

# Analisi numerica di problemi di autovalori max-plus generalizzati

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

## riassunto

Siamo interessati al problema dell'ottimizzazione deterministica nel tempo discreto con orizzonte infinito su uno spazio metrico compatto con un criterio di costo medio che coinvolge due funzioni, costo e tempo. Innanzitutto riuniamo le diverse caratterizzazioni del valore  $\lambda$  come autovalore max-plus e come problema di programmazione lineare. Quindi dimostriamo un limite all'errore commesso su  $\lambda$  quando lo spazio è discretizzato.

Parole chiave: ottimizzazione in tempo discreto; Costo medio; Programmazione lineare; Analisi numerica

## 1. Introduzione

Siamo interessati al problema dell'ottimizzazione deterministica in tempo discreto su un orizzonte infinito con un criterio di costo medio

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

$X$  è uno spazio metrico compatto.  $K$  e  $T$  sono funzioni continue con  $T > 0$ . L'insieme  $X$  è lo spazio degli stati.  $x_n$  è lo stato del sistema al momento  $n$ .  $K(x_n, x_{n+1})$  è il costo.  $T(x_n, x_{n+1})$  è il tempo associato alla transizione di stato  $x_n \rightarrow x_{n+1}$ . Il problema è motivato da esempi

- in fisica (modelli di Frenkel e Kontorova per le transizioni di fase [8]),
- in ingegneria (programmazione automatica [10]),
- in economia ([11], agricoltura [3], commesso viaggiatore).

L'obiettivo qui è duplice. Innanzitutto, raccogliamo le diverse caratterizzazioni di  $\lambda$  come problema di autovalutazione max-plus generalizzato (chiamato anche equazione di ottimalità di Bellman)

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

e come un problema di programmazione lineare. Queste caratterizzazioni sembrano essere state dimostrate solo nel caso particolare in cui  $T = 1$  [7, 8, 13] o di un insieme finito  $X$  [11, 14, 10, 4]. In secondo luogo, mostriamo un limite per l'errore commesso su  $\lambda$  quando lo spazio  $X$  è discretizzato. Questo generalizza un lavoro recente [2] che supposeva  $T = 1$ .

Citiamo alcune aree di ricerca relative al nostro studio. Problemi di programmazione lineare in dimensione infinita che ricordano da vicino l'equazione (4) di seguito compaiono nel problema del trasporto di massa di Monge e Kantorovich e nel problema del trasbordo di Kantorovich e Rubinstein studiati in [17]. Ci sono naturalmente anche analoghi in tempo continuo del nostro problema. Un analogo del tempo continuo di formula (4) interviene ad esempio nello studio dei sistemi lagrangiani [12]. La proprietà (7) è anche un ingrediente base della teoria di Aubry e Mather [5, 6]. Problemi di costo medio si trovano anche nel quadro della teoria del controllo stocastico [15, 16]. Questi studi presuppongono che  $T = 1$  e pertanto non coprono il nostro lavoro. Si noti che qui non sarà necessario utilizzare i sofisticati metodi di programmazione lineare in dimensione infinita [1] (topologie deboli, teorema di Alaoglu, teorema di separazione per iperpiano) per dimostrare la "forte dualità".

## 2. Punteggi e risultati

Ricordiamo alcune definizioni. Se  $X$  è uno spazio metrico compatto,  $C^0(X)$  è lo spazio delle funzioni continue su  $X$  con valori reali. È uno spazio Banach quando viene fornito con la norma del supremum.  $\mathcal{M}(X)$  è lo spazio delle forme lineari continue sopra  $C^0(X)$ . Se  $\rho \in \mathcal{M}(X)$ ,  $\rho \geq 0$  significa che  $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$  con  $u \geq 0$ . Le parentesi quadre indicano il prodotto della dualità.

La dichiarazione del primo teorema richiede alcune notazioni speciali. Definiamo

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

Se  $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$ , definiamo  $P_1 \rho$  e  $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$  di

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

Se  $E$  è un set e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , quindi la notazione  $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$  significa che  $x \in E$  e  $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$ .

