

التحليل العددي لمشاكل القيمة الذاتية العامة المعممة

J. Comput. Appl. Math. 163 (2004) 79 – 89

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01573578>

Nicolas Bacaër

ملخص

نحن مهتمون بمشكلة التحسين القطعي في وقت منفصل مع أفق لانهائي على مساحة مترية مدمجة بمعيار متوسط التكلفة يتضمن وظيفتين ، التكلفة والوقت. نقوم أولاً بجمع الخصائص المختلفة للقيمة λ كقيمة eigen max-plus ومشكلة برمجة خطية. ثم نثبت ارتباطاً بالخطأ الذي حدث عند λ عندما يتم تقسيم المساحة.

الكلمات الرئيسية: التحسين في وقت منفصل. متوسط السعر؛ البرمجة الخطية؛ التحليل العددي

1 المقدمة

نحن مهتمون بمشكلة التحسين القطعي في وقت منفصل في أفق لانهائي بمعيار متوسط التكلفة

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

X عبارة عن مساحة مترية صغيرة الحجم. K و T هي وظائف مستمرة مع $T > 0$. المجموعة X هي مساحة الدولة. x_n هي حالة النظام في الوقت المناسب n . $K(x_n, x_{n+1})$ هي التكلفة. $T(x_n, x_{n+1})$ هو الوقت المرتبط بانتقال الدولة $x_n \rightarrow x_{n+1}$. المشكلة مدفوعة بالأمتلة

- في الفيزياء (نماذج Frenkel و Kontorova لانتقال الطور [8]) ،
- في الهندسة (جدولة الآلة [10]) ،
- في الاقتصاد ([11] ، الزراعة [3] ، بائع متجول).

الهدف هنا ذو شقين. أولاً ، نقوم بجمع التوصيفات المختلفة لـ λ كمشكلة قيمة eigenvalue المعممة (تسمى أيضاً معادلة مثالية Bellman)

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

وكمشكلة برمجة خطية. يبدو أن هذه التوصيفات قد تم إثباتها فقط في حالة معينة حيث [7، 8، 13] $T = 1$ أو من مجموعة محدودة [4، 10، 11، 14]. ثانياً، نحن نظهر متجهة إلى الخطأ الذي على λ عندما تكون مساحة X هو discretized. هذا يعمم العمل الأخير [2] الذي يفترض أن $T = 1$.

دعونا نذكر بعض مجالات البحث المتعلقة بدراستنا. تظهر مشاكل البرمجة الخطية بأبعاد لا حصر لها والتي تشبه إلى حد كبير المعادلة (4) أدناه في مشكلة النقل الجماعي لمونجي و كانتوروفيتش وفي مشكلة النقل العابر لكانتوروفيتش وروبينشتاين التي تمت دراستها في [17]. هناك أيضاً نظامها بشكل طبيعي في الوقت المستمر لمشكلتنا. يتدخل تناظري زمني مستمر للصيغة (4) على سبيل المثال في دراسة أنظمة لاغرانج [12]. الخاصية (7) هي أيضاً عنصر أساسي في نظرية أوبري وماثر [5، 6]. تم العثور على مشاكل متوسط التكلفة أيضاً في إطار نظرية التحكم العشوائي [15، 16]. نفترض هذه الدراسات أن $T = 1$ وبالتالي لا تغطي عملنا. لاحظ أنه هنا ، لن يكون من الضروري استخدام الطرق المعقدة للبرمجة الخطية في البعد اللامتناهي [1] (الطوبولوجيا الضعيفة ، نظرية الأوغلو ، نظرية الفصل بالفرض) لإثبات "ازدواجية قوية".

2. عشرات والنتائج

دعونا نتذكر بعض التعاريف. إذا كانت X عبارة عن مساحة مترية مضغوطة ، $C^0(X)$ هي مساحة الوظائف المستمرة على X بيقم حقيقية. إنها مساحة Banach عندما يتم توفيرها مع معيار supremum. $\mathcal{M}(X)$ هي مساحة الأشكال الخطية المستمرة $C^0(X)$. إذا $\rho \in \mathcal{M}(X)$ ، $\rho \geq 0$ يعني ذلك $\langle u, \rho \rangle \geq 0 \forall u \in C^0(X)$ مع $u \geq 0$. تشير الأقواس المربعة إلى منتج الازدواجية.

يتطلب بيان النظرية الأولى بعض الرموز الخاصة. نحدد

$$\forall u \in C^0(X), \forall (x, y) \in X^2, (Q_1 u)(x, y) = u(x), (Q_2 u)(x, y) = u(y).$$

إذا $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$ ، نحدد $P_1 \rho$ و $P_2 \rho$ بواسطة

$$\forall u \in C^0(X), \langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle, \langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle.$$

إذا كانت E عبارة عن مجموعة و $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ثم الترميز $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ يعني أن $x \in E$ و $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$.

