaarde van (K, T) is. Een functie u met (1) is een "eigenfunctie" van (K, T) . Het volgende voorstel heeft betrekking op het omgezette probleem.

Stelling 1 . Dezelfde hypothesen als in stelling 1. We definiëren

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

Laat λ de eigenwaarde zijn van (K, T) en λ' de eigenwaarde van (K', T') . We hebben dan $\lambda = \lambda'$.

De volgende stelling behandelt de vraag van de numerieke analyse van (1). Bedenk dat eenmaal bekend zijn er welbekende algoritmen zijn om het resulterende eindige probleem op te lossen, bijvoorbeeld het iteratie-algoritme van [9].

Stelling 2 . Laat (X, d) een compacte metrische ruimte zijn. $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zijn Lipschitz-functies met Lipschitz-constanten C_K en C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \\ |T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Wij nemen aan $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. Laat λ de eigenwaarde zijn van (K, T) . $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ is een reeks eindige deelverzamelingen van X zodat

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Volgens stelling 1,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

We definiëren $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ en $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. We hebben dan

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

en $\lambda_p \rightarrow \lambda$ als $p \rightarrow +\infty$.

Enkele resultaten die nuttig zijn om het eerste deel van Stelling 1 te bewijzen, worden in paragraaf 3 genoemd. Deze resultaten zijn bijvoorbeeld te vinden in [2]. Het bewijs van het eerste deel van Stelling 1 is te vinden in sectie 4. We bewijzen de formule (2) en de optimaliteit van (x_n) in sectie 5. We bewijzen de formules (3), (4) en de optimaliteit van (λ, u) en van ρ^* in sectie 6 door de bewijzen van [10] te generaliseren. We bewijzen de eigenschap (7) in sectie 7, stelling 1 in sectie 8, stelling 2 in sectie 9. Ten slotte stellen we in sectie 10 een alternatief bewijs voor van het bestaan van een oplossing (λ, u) van (1). Het bewijs berust op een overgang naar de limiet, te beginnen met een bijgewerkt kostenprobleem. Een voordeel van deze benadering in vergelijking met die van sectie 4 is dat het onderstaande propositie 4 niet gebruikt (die is gebaseerd op de stelling van Schauder met vaste punten). Het gebruikt alleen de stelling van het vaste punt van Banach.

3. Bekende resultaten

Stelling 2 . Laat X een compacte metrische ruimte zijn en $K \in C^0(X)$. Men heeft

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

Bovendien

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

Stelling 3 . Laat X een compacte metrische ruimte zijn. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$. Wij nemen aan $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ is een convexe functie. Voor alle $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_\alpha$ is het enige echte nummer van propositie 2. We hebben dan $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is een convexe functie.

4. Bewijs van het eerste deel van Stelling 1

We definiëren

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

Volgens stelling 2,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Met formule (8),

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Maar $T \geq 0$. $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$ van $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ is daarom een afnemende functie. Formule (9) laat dat dan zien $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is ook een afnemende functie. K_λ is een lineaire en dus convexe functie van λ . Stelling 3 laat zien dat Λ een convexe functie is, dus ook een continue functie.

We nemen de stationaire volgorde gelijk aan x_0 voor $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ in (9). We hebben dan

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Maar $T(x_0, x_0) > 0$. Dus we hebben $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ als $\lambda \rightarrow -\infty$, en $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ als $\lambda \rightarrow -\infty$.

Omdat X compact is en aangezien de functie T continu en strikt positief is, hebben we

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

We definiëren

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

Laat $\varepsilon > 0$. Men heeft

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

Volgens formule (9), $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$, $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$.

Aangezien de continue functie Λ positieve en negatieve waarden aanneemt, $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$, $\Lambda(\lambda^*) = 0$. Tenslotte,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

Dit bewijst het bestaan van stelling 1. Unicité is het resultaat van formule (2), die in de volgende sectie wordt bewezen.

5. Bewijs van formule (2)

- We kiezen $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Volgens (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Laten we de eerste N -ongelijkheden toevoegen. We verkrijgen

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Maar $T > 0$. Dus we hebben

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Omdat $T \geq \delta_T > 0$, men heeft $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ als $N \rightarrow +\infty$. u is een begrensde functie. Dus we krijgen

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Maar $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ was willekeurig. Dus we hebben

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

- We kiezen $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ met (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

We voegen deze vergelijkingen toe en we krijgen

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

We hebben dus

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Met (10) bewijst dit de formule (2) en het feit dat (x_n) bereikt het maximum.

6. Bewijs van formules (3) en (4)

We definiëren

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\}.$$

Men heeft

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1 v - Q_2 v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1 \rho - P_2 \rho \rangle = \mu.$$

Dus we hebben

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Met het eerste deel van Stelling 1 weten we dat dat zo is $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ met (1). Men heeft $\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. Dus we hebben $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ en

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

Vanaf (6) kunnen we dat gemakkelijk zien $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$, $\rho^* \geq 0$ en $\langle T, \rho^* \rangle = 1$. Men heeft

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho^* \rangle &= \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2 \rho^* \rangle &= \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Dus we hebben $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$ (omdat u is begrensd), en $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$. We hebben dus $\rho^* \in E$. Bovendien

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

omdat (x_n) bereikt het maximum in (2). Dus we hebben

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

Tot slot,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* bereikt het maximum en (λ, u) bereikt het minimum.

