

一般化最大プラス固有値問題の数値解析

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

概要

私たちは、コストと時間の2つの関数を含む平均コスト基準を持つコンパクトなメトリック空間で、無限の地平線をもつ離散時間における決定論的最適化問題に興味を持っています。最初に、値 λ のさまざまな特性を、max-plus 固有値および線形計画問題としてまとめます。次に、空間を離散化したときに λ で発生する誤差の限界を証明します。

キーワード：離散時間での最適化。平均コスト; 線形計画; 数値的分析

1.はじめに

平均コスト基準を使用して、無限期間の離散時間における決定論的最適化問題に関心があります。

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X はコンパクトな距離空間です。 K と T は、 $T > 0$ 。セット X は状態空間です。 x_n 時間 n におけるシステムの状態です。 $K(x_n, x_{n+1})$ コストです。 $T(x_n, x_{n+1})$ 状態遷移に関連する時間です $x_n \rightarrow x_{n+1}$ 。問題は例によって動機づけられています

- 物理学（相転移のためのフレンケルとコントロバのモデル[8]）、
- エンジニアリング（マシンスケジューリング[10]）、
- 経済学（[11]、農業[3]、巡回セールスマン）。

ここでの目的は2つあります。最初に、 λ のさまざまな特性を一般化された最大プラス固有値問題（ベルマン最適化方程式とも呼ばれます）として収集します

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

線形計画問題として。これらの特性は、 $T=1$ [7, 8, 13]または有限集合 X [11, 14, 10, 4] の特定の場合にのみ示されているようです。次に、空間 X を離散化したときに λ に生じる誤差の範囲を示します。これは、 $T=1$ と仮定した最近の研究[2]を一般化したものです。

私たちの研究に関連するいくつかの研究分野に言及しましょう。以下の式 (4) によく似た無限次元の線形計画法の問題は、モンゲとカントロビッチの質量輸送問題と、[17]で研究されているカントロビッチとルビンスタインの積み替え問題に現れます。私たちの問題の継続的な時間には、当然のことながらアナログもあります。式 (4) の連続時間アナログは、たとえばラグランジュシステムの研究に介入します[12]。プロパティ (7) は、オーブリーとマザーの理論の基本的な要素でもあります[5, 6]。平均コストの問題は、確率論的制御の理論の枠組みでも見られます[15, 16]。これらの研究では、 $T=1$ なので、私たちの仕事はカバーしていません。ここでは、「強力な双対性」を証明するために、無限次元での線形計画法の洗練された方法[1]（弱いトポロジー、Alaogluの定理、超平面による分離の定理）を使用する必要がないことに注意してください。

2.スコアと結果

いくつかの定義を思い出してみましょう。もし X がコンパクト距離空間です、 $C^0(X)$ X の連続値と実数値の空間です。至高の規範を備えているとバナッハ空間です。 $\mathcal{M}(X)$ は連続線形形式の空間です $C^0(X)$ 。 ρ の場合 $\in \mathcal{M}(X)$ 、 $\rho \geq 0$ は、 $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ と $u \geq 0$ 。角括弧は双対性の積を示します。

最初の定理のステートメントには、いくつかの特別な表記法が必要です。私たちは定義します

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

ρ の場合 $\in \mathcal{M}(X^2)$ 、私たちは定義します $P_1 \rho$ そして $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$ 沿って

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

場合 E がセットされ、 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 、次に表記 $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ という意味です $x \in E$ そして $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$ 。

定理1. ましよ X は、コンパクト距離空間 $K \in C^0(X^2)$ そして $T \in C^0(X^2)$ 。とする $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ 。私たちは

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

さらに、

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

(1) がある場合、 (λ, u) (3) で最小値に達している。私たちが持っている場合 $x_0 \in X$ そして

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

我々は持っています

- (x_n) (2) で最大値に達する。
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ で定義

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

(4) で最大に達します。

- もし私たちが持っているなら $0 \leq i < j$,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

定理1で定義されている唯一の実数 λ は、 (K, T) の固有値であると言います。機能 u (1) は (K, T) の「固有関数」です。次の命題は転置問題に関係します。

命題1. 定理1と同じ仮説。

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

λ を次の固有値とする (K, T) そして λ' の固有値 (K', T') 。私たちは $\lambda = \lambda'$ 。

次の定理は、(1) の数値分析の問題に対処します。一旦離散化されると、結果の有限問題を解くためのよく知られたアルゴリズム、たとえば[9]の反復アルゴリズムがあることを思い出してください。

定理2. (X, d) をコンパクトな計量空間とする。 $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ そして $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz定数を持つLipschitz関数 C_K そして C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\}$$

$$|T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

とする $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. λ を次の固有値とする (K, T) . $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ X の有限サブセットのシーケンスです。

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

定理1によると、

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

私たちは定義します $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ そして $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. 私たちは

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

そして $\lambda_p \rightarrow \lambda$ もし $p \rightarrow +\infty$.

