

Numerische Analyse verallgemeinerter Max-Plus-Eigenwertprobleme

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

Zusammenfassung

Wir interessieren uns für das deterministische Optimierungsproblem in diskreter Zeit mit unendlichem Horizont auf einem kompakten metrischen Raum mit einem Durchschnittskostenkriterium, das zwei Funktionen umfasst, Kosten und Zeit. Wir bringen zunächst die verschiedenen Charakterisierungen des Wertes λ als Max-Plus-Eigenwert und als lineares Programmierproblem zusammen. Dann beweisen wir eine Grenze für den Fehler, der an λ gemacht wird, wenn der Raum diskretisiert wird.

Schlüsselwörter: Optimierung in diskreter Zeit; Durchschnittskosten; Lineares Programmieren; Numerische Analyse

1. Einleitung

Wir interessieren uns für das deterministische Optimierungsproblem in diskreter Zeit an einem unendlichen Horizont mit einem Durchschnittskostenkriterium

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X ist ein kompakter metrischer Raum. K und T sind stetige Funktionen mit $T > 0$. Die Menge X ist der Zustandsraum. x_n ist der Zustand des Systems zum Zeitpunkt n . $K(x_n, x_{n+1})$ ist die Kosten. $T(x_n, x_{n+1})$ ist die Zeit, die mit dem Zustandsübergang verbunden ist $x_n \rightarrow x_{n+1}$. Das Problem wird durch Beispiele motiviert

- in Physik (Frenkel- und Kontorova-Modelle für Phasenübergänge [8]),
- in Engineering (Maschinenplanung [10]),
- in Wirtschaft ([11], Landwirtschaft [3], reisender Verkäufer).

Das Ziel hier ist zweifach. Zunächst sammeln wir die verschiedenen Charakterisierungen von λ als verallgemeinertes Max-Plus-Eigenwertproblem (auch Bellman-Optimalitätsgleichung genannt).

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

und als lineares Programmierproblem. Diese Charakterisierungen scheinen nur in dem speziellen Fall gezeigt worden zu sein, in dem $T = 1$ [7, 8, 13] oder einer endlichen Menge X [11, 14, 10, 4]. Zweitens zeigen wir eine Grenze für den Fehler, der an λ gemacht wird, wenn der Raum X diskretisiert wird. Dies verallgemeinert eine neuere Arbeit [2], in der $T = 1$ angenommen wurde.

Lassen Sie uns einige Forschungsbereiche erwähnen, die mit unserer Studie zusammenhängen. Probleme der linearen Programmierung in unendlichen Dimensionen, die der folgenden Gleichung (4) sehr ähnlich sind, treten im Massentransportproblem von Monge und Kantorovich und im in [17] untersuchten Umschlagproblem von Kantorovich und Rubinstein auf. Es gibt natürlich auch Analogie in ununterbrochener Zeit unseres Problems. Ein kontinuierliches Zeitanalogon der Formel (4) greift beispielsweise in die Untersuchung von Lagrange-Systemen ein [12]. Eigenschaft (7) ist auch ein grundlegender Bestandteil der Theorie von Aubry und Mather [5, 6]. Probleme der Durchschnittskosten finden sich auch im Rahmen der Theorie der stochastischen Kontrolle [15, 16]. Diese Studien gehen davon aus, dass $T = 1$ und decken daher unsere Arbeit nicht ab. Beachten Sie, dass es hier nicht erforderlich sein wird, die ausgeklügelten Methoden der linearen Programmierung in unendlicher Dimension [1] (schwache Topologien, Alaoglu-Theorem, Trennungssatz durch Hyperebene) zu verwenden, um die "starke Dualität" zu beweisen.

