

Análisis numérico de problemas generalizados de valor propio max-plus

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

resumen

Estamos interesados en el problema de optimización determinista en tiempo discreto con horizonte infinito en un espacio métrico compacto con un criterio de costo promedio que involucra dos funciones, costo y tiempo. Primero reunimos las diferentes caracterizaciones del valor λ como un valor propio max-plus y como un problema de programación lineal. Luego demostramos un límite en el error cometido en λ cuando el espacio está discretizado.

Palabras clave: Optimización en tiempo discreto; Costo promedio; Programación lineal; Análisis numérico

1. Introducción

Estamos interesados en el problema de optimización determinista en tiempo discreto en un horizonte infinito con un criterio de costo promedio

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X es un espacio métrico compacto. K y T son funciones continuas con $T > 0$. El conjunto X es el espacio de estado. x_n es el estado del sistema en el tiempo n . $K(x_n, x_{n+1})$ es el costo $T(x_n, x_{n+1})$ es el tiempo asociado con la transición de estado $x_n \rightarrow x_{n+1}$. El problema está motivado por ejemplos.

- en física (modelos de Frenkel y Kontorova para transiciones de fase [8]),
- en ingeniería (programación de máquinas [10]),
- en economía ([11], agricultura [3], vendedor ambulante).

El objetivo aquí es doble. Primero, recopilamos las diferentes caracterizaciones de λ como un problema de valor propio generalizado de plus plus (también llamado ecuación de optimización de Bellman)

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

y como un problema de programación lineal. Estas caracterizaciones parecen haberse demostrado solo en el caso particular donde $T = 1$ [7, 8, 13] o de un conjunto finito X [11, 14, 10, 4]. En segundo lugar, mostramos un límite para el error cometido en λ cuando el espacio X está discretizado. Esto generaliza un trabajo reciente [2] que supuso $T = 1$.

Mencionemos algunas áreas de investigación relacionadas con nuestro estudio. Los problemas de programación lineal en dimensión infinita que se parecen mucho a la ecuación (4) a continuación aparecen en el problema de transporte de masas de Monge y Kantorovich y en el problema de transbordo de Kantorovich y Rubinstein estudiado en [17]. Naturalmente, también hay análogos en el tiempo continuo de nuestro problema. Un análogo de tiempo continuo de fórmula (4) interviene, por ejemplo, en el estudio de los sistemas lagrangianos [12]. La propiedad (7) es también un ingrediente básico de la teoría de Aubry y Mather [5, 6]. Los problemas de costo promedio también se encuentran en el marco de la teoría del control estocástico [15, 16]. Estos estudios suponen que $T = 1$ y por lo tanto no cubren nuestro trabajo. Tenga en cuenta que aquí, no será necesario utilizar los métodos sofisticados de programación lineal en dimensión infinita [1] (topologías débiles, teorema de Alaoglu, teorema de separación por hiperplano) para demostrar la "dualidad fuerte".

2. Puntuaciones y resultados

Recordemos algunas definiciones. Si X es un espacio métrico compacto, $C^0(X)$ es el espacio de funciones continuas en X con valores reales. Es un espacio de Banach cuando cuenta con la norma del supremum. $\mathcal{M}(X)$ es el espacio de formas lineales continuas sobre $C^0(X)$. Si $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $\rho \geq 0$ significa que $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ con $u \geq 0$. Los corchetes denotan el producto de la dualidad.

La declaración del primer teorema requiere algunas notaciones especiales. Definimos

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

Si $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$, definimos $P_1 \rho$ y $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$ por

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

Si E es un conjunto y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la notación $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ significa que $x \in E$ y $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$.

Teorema 1. *Deje X ser un espacio métrico compacto, $K \in C^0(X^2)$ y $T \in C^0(X^2)$. Asumimos $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. Tenemos entonces*

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

De más,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

Si tenemos (1), entonces (λ, u) alcanzar el mínimo en (3). Si tenemos $x_0 \in X$ y

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

se tiene

- (x_n) alcanza el máximo en (2);

- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ definido con

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

alcanza el máximo en (4).

- si tenemos $0 \leq i < j$,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

Decimos que el único número real λ definido en el Teorema 1 es el valor propio de (K, T) . Una función u con (1) es una "función propia" de (K, T) . La siguiente proposición se refiere al problema transpuesto.