7. Bewijs van (7)

Wij nemen aan $0 \leq i < j$ en $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ met $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Men heeft

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

We voegen deze vergelijkingen toe en we gebruiken $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. We verkrijgen

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8. Bewijs van stelling 2

We kiezen een eigenfunctie $u \in C^0(X)$ van (K, T) . We kiezen een eigenfunctie $u' \in C^0(X)$ van (K', T') . We kiezen $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$. Het bestaat $x_1 \in X$ met

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Let daar op

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Trek deze twee regels af. We verkrijgen

$$(\lambda - \lambda') T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

Dus we hebben $\lambda - \lambda' \leq 0$ en $\lambda \leq \lambda'$. Als we ruilen (K, T) en (K', T') , we verkrijgen $\lambda' \leq \lambda$. Dus we hebben $\lambda = \lambda'$.

9. Bewijs van stelling 3

We kiezen voor $p \in \mathbb{N}$. Volgens formule (2),

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

Aan de ene kant, $X_p \subset X$. Dat is dus duidelijk $\lambda \geq \lambda_p$. Aan de andere kant kiezen we $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Volgens de definitie van h_p ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

Maar K en T zijn Lipschitz-functies

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| &\leq C_K h_p, \\ |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| &\leq C_T h_p. \end{aligned}$$

Om het te vereenvoudigen, definiëren we $x = (x_n)$, $y = (y_n)$,

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

en hetzelfde voor $T_N(x)$. We hebben dan

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}. \end{aligned}$$

We hebben dus

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ &\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p. \end{aligned}$$

Maar $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ was willekeurig. Zo verkrijgen we de tweede ongelijkheid van Stelling 3.

10. Alternatief bewijs van bestaan: de methode met korting

Lemma 1 .

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

Bewijs. Laat $\alpha \in]0, 1[$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. We definiëren

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Omdat K en T uniform continu zijn, $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$. Men heeft

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Dus door symmetrie, $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$. Omdat $\alpha \in]0, 1[$, Laat de stelling van Banach zien $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$, $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$.

Lemma 2 . We kiezen $x_0 \in X$. Men heeft $\forall \alpha \in]0, 1[, \exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \exists u_\alpha \in C^0(X), u_\alpha(x_0) = 0$ en

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

Bovendien

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

Bewijs. Laat $\alpha \in]0, 1[$. Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, we kiezen $v_{\alpha, \lambda}$ zoals in lemma 1 en we definiëren

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

Volgens Lemma 1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

Men heeft

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

Om het te bewijzen, hebben we

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

We vermenigvuldigen deze vergelijking met α^n . We tellen op en we gebruiken $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$. We verkrijgen

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

Ongelijkheid is een gelijkheid als er gelijkheid is in (14) voor alle n . Dit bewijst (13).

Volgens (13), $\lambda \mapsto r_{\alpha,\lambda}$ is een convexe (dus continue) functie en een afnemende functie, omdat het de bovenste envelop is van afnemende lineaire functies van λ . Bovendien

- $r_{\alpha,\lambda} < 0$ als $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha,\lambda} > 0$ als $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$.

Dus we hebben

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha,\lambda_\alpha} = 0.$$

We definiëren $u_\alpha = u_{\alpha,\lambda_\alpha}$. u_α is dan een oplossing van (11). Volgens (15),

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

met gelijkheid als

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

Lemma 3. We kiezen $x_0 \in X$. Men heeft $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Bewijs. Ten eerste impliceert formule (12) dat voor alle $\alpha \in]0, 1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$. We gaan laten zien: $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ is een gelijklopende familie. Laat $x \in X$ en $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Omdat de functies K en T uniform continu zijn,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Met $d(x, x') \leq \eta$, men heeft

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

en door symmetrie, $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$. $(u_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ is dus een gelijklopende familie.

Dat laten we zien $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2,1[}$ is een uniform begrensde gezin. Met (11),

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \quad \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Dus we hebben $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. Met (11) hebben we ook

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Dus we hebben $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ en $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2,1[}$ is uniform begrensde.

We kiezen $\alpha_n \in]1/2, 1[$ met $\alpha_n \rightarrow 1^-$ als $n \rightarrow +\infty$. Volgens de stelling van Bolzano en de stelling van Ascoli, $\exists (\alpha_{\phi(n)}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$ met

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$ uniform convergeren naar u .

Neem de limiet in (11). We krijgen (16). Met $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$, we hebben ook $u(x_0) = 0$. Eindelijk het feit dat $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ (en niet alleen voor een subsequentie) is het gevolg van het unieke karakter van λ dat voldoet aan (16), wat is bewezen in sectie 5.

Bibliografische referenties

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O. Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. –P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.

14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc. , Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.