2. Ergebnisse und Ergebnisse

Erinnern wir uns an einige Definitionen. Wenn X ein kompakter metrischer Raum ist, $C^0(X)$ ist der Raum der stetigen Funktionen auf X mit reellen Werten. Es ist ein Banach-Raum, wenn er mit der Norm des Supremums versehen ist. $\mathcal{M}(X)$ ist der Raum der kontinuierlichen linearen Formen über $C^0(X)$. Wenn $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $\rho \geq 0$ bedeutet das $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ mit $u \geq 0$. Die eckigen Klammern bezeichnen das Produkt der Dualität.

Die Aussage des ersten Satzes erfordert einige spezielle Notationen. Wir definieren

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, \quad (Q_1 u)(x, y) = u(x), \quad (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

Wenn $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$, wir definieren $P_1 \rho$ und $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$ durch

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \quad \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

Wenn E eine Menge ist und $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, dann die Notation $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ bedeutet, dass $x \in E$ und $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$.

Satz 1. Sei X ein kompakter metrischer Raum, $K \in C^0(X^2)$ und $T \in C^0(X^2)$. Wir nehmen an $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. Wir haben dann

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

Außerdem,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

Wenn wir (1) haben, dann (λ, u) Erreichen Sie das Minimum in (3). Wenn wir haben $x_0 \in X$ und

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

wir haben

- (x_n) erreicht das Maximum in (2);
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ definiert mit

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

erreicht das Maximum in (4).

- wenn wir haben $0 \leq i < j$,

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

Wir sagen, dass die einzige in Satz 1 definierte reelle Zahl λ der Eigenwert von (K, T) ist. Eine Funktion u mit (1) ist eine "Eigenfunktion" von (K, T) . Der folgende Satz betrifft das transponierte Problem.

Satz 1. Gleiche Hypothesen wie in Satz 1. Wir definieren

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

Sei λ der Eigenwert von (K, T) und λ' der Eigenwert von (K', T') . Wir haben dann $\lambda = \lambda'$.

Der folgende Satz befasst sich mit der Frage der numerischen Analyse von (1). Denken Sie daran, dass es nach der Diskretisierung bekannte Algorithmen zur Lösung des resultierenden endlichen Problems gibt, beispielsweise den Iterationsalgorithmus von [9].

Satz 2. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind Lipschitz-Funktionen mit Lipschitz-Konstanten C_K und C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\} \\ |T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Wir nehmen an $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. Sei λ der Eigenwert von (K, T) . $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von endlichen Teilmengen von X , so dass

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Nach Satz 1

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

Wir definieren $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ und $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. Wir haben dann

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

und $\lambda_p \rightarrow \lambda$ wenn $p \rightarrow +\infty$.

Einige Ergebnisse, die zum Beweis des ersten Teils von Satz 1 nützlich sind, werden in Abschnitt 3 wiedergegeben. Diese Ergebnisse finden sich beispielsweise in [2]. Der Beweis des ersten Teils von Satz 1 findet sich in Abschnitt 4. Wir beweisen die Formel (2) und die Optimalität von (x_n) in Abschnitt 5. Wir beweisen die Formeln (3), (4) und die Optimalität von (λ, u) und von ρ^* in Abschnitt 6 durch Verallgemeinerung der Beweise von [10]. Wir beweisen die Eigenschaft (7) in Abschnitt 7, Satz 1 in Abschnitt 8, Satz 2 in Abschnitt 9. Schließlich schlagen wir in Abschnitt 10 einen alternativen Beweis für die Existenz einer Lösung vor (λ, u) von (1). Der Beweis beruht auf einem Übergang zum Limit ausgehend von einem aktualisierten Kostenproblem. Ein Vorteil dieses Ansatzes gegenüber dem von Abschnitt 4 besteht darin, dass Satz 4 (der auf dem Schauder-Fixpunktsatz basiert) nicht verwendet wird. Es wird nur der Fixpunktsatz von Banach verwendet.