定理1の最初の部分を証明するのに役立ついくつかの結果は、セクション3で思い出されます。これらの結果は、たとえば[2]にあります。定理1の最初の部分の証明はセクション4にあります。式 (2) と次の最適性を証明します。 (x_n) セクション5で、式 (3) 、 (4) 、 および (λ, u) との ρ^* セクション6では、[10]の証明を一般化します。セクション7の性質 (7) を証明し、セクション8の命題1、セクション9の定理2を証明します。最後に、セクション10で、解 $(\lambda, (1) \text{ の } u)$ 。証明は、更新されたコスト問題から始まる限界への道にかかっています。セクション4のアプローチと比較したこのアプローチの利点は、以下の命題4を使用しないことです（これはSchauderの固定小数点定理に基づいています）。Banachの固定小数点定理のみを使用します。

3.既知の結果

命題2. ましよ X はコンパクト距離空間と $K \in C^0(X)$ 。我々は持っています

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

さらに、

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

命題3. ましよ X はコンパクト距離空間。 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$ 。とする $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ 凸関数です。すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 λ_α は命題2の唯一の実数です。 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ の $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 凸関数です。

4.定理1の最初の部分の証明

私たちは定義します

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

命題2によれば、

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

式 (8) で、

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_{\lambda}(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

だが $T \geq 0$ 。 $\lambda \mapsto K_{\lambda} = K - \lambda T$ の $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ したがって、減少関数です。次に、式 (9) は $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ の $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 減少関数でもあります。 K_{λ} は線形であるため、 λ の凸関数です。命題3は、 Λ が凸関数であり、したがって連続関数でもあることを示しています。

に等しい定常シーケンスを取ります x_0 ために $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ (9) で。私たちは

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_{\lambda}(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

だが $T(x_0, x_0) > 0$ 。だから私たちは $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ もし $\lambda \rightarrow -\infty$ 、および $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ もし $\lambda \rightarrow -\infty$ 。

以来、 X がコンパクトで機能するので T が連続して厳密に正である、我々は持っています

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

私たちは定義します

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

$\varepsilon > 0$ とします。我々は持っています

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_{\lambda}(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

式 (9) によれば、 $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$ 。

連続関数 Λ は正と負の値を取るため、 $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda^*) = 0$ 。最終的に、

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

これは、定理1の存在部分を証明します。一意性は、次のセクションで証明される式 (2) から得られます。

5.式 (2) の証明

• 我々が選択しました $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 。 (1) によれば、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

最初の N 不等式を追加してみましょう。私達は手に入れました

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

だが $T > 0$ 。だから私たちは

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

なぜなら $T \geq \delta_T > 0$ 、我々は持っています $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ もし $N \rightarrow +\infty$ 。 u 有界関数です。だから私たちは

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

だが $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 任意でした。だから私たちは

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

•我々が選択しました $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ (5) と

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

これらの方程式を追加すると、

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

このように

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

(10) を使用すると、これは式 (2) と次の事実を証明します。 (x_n) 最大に達します。

6.式 (3) および (4) の証明

私たちは定義します

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\}.$$

我々は持っています

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1v - Q_2v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

だから私たちは

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

定理1の最初の部分では、 $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ (1) を使用します。我々は持っています

$\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. だから私たちは $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ そして

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

(6) から、簡単にそれを見ることができます $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ 、 $\rho^* \geq 0$ そして $\langle T, \rho^* \rangle = 1$ 。我々は持っています

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1\rho^* \rangle &= \langle Q_1u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2\rho^* \rangle &= \langle Q_2u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

だから私たちは $\langle u, P_1\rho^* \rangle = \langle u, P_2\rho^* \rangle$ (なぜなら u 有界)、 および $P_1\rho^* = P_2\rho^*$ 。このように $\rho^* \in E$ 。さらに、

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

なぜなら (x_n) (2) で最大に達します。だから私たちは

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

結論として、

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* 最大に達し、 (λ, u) 最小に達します。

7. (7) の証明

とする $0 \leq i < j$ そして $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ と $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ 。我々は持っています