**Teorema 1.** *Lascia che  $X$  sia uno spazio metrico compatto,  $K \in C^0(X^2)$  e  $T \in C^0(X^2)$ . Assumiamo  $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ . Abbiamo quindi*

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

Più,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

Se abbiamo (1), allora  $(\lambda, u)$  raggiungere il minimo in (3). Se abbiamo  $x_0 \in X$  e

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

noi abbiamo

- $(x_n)$  raggiunge il massimo in (2);
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$  definito con

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

raggiunge il massimo in (4).

- se abbiamo  $0 \leq i < j$ ,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

Diciamo che l'unico numero reale  $\lambda$  definito nel Teorema 1 è l'autovalore di  $(K, T)$ . Una funzione  $u$  con (1) è una "autofunzione" di  $(K, T)$ . La seguente proposta riguarda il problema receipto.

**Proposta 1** . Stesse ipotesi del Teorema 1. Definiamo

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

Lascia che  $\lambda$  sia l'autovalore di  $(K, T)$  e  $\lambda'$  l'autovalore di  $(K', T')$ . Abbiamo quindi  $\lambda = \lambda'$ .

Il seguente teorema affronta la questione dell'analisi numerica di (1). Ricordiamo che una volta discretizzati, esistono algoritmi ben noti per risolvere il problema finito risultante, ad esempio l'algoritmo di iterazione di [9].

**Teorema 2** . Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto.  $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni di Lipschitz con costanti di Lipschitz  $C_K$  e  $C_T$

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \\ |T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Assumiamo  $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$ . Lascia che  $\lambda$  sia l'autovalore di  $(K, T)$ .  $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$  è una sequenza di sottoinsiemi finiti di  $X$  tale che

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Secondo il Teorema 1,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

Definiamo  $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$  e  $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$ . Abbiamo quindi

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left( \frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

e  $\lambda_p \rightarrow \lambda$  Se  $p \rightarrow +\infty$ .

Alcuni risultati utili per dimostrare la prima parte del Teorema 1 sono richiamati nella sezione 3. Questi risultati si trovano ad esempio in [2]. La dimostrazione della prima parte del Teorema 1 si trova nella sezione 4. Dimostriamo la formula (2) e l'ottimalità di  $(x_n)$  nella sezione 5. Dimostriamo le formule (3), (4) e l'ottimalità di  $(\lambda, u)$  e di  $\rho^*$  nella sezione 6 generalizzando le prove di [10]. Dimostriamo la proprietà (7) nella sezione 7, proposizione 1 nella sezione 8, teorema 2 nella sezione 9. Infine, proponiamo nella sezione 10 una prova alternativa dell'esistenza di una soluzione  $(\lambda, u)$  di (1). La prova si basa su un passaggio al limite a partire da un problema di costo aggiornato. Un vantaggio di questo approccio rispetto a quello della sezione 4 è che non utilizza la proposizione 4 di seguito (che si basa sul teorema del punto fisso di Schauder). Usa solo il teorema del punto fisso di Banach.

### 3. Risultati noti

**Proposta 2** . Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e  $K \in C^0(X)$ . abbiamo

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

Più,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

**Proposta 3.** Lascia che  $X$  sia uno spazio metrico compatto.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $K_\alpha \in C^0(X)$ . Assumiamo  $\forall x, y \in X$ ,  $\alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$  è una funzione convessa. Per tutti  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_\alpha$  è l'unico numero reale di proposizione 2. Quindi abbiamo  $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$  di  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione convessa.

## 4. Prova della prima parte del teorema 1

Definiamo

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

Secondo la proposizione 2,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Con formula (8),

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Ma  $T \geq 0$ .  $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$  di  $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$  è quindi una funzione decrescente. Formula (9) lo mostra quindi  $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$  di  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è anche una funzione decrescente.  $K_\lambda$  è una funzione lineare e quindi convessa di  $\lambda$ . La proposizione 3 mostra che  $\Lambda$  è una funzione convessa, quindi anche una funzione continua.