3. Bekannte Ergebnisse

Satz 2. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $K \in C^0(X)$. Wir haben

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

Außerdem,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

Satz 3. Sei X ein kompakter metrischer Raum. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$. Wir nehmen an $\forall x, y \in X, \alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ ist eine konvexe Funktion. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_\alpha$ ist die einzige reelle Zahl von Satz 2. Wir haben dann $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine konvexe Funktion.

4. Beweis des ersten Teils von Satz 1

Wir definieren

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

Nach Satz 2,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Mit Formel (8),

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Aber $T \geq 0$. $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$ von $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ ist daher eine abnehmende Funktion. Die Formel (9) zeigt das dann $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch eine abnehmende Funktion. K_λ ist eine lineare und daher konvexe Funktion von λ . Satz 3 zeigt, dass Λ eine konvexe Funktion ist, also auch eine stetige Funktion.

Wir nehmen die stationäre Sequenz gleich x_0 zum $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ in (9). Wir haben dann

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Aber $T(x_0, x_0) > 0$. Also haben wir $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ wenn $\lambda \rightarrow -\infty$, und $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ wenn $\lambda \rightarrow -\infty$.

Da X kompakt ist und die Funktion T stetig und streng positiv ist, haben wir

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

Wir definieren

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

Nach Formel (9) $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$.

Da die stetige Funktion Λ positive und negative Werte annimmt, $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda^*) = 0$. Schließlich,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

Dies beweist den Existenzteil von Satz 1. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Formel (2), die im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

5. Beweis der Formel (2)

- Wir wählen $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Nach (1)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Fügen wir die ersten N Ungleichungen hinzu. Wir erhalten

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Aber $T > 0$. Also haben wir

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

weil $T \geq \delta_T > 0$, wir haben $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ wenn $N \rightarrow +\infty$. u ist eine begrenzte Funktion. Also bekommen wir

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Aber $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ war willkürlich. Also haben wir

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

- Wir wählen $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ mit (5),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Wir addieren diese Gleichungen und wir bekommen

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Wir haben also

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Mit (10) beweist dies die Formel (2) und die Tatsache, dass (x_n) erreicht das Maximum.

6. Beweis der Formeln (3) und (4)

Wir definieren

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\}.$$

Wir haben

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1 v - Q_2 v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

Also haben wir

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Mit dem ersten Teil von Satz 1 wissen wir, dass es gibt $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ mit (1). Wir haben $\forall x, y \in X, \quad K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. Also haben wir $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ und

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

Aus (6) können wir das leicht erkennen $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$, $\rho^* \geq 0$ und $\langle T, \rho^* \rangle = 1$. Wir haben

$$\begin{aligned} \forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1 \rho^* \rangle &= \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \langle u, P_2 \rho^* \rangle &= \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Also haben wir $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$ (da u ist begrenzt) und $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$. Wir haben also $\rho^* \in E$. Außerdem,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

da (x_n) erreicht das Maximum in (2). Also haben wir

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

Abschließend,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* erreicht das Maximum und (λ, u) erreicht das Minimum.

7. Beweis von (7)

Wir nehmen an $0 \leq i < j$ und $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ mit $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Wir haben

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \leq j-1, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

Wir addieren diese Gleichungen und verwenden $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8. Beweis von Satz 2

Wir wählen eine Eigenfunktion $u \in C^0(X)$ von (K, T) . Wir wählen eine Eigenfunktion $u' \in C^0(X)$ von (K', T') . Wir wählen $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$. Es existiert $x_1 \in X$ mit

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Beachten Sie, dass

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Subtrahieren Sie diese beiden Linien. Wir erhalten

$$(\lambda - \lambda') T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

Also haben wir $\lambda - \lambda' \leq 0$ und $\lambda \leq \lambda'$. Wenn wir austauschen (K, T) und (K', T') , wir erhalten $\lambda' \leq \lambda$. Also haben wir $\lambda = \lambda'$.