نظرية 1. دع X يكون مساحة مترية صغيرة ، $K \in C^0(X^2)$ و $T \in C^0(X^2)$ ومن المفترض $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. لدينا بعد ذلك

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X), \forall x \in X, \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\}. \quad (4)$$

إذا كان لدينا (1)، عندها (λ, u) تصل إلى الحد الأدنى في (3). إذا كان لدينا $x_0 \in X$ و

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

نملك

- (x_n) يصل إلى الحد الأقصى في (2)؛
- $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ محدد ب

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

- يصل إلى الحد الأقصى في (4).
- إذا كان لدينا $0 \leq i < j$

$$\forall (y_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) \Rightarrow \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

نقول أن الرقم الحقيقي الوحيد λ المحدد في نظرية 1 هو القيمة الذاتية لـ (K, T) . وظيفة u مع (1) "وظيفة ذاتية" لـ (K, T) . يتعلق الاقتراح التالي بالمشكلة المنقولة.

الاقتراح 1. نفس الفرضيات كما في نظرية 1. نحدد

$$\forall x, y \in X, \quad K'(x, y) = K(y, x), \quad T'(x, y) = T(y, x).$$

فليكن قيمة (K, T) eigenvalue و λ' القيمة الذاتية (K', T') . لدينا بعد ذلك $\lambda = \lambda'$.

نتناول النظرية التالية مسألة التحليل العددي لـ (1). تذكر أنه بمجرد فصلها، هناك خوارزميات معروفة لحل المشكلة المحدودة الناتجة، على سبيل المثال خوارزمية التكرار لـ [9].

نظرية 2. فليكن (X, d) فضاء متري مضغوط. $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ هي وظائف Lipschitz مع ثوابت C_K و C_T

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad |K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\}$$

$$|T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

ومن المفترض $T(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. فليكن قيمة (K, T) eigenvalue. $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ هو سلسلة من مجموعات فرعية محدودة من X بحيث

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

وفقًا لنظرية 1،

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists! \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \exists u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X_p, \quad \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

نحدد $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ و $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. لدينا بعد ذلك

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

و $\lambda_p \rightarrow \lambda$ إذا $p \rightarrow +\infty$.

تم ذكر بعض النتائج المفيدة لإثبات الجزء الأول من نظرية 1 في القسم 3. تم العثور على هذه النتائج على سبيل المثال في [2]. تم العثور على إثبات الجزء الأول من نظرية 1 في القسم 4. نثبت الصيغة (2) ومثالية (x_n) في القسم 5. نثبت الصيغ (3)، (4) ومثالية (λ, u) وبناءً على p^* في القسم 6 بتعميم البراهين [10]. نثبت الخاصية (7) في القسم 7، الاقتراح 1 في القسم 8، النظرية 2 في القسم 9. أخيرًا، نقترح في القسم 10 دليلًا بديلاً لوجود حل (λ, u) من (1). يعتمد الدليل على مرور إلى الحد الأقصى بدءًا من مشكلة تكلفة محدثة. ميزة هذا النهج مقارنة مع تلك الموجودة في القسم 4 هي أنه لا يستخدم الاقتراح 4 أدناه (والذي يعتمد على نظرية شايفر للنقطة الثابتة). يستخدم فقط نظرية بنات الثابتة.

3. نتائج معروفة

الاقترح 2. دع X يكون مساحة مترية مدمجة و $K \in C^0(X)$ نملك

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

علامة على ذلك،

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

الاقترح 3. دع X يكون مساحة مترية مدمجة. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, K_\alpha \in C^0(X)$. ومن المفترض $\forall x, y \in X$ هي دالة محدبة. للجميع $a \in \mathbb{R}$ ، λ_α هو العدد الحقيقي الوحيد المقترح 2. عندها $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ من $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هي دالة محدبة.

4. إثبات الجزء الأول من نظرية 1

نحدد

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y).$$

وفقاً للاقترح 2 ،

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists! \Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad \exists u_\lambda \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

مع الصيغة (8) ،

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

لكن $T \geq 0$. $K_\lambda = K - \lambda T$. $\lambda \mapsto K_\lambda$ من $\mathbb{R} \rightarrow C^0(X)$ وبالتالي هي وظيفة متناقصة. ثم تظهر الصيغة (9) ذلك $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ من $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هي أيضاً وظيفة متناقصة. K_λ هي دالة خطية وبالتالي محدبة λ . يوضح الاقتراح 3 أن Λ هي دالة محدبة ، وبالتالي هي دالة مستمرة.

نأخذ التسلسل الثابت يساوي x_0 إلى عن على $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ في (9). لدينا بعد ذلك

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

لكن $T(x_0, x_0) > 0$. اذا لدينا $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ اذا $\lambda \rightarrow -\infty$ و $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ اذا $\lambda \rightarrow -\infty$.