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad & K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) = u(x_n), \\ & K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) \leq u(y_n). \end{aligned}$$

これらの方程式を追加して使用します $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ 。私達は手に入れました

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8. 命題2の証明

固有関数を選択します $u \in C^0(X)$ の (K, T) 。固有関数を選択します $u' \in C^0(X)$ の (K', T') 。我々が選択しました $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$ 。それが存在します $x_1 \in X$ と

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

ご了承ください

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

これら2つの行を減算します。私達は手に入れました

$$(\lambda - \lambda')T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

だから私たちは $\lambda - \lambda' \leq 0$ そして $\lambda \leq \lambda'$ 。交換したら (K, T) そして (K', T') 、私達は手に入れました $\lambda' \leq \lambda$ 。だから私たちは $\lambda = \lambda'$ 。

9. 定理3の証明

p を選ぶ $p \in \mathbb{N}$ 。式 (2) によれば、

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

一方では、 $X_p \subset X$ 。したがって、 $\lambda \geq \lambda_p$ 。一方で、 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 。の定義によると h_p 、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

しかし、 K と T はリプシッツ関数です

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad & |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq C_K h_p, \\ & |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| \leq C_T h_p. \end{aligned}$$

簡単にするために、 $x = (x_n)$ 、 $y = (y_n)$ 、

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

と同じ $T_N(x)$ 。私たちは

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}. \end{aligned}$$

このように

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ &\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p. \end{aligned}$$

だが $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 任意でした。したがって、定理3の2番目の不等式が得られます。

10.代替の存在証明：割引原価法

補題1。

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

証拠。 α としよう $\in]0, 1[$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ 。私たちは定義します

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

以来、 K 及び T は一様に連続しています、 $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$ 。我々は持っています

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

対称性により、 $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$ 。 α だから $\in]0, 1[$ 、バナッハの不動点定理が示す

$\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$, $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$ 。

補題2。 我々が選択しました $x_0 \in X$ 。我々は持っています $\forall \alpha \in]0, 1[, \exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \exists u_\alpha \in C^0(X), u_\alpha(x_0) = 0$ そして

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

さらに、

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

証拠。 α としよう $\in]0, 1[$ 。すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ 、我々が選択しました $v_{\alpha, \lambda}$ 補題1と同様に、

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

補題1によると、

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

我々は持っています

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

それを証明するために、

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

この方程式を掛けます α^n 。合計して使用 $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$ 。私達は手に入れました

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

すべての n について (14) に等式がある場合、不等式は等式です。これは証明します (13)。

(13) によれば、 $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$ の線形関数の減少の上限であるので、凸 (したがって連続) 関数と減少関数です。さらに、

- $r_{\alpha, \lambda} < 0$ もし $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha, \lambda} > 0$ もし $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$ 。

だから私たちは

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

私たちは定義します $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$ 。 u_α (11) の解です。(15) によれば、

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

平等で

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

補題3。 我々が選択しました $x_0 \in X$ 。我々は持っています : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

証拠。 まず、式 (12) は、すべての $\alpha \in]0, 1[$ 、 $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$ 。以下に示します。(u_α) $_{\alpha \in (0, 1)}$ 等連続家族です。 x と x' と $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ 。関数 K と T は一様に連続なので、

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

と $d(x, x') \leq \eta$ 、我々は持っています

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha (T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

そして対称性により、 $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$ 。(u_α) $_{\alpha \in]0, 1[}$ したがって、等連続家族です。

それを示します (u_α) $_{\alpha \in]1/2, 1[}$ は一様に境界のあるファミリーです。(11) で、

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

だから私たちは $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ 。(11) では、

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

だから私たちは $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ そして $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ 均一に境界が定められています。

我々が選択しました $\alpha_n \in]1/2, 1[$ と $\alpha_n \rightarrow 1^-$ もし $n \rightarrow +\infty$ 。の定理によると Bolzano アスコリの定理 $\exists (\alpha_{\phi(n)})$ 、 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ 、 $\exists u \in C^0(X)$ と

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$ 均一に収束する u 。

(11) で限界を取りなさい。(16) を取得します。と $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$ 、私たちも持っています $u(x_0) = 0$ 。最後に、 $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} = \lambda$ (サブシーケンスだけでなく) セクション5で証明されている(16)を満たす λ の一意性から生じます。

参考文献

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l’optimisation des rotations, Comptes Rendus de l’académie d’agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. –P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschemdorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.