Proposición 1. Las mismas hipótesis que en el teorema 1. Definimos

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

Deje λ ser el valor propio de (K, T) y λ' el valor propio de (K', T') . Tenemos entonces $\lambda = \lambda'$.

El siguiente teorema aborda la cuestión del análisis numérico de (1). Recuerde que, una vez discretizados, existen algoritmos bien conocidos para resolver el problema finito resultante, por ejemplo, el algoritmo de iteración de [9].

Teorema 2. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Lipschitz con constantes de Lipschitz C_K y C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \\ |T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Asumimos $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. Deje λ ser el valor propio de (K, T) . $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de subconjuntos finitos de X tal que

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Según el teorema 1,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

Definimos $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ y $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. Tenemos entonces

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

y $\lambda_p \rightarrow \lambda$ si $p \rightarrow +\infty$.

Algunos resultados útiles para probar la primera parte del Teorema 1 se recuerdan en la sección 3. Estos resultados se encuentran, por ejemplo, en [2]. La prueba de la primera parte del Teorema 1 se encuentra en la sección 4. Probamos la fórmula (2) y la optimización de (x_n) en la sección 5. Probamos las fórmulas (3), (4) y la optimización de (λ, u) y ρ^* en la sección 6 generalizando las pruebas de [10]. Probamos la propiedad (7) en la sección 7, la proposición 1 en la sección 8, el teorema 2 en la sección 9. Finalmente, proponemos en la sección 10 una prueba alternativa de la existencia de una solución (λ, u) de (1). La prueba se basa en un pasaje al límite a partir de un problema de costo actualizado. Una ventaja de este enfoque en comparación con la de la sección 4 es que no utiliza la proposición 4 a continuación (que se basa en el teorema del punto fijo de Schauder). Solo usa el teorema del punto fijo de Banach.

3. Resultados conocidos

Proposición 2. Sea X un espacio métrico compacto y $K \in C^0(X)$. Se tiene

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

De más,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

Proposición 3. Deje X ser un espacio métrico compacto. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$. Asumimos $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ Es una función convexa. Para todos los $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_\alpha$ es el único número real de proposición 2. Entonces tenemos $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Es una función convexa.

4. Prueba de la primera parte del teorema 1

Definimos

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

De acuerdo con la proposición 2,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Con la fórmula (8),

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Pero $T \geq 0$. $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$ de $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ es por lo tanto una función decreciente. La fórmula (9) muestra que $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ También es una función decreciente. K_λ es una función lineal y por lo tanto convexa de λ . La Proposición 3 muestra que Λ es una función convexa, por lo tanto, también una función continua.

Tomamos la secuencia estacionaria igual a x_0 para $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ en (9). Tenemos entonces

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Pero $T(x_0, x_0) > 0$. Entonces tenemos $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ Si $\lambda \rightarrow -\infty$ y $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ Si $\lambda \rightarrow -\infty$.

Como X es compacto y la función T es continua y estrictamente positiva, tenemos

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

Definimos

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

Deje $\varepsilon > 0$. Se tiene

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

De acuerdo con la fórmula (9), $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$.

Como la función continua Λ toma valores positivos y negativos, $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda^*) = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

Esto prueba la existencia del Teorema 1. La unicidad resulta de la fórmula (2), que se demuestra en la siguiente sección.

5. Prueba de fórmula (2)

• Nosotros elegimos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. De acuerdo con (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Agreguemos las primeras N desigualdades. Obtenemos

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Pero $T > 0$. Entonces tenemos

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Porque $T \geq \delta_T > 0$, se tiene $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ Si $N \rightarrow +\infty$. u Es una función acotada. Entonces obtenemos

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Pero $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ Fue arbitrario. Entonces tenemos

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

• Nosotros elegimos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ con (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Agregamos estas ecuaciones y obtenemos

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Así tenemos

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Con (10), esto prueba la fórmula (2) y el hecho de que (x_n) alcanza el maximo.