9. Beweis von Satz 3

Wir wählen $p \in \mathbb{N}$. Nach Formel (2)

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

Auf der einen Seite, $X_p \subset X$. Es ist daher klar, dass $\lambda \geq \lambda_p$. Auf der anderen Seite wählen wir $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Nach der Definition von h_p ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

Aber K und T sind Lipschitz-Funktionen

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| &\leq C_K h_p, \\ |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| &\leq C_T h_p. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung definieren wir $x = (x_n)$, $y = (y_n)$,

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

und das gleiche für $T_N(x)$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ &\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p. \end{aligned}$$

Aber $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ war willkürlich. Wir erhalten so die zweite Ungleichung von Satz 3.

10. Alternativer Existenznachweis: die Discounted-Cost-Methode

Lemma 1.

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

Beweis. Sei $\alpha \in]0, 1[$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Da K und T gleichmäßig stetig sind, $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$. Wir haben

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Also durch Symmetrie, $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$. Weil $\alpha \in]0, 1[$, Zeigt Banachs Fixpunktsatz $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$, $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$.

Lemma 2. Wir wählen $x_0 \in X$. Wir haben $\forall \alpha \in]0, 1[, \exists! \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \exists u_\alpha \in C^0(X), u_\alpha(x_0) = 0$ und

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (11)$$

Außerdem,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

Beweis. Sei $\alpha \in]0, 1[$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wir wählen $v_{\alpha, \lambda}$ wie in Lemma 1 und wir definieren

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

Nach Lemma 1,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

Wir haben

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

Um es zu beweisen, haben wir

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit α^n . Wir summieren und wir verwenden $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$. Wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

Ungleichung ist eine Gleichheit, wenn es in (14) Gleichheit für alle n gibt. Dies beweist (13).

Nach (13) $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$ ist eine konvexe (daher kontinuierliche) Funktion und eine abnehmende Funktion, da es sich um die obere Hüllkurve abnehmender linearer Funktionen von λ handelt. Außerdem,

- $r_{\alpha, \lambda} < 0$ wenn $\lambda > \|K\|/\delta_T$
- $r_{\alpha, \lambda} > 0$ wenn $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$.

Also haben wir

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

Wir definieren $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$. u_α ist dann eine Lösung von (11). Nach (15)

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

mit Gleichheit, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

Lemma 3. Wir wählen $x_0 \in X$. Wir haben $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha &= \lambda, \\ \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} &= u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Beweis. Erstens impliziert Formel (12), dass für alle $\alpha \in]0, 1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$. Wir werden zeigen: $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1]}$ ist eine gleichkontinuierliche Familie. Sei $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Da die Funktionen K und T gleichmäßig stetig sind,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Mit $d(x, x') \leq \eta$, wir haben

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

und durch Symmetrie, $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$. $(u_\alpha)_{\alpha \in]0, 1]}$ ist daher eine gleichkontinuierliche Familie.

Wir werden das zeigen $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1]}$ ist eine einheitlich begrenzte Familie. Mit (11),

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Also haben wir $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. Mit (11) haben wir auch

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Also haben wir $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ und $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1]}$ ist einheitlich begrenzt.

Wir wählen $\alpha_n \in]1/2, 1[$ mit $\alpha_n \rightarrow 1^-$ wenn $n \rightarrow +\infty$. Nach dem Satz von Bolzano und Ascolis Satz, $\exists (\alpha_{\phi(n)}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$ mit

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda$
- $(u_{\alpha_{\phi(n)}})$ konvergiert gleichmäßig zu u .

Nimm das Limit in (11). Wir bekommen (16). Mit $u_\alpha(x_0) = 0 \forall \alpha$, wir haben auch $u(x_0) = 0$. Schließlich die Tatsache, dass $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ (und nicht nur für eine Teilsequenz) ergibt sich aus der Eindeutigkeit von λ , die (16) erfüllt, was in Abschnitt 5 bewiesen wurde.

Literaturhinweise

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O. Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. – P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschemdorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.