Prendiamo la sequenza stazionaria uguale a  $x_0$  per  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  in (9). Abbiamo quindi

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Ma  $T(x_0, x_0) > 0$ . Quindi abbiamo  $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$  Se  $\lambda \rightarrow -\infty$ , e  $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$  Se  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

Poiché  $X$  è compatto e poiché la funzione  $T$  è continua e strettamente positiva, lo abbiamo

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

Definiamo

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

Lascia  $\varepsilon > 0$ . abbiamo

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

Secondo la formula (9),  $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$ ,  $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$ .

Poiché la funzione continua  $\Lambda$  assume valori positivi e negativi,  $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ ,  $\Lambda(\lambda^*) = 0$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

Ciò dimostra l'esistenza del Teorema 1. L'unicità deriva dalla formula (2), che è dimostrata nella sezione successiva.

## 5. Prova della formula (2)

• Noi scegliamo  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ . Secondo (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Aggiungiamo le prime  $N$  disuguaglianze. Otteniamo

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Ma  $T > 0$ . Quindi abbiamo

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Perché  $T \geq \delta_T > 0$ , noi abbiamo  $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$  Se  $N \rightarrow +\infty$ .  $u$  è una funzione limitata. Quindi otteniamo

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Ma  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  era arbitrario. Quindi abbiamo

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

• Noi scegliamo  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  con (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Aggiungiamo queste equazioni e otteniamo

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Abbiamo così

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Con (10), ciò dimostra la formula (2) e il fatto che  $(x_n)$  raggiunge il massimo.

## 6. Prova delle formule (3) e (4)

Definiamo

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\}.$$

abbiamo

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1 v - Q_2 v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1 \rho - P_2 \rho \rangle = \mu.$$

Quindi abbiamo

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Con la prima parte di Teorema 1, sappiamo che esiste  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$  con (1). abbiamo  $\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$ . Quindi abbiamo  $(\lambda, u) \in \tilde{E}$  e

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

Da (6), possiamo facilmente vederlo  $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2), \rho^* \geq 0$  e  $\langle T, \rho^* \rangle = 1$ . abbiamo

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

$$\langle u, P_2 \rho^* \rangle = \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Quindi abbiamo  $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$  (perché  $u$  è limitato) e  $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$ . Abbiamo così  $\rho^* \in E$ . Più,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

perché  $(x_n)$  raggiunge il massimo in (2). Quindi abbiamo

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

In conclusione,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

$\rho^*$  raggiunge il massimo e  $(\lambda, u)$  raggiunge il minimo.

## 7. Prova di (7)

Assumiamo  $0 \leq i < j$  e  $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$  con  $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ . abbiamo

$$\forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) = u(x_n),$$

$$K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) \leq u(y_n).$$

Aggiungiamo queste equazioni e usiamo  $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ . Otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\
&= u(x_i) - u(x_j) \\
&= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})].
\end{aligned}$$

## 8. Prova della proposta 2

Scegliamo un'autofunzione  $u \in C^0(X)$  di  $(K, T)$ . Scegliamo un'autofunzione  $u' \in C^0(X)$  di  $(K', T')$ . Noi scegliamo  $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$ . Esiste  $x_1 \in X$  con

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Nota che

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Sottrai queste due righe. Otteniamo

$$(\lambda - \lambda')T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

Quindi abbiamo  $\lambda - \lambda' \leq 0$  e  $\lambda \leq \lambda'$ . Se ci scambiamo  $(K, T)$  e  $(K', T')$ , otteniamo  $\lambda' \leq \lambda$ . Quindi abbiamo  $\lambda = \lambda'$ .

## 9. Prova del teorema 3

Scegliamo  $p \in \mathbb{N}$ . Secondo la formula (2),

$$\begin{aligned}
\lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\
\lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}.
\end{aligned}$$

Da una parte,  $X_p \subset X$ . È quindi chiaro che  $\lambda \geq \lambda_p$ . D'altra parte, scegliamo  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ . Secondo la definizione di  $h_p$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

Ma  $K$  e  $T$  sono funzioni di Lipschitz

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| &\leq C_K h_p, \\
|T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| &\leq C_T h_p.
\end{aligned}$$

Per semplificare, definiamo  $x = (x_n)$ ,  $y = (y_n)$ ,

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

e lo stesso per  $T_N(x)$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\
&\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\
&\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}.
\end{aligned}$$

Abbiamo così

$$\begin{aligned}
\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left( \frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\
&\leq \lambda_p + \left( \frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p.
\end{aligned}$$

Ma  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  era arbitrario. Otteniamo così la seconda disuguaglianza del Teorema 3.