6. Prueba de fórmulas (3) y (4)

Definimos

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\}.$$

Se tiene

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1v - Q_2v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

Entonces tenemos

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Con la primera parte del Teorema 1, sabemos que hay $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ con (1). Se tiene $\forall x, y \in X, K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. Entonces tenemos $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ y

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

De (6), podemos ver fácilmente que $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$, $\rho^* \geq 0$ y $\langle T, \rho^* \rangle = 1$. Se tiene

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho^* \rangle &= \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2 \rho^* \rangle &= \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$ (porque u está acotado), y $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$. Así tenemos $\rho^* \in E$. De más,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

porque (x_n) alcanza el máximo en (2). Entonces tenemos

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

En conclusión,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* alcanza el máximo y (λ, u) alcanza el mínimo

7. Prueba de (7)

Asumimos $0 \leq i < j$ y $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ con $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

Agregamos estas ecuaciones y usamos $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8. Prueba de la proposición 2

Elegimos una función propia $u \in C^0(X)$ de (K, T) . Elegimos una función propia $u' \in C^0(X)$ de (K', T') . Nosotros elegimos $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$. Existe $x_1 \in X$ con

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Tenga en cuenta que

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Resta estas dos líneas. Obtenemos

$$(\lambda - \lambda')T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

Entonces tenemos $\lambda - \lambda' \leq 0$ y $\lambda \leq \lambda'$. Si intercambiamos (K, T) y (K', T') , obtenemos $\lambda' \leq \lambda$. Entonces tenemos $\lambda = \lambda'$.

9. Prueba del teorema 3

Elegimos $p \in \mathbb{N}$. De acuerdo con la fórmula (2),

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

De un lado, $X_p \subset X$. Por lo tanto, está claro que $\lambda \geq \lambda_p$. Por otro lado, elegimos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. De acuerdo con la definición de h_p ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

Pero K y T son funciones de Lipschitz

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| &\leq C_K h_p, \\ |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| &\leq C_T h_p. \end{aligned}$$

Para simplificar, definimos $x = (x_n)$, $y = (y_n)$,

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

y lo mismo para $T_N(x)$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ &\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p. \end{aligned}$$

Pero $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ Fue arbitrario. Obtenemos así la segunda desigualdad del teorema 3.

10. Prueba alternativa de existencia: el método del costo con descuento

Lema 1 .

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

Evidencia. Deje $\alpha \in]0, 1[$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Como K y T son uniformemente continuos, $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Entonces por simetría, $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$. Porque $\alpha \in]0, 1[$, El teorema del punto fijo de Banach muestra $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$, $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$.

Lema 2 . *Nosotros elegimos $x_0 \in X$. Se tiene $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}$, $\exists u_\alpha \in C^0(X)$, $u_\alpha(x_0) = 0$ y*

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

De más,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

Evidencia. Deje $\alpha \in]0, 1[$. Para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, nosotros elegimos $v_{\alpha, \lambda}$ como en el lema 1 y definimos

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

De acuerdo con el Lema 1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

Se tiene

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

Para demostrarlo, tenemos

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

Multiplicamos esta ecuación por α^n . Sumamos y usamos $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$. Obtenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

La desigualdad es una igualdad si hay igualdad en (14) para todos los n . Esto prueba (13).

De acuerdo con (13), $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$ es una función convexa (por lo tanto, continua) y una función decreciente, ya que es la envoltura superior de las funciones lineales decrecientes de λ . De más,

- $r_{\alpha, \lambda} < 0$ Si $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha, \lambda} > 0$ Si $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$.

Entonces tenemos

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

Definimos $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$. u_α es entonces una solución de (11). De acuerdo con (15),

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

con igualdad si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

Lema 3. *Nosotros elegimos $x_0 \in X$. Se tiene $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$,*

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Evidencia. Primero, la fórmula (12) implica que para todos los $\alpha \in]0, 1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$. Vamos a mostrar: $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ Es una familia equicontinua. Deje $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Como las funciones K y T son uniformemente continuas,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Con $d(x, x') \leq \eta$, se tiene

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

y por simetría $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$. $(u_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ es, por lo tanto, una familia equicontinua.

Mostraremos que $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ es una familia uniformemente unida. Con (11),

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Entonces tenemos $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. Con (11), también tenemos

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Entonces tenemos $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ y $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ está uniformemente delimitado.

Nosotros elegimos $\alpha_n \in]1/2, 1[$ con $\alpha_n \rightarrow 1^-$ Si $n \rightarrow +\infty$. De acuerdo con el teorema de Bolzano y el teorema de Ascoli, $\exists (\alpha_{\phi(n)}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$ con

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$ converge uniformemente a u .

Tome el límite en (11). Obtenemos (16). Con $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$, también tenemos $u(x_0) = 0$. Finalmente, el hecho de que $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ (y no solo para una subsecuencia) resulta de la unicidad de λ que satisface (16), que se ha demostrado en la sección 5.

Referencias bibliográficas

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O. Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. – P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschemdorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.