## 10. Prova alternativa dell'esistenza: il metodo del costo attualizzato

**Lemma 1.**

$$\forall \alpha \in ]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

**Prova.** Lascia  $\alpha \in ]0, 1[$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definiamo

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Poiché  $K$  e  $T$  sono uniformemente continui,  $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$ . abbiamo

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Quindi per simmetria,  $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$ . Perché  $\alpha \in ]0, 1[$ , Mostra il teorema del punto fisso di Banach  $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$ ,  $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$ .

**Lemma 2 .** Noi scegliamo  $x_0 \in X$ . abbiamo  $\forall \alpha \in ]0, 1[$ ,  $\exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\exists u_\alpha \in C^0(X)$ ,  $u_\alpha(x_0) = 0$  e

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

Più,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

**Prova.** Lascia  $\alpha \in ]0, 1[$ . Per tutti  $\lambda \in \mathbb{R}$ , noi scegliamo  $v_{\alpha, \lambda}$  come nel lemma 1 e definiamo

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

Secondo Lemma 1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

abbiamo

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

Per dimostrarlo, abbiamo

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

Moltiplichiamo questa equazione per  $\alpha^n$ . Sommiamo e usiamo  $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$ . Otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

La disuguaglianza è un'uguaglianza se c'è uguaglianza in (14) per tutto  $n$ . Questo dimostra (13).

Secondo (13),  $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$  è una funzione convessa (quindi continua) e una funzione decrescente, poiché è l'involuppo superiore delle funzioni lineari decrescenti di  $\lambda$ . Più,

- $r_{\alpha, \lambda} < 0$  Se  $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha, \lambda} > 0$  Se  $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$ .

Quindi abbiamo

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

Definiamo  $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$ .  $u_\alpha$  è quindi una soluzione di (11). Secondo (15),

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

con uguaglianza se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

**Lemma 3 .** Noi scegliamo  $x_0 \in X$ . Abbiamo  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\exists u \in C^0(X)$ ,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

**Prova.** Innanzitutto, la formula (12) implica che per tutto  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$ . Mostreremo:  $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  è una famiglia equicontinua. Lascia che  $x \in X$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Poiché le funzioni  $K$  e  $T$  sono uniformemente continue,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Con  $d(x, x') \leq \eta$ , noi abbiamo

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in ]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

e per simmetria,  $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$ .  $(u_\alpha)_{\alpha \in ]0,1[}$  è quindi una famiglia equicontinua.

Lo dimostreremo  $(u_\alpha)_{\alpha \in ]1/2,1[}$  è una famiglia uniformemente limitata. Con (11),

$$\forall \alpha \in ]1/2, 1[, \quad \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Quindi abbiamo  $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ . Con (11), abbiamo anche

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Quindi abbiamo  $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$  e  $(u_\alpha)_{\alpha \in ]1/2,1[}$  è delimitato in modo uniforme.

Noi scegliamo  $\alpha_n \in ]1/2, 1[$  con  $\alpha_n \rightarrow 1^-$  Se  $n \rightarrow +\infty$ . Secondo il teorema di Bolzano e il teorema di Ascoli,  $\exists (\alpha_{\phi(n)})$ ,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\exists u \in C^0(X)$  con

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$  converge uniformemente in  $u$ .

Prendi il limite in (11). Otteniamo (16). Con  $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$ , abbiamo anche  $u(x_0) = 0$ . Infine, il fatto che  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda = \lambda$  (e non solo per una sottosequenza) deriva dall'unicità di  $\lambda$  che soddisfa (16), come è stato dimostrato nella sezione 5.

## Riferimenti bibliografici

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O. Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. –P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.