نظراً لأن X مضغوط ولأن الوظيفة T مستمرة وإيجابية تماماً ، فلدينا

$$\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0.$$

نحدد

$$\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}.$$

دعنا $\varepsilon > 0$ نملك

$$\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon.$$

وفقاً للصيغة (9) ، $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$ ، $\forall \lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$ ،

عندما تأخذ الدالة المستمرة values قيمًا إيجابية وسلبية ، $\Lambda(\lambda^*) = 0$. $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$. أخيراً،

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

هذا يثبت وجود جزء من النظرية 1. ينتج التفرد من الصيغة (2) ، والتي تم إثباتها في القسم التالي.

5. إثبات الصيغة (2)

• يتم تحديد $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ وفقاً لـ (1) ،

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

دعونا نضيف أول عدم المساواة N . نحصل

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

لكن $T > 0$ اذا لدينا

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

لان $T \geq \delta_T > 0$ ، نملك $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ اذا $N \rightarrow +\infty$. u هي دالة محدودة. لذا نحصل

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

لكن $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ كان تعسفا. اذا لدينا

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}. \quad (10)$$

• يتم تحديد $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ مع (5) ،

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

نضيف هذه المعادلات ونحصل

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

لقد فعلنا ذلك

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

مع (10) ، هذا يثبت الصيغة (2) وحقيقة ذلك (x_n) يصل إلى الحد الأقصى.

6. إثبات الصيغ (3) و (4)

نحدد

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\},$$

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2v \leq Q_1v\}.$$

نملك

$$\forall \rho \in E, \quad \forall (\mu, v) \in \tilde{E}, \quad \langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1v - Q_2v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho \rangle = \mu.$$

اذا لدينا

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

مع الجزء الأول من نظرية 1 ، نعلم أن هناك $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ مع (1). نملك $K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$. اذا لدينا $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ و

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

من (6) يمكننا أن نرى ذلك بسهولة $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ ، $\rho^* \geq 0$ و $\langle T, \rho^* \rangle = 1$. نملك

$$\forall u \in C^0(X), \quad \langle u, P_1\rho^* \rangle = \langle Q_1u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

$$\langle u, P_2\rho^* \rangle = \langle Q_2u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

إذا لدينا $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$ (لان u يحد) ، و $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$. لقد فعلنا ذلك $\rho^* \in E$. علاوة على ذلك ،

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

لان (x_n) يصل إلى الحد الأقصى في (2) . إذا لدينا

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda .$$

في الختام ،

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} ,$$

ρ^* يصل إلى الحد الأقصى و (λ, u) يصل إلى الحد الأدنى.

7. إثبات (7)

ومن المفترض $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ و $0 \leq i < j$ مع $(y_i, y_j) = (x_i, x_j)$. نملك

$$\forall i \leq n \leq j-1, \quad \begin{aligned} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) &= u(x_n), \\ K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) &\leq u(y_n). \end{aligned}$$

نضيف هذه المعادلات ونستخدمها $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. نحصل

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8. إثبات الاقتراح 2

نختار وظيفة ذاتية $u \in C^0(X)$ من (K, T) . نختار وظيفة ذاتية $u' \in C^0(X)$ من (K', T') . يتم تحديد $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$. يوجد مع $x_1 \in X$

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

لاحظ أن

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

اطرح هذين الخطين . نحصل

$$(\lambda - \lambda') T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0.$$

إذا لدينا $0 \leq \lambda - \lambda' \leq 0$ و $\lambda \leq \lambda'$. إذا تبادلنا (K, T) و (K', T') ، نحصل $\lambda' \leq \lambda$. إذا لدينا $\lambda' \leq \lambda$.

9. إثبات النظرية 3

نختار ص $\in \mathbb{N}$. وفقاً للصيغة (2) ،

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}, \\ \lambda_p &= \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}. \end{aligned}$$

من جهة ، $X_p \subset X$. لذلك من الواضح أن $\lambda \geq \lambda_p$. من ناحية أخرى ، نختار $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. حسب تعريف h_p ،

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in X_p, \quad d(x_n, y_n) \leq h_p.$$

لكن T و K هي وظائف Lipschitz

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq C_K h_p, \\ |T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| \leq C_T h_p.$$

للتبسيط ، نحدد $y = (y_n)$ ، $x = (x_n)$

$$K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$$

ونفس الشيء ل $T_N(x)$. لدينا بعد ذلك

$$\forall N \geq 1, \quad \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| = \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ \leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ \leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}.$$

لقد فعلنا ذلك

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p.$$

لكن $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ كان تعسفاً. وهكذا نحصل على اللامساواة الثانية للنظرية 3.

10. إثبات وجود بديل: طريقة التكلفة المخفضة

ليما 1.

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

دليل. دع $\alpha \in]0, 1[$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. نحدد

$$\forall v \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

بما أن K و T مستمران بشكل موحد، $\mathcal{K}(C^0(X)) \subset C^0(X)$. نملك

$$\forall v_1, v_2 \in C^0(X), \quad \forall x \in X, \quad (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) \leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ \leq \alpha \|v_1 - v_2\|.$$

لذا بالتناظر ، $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$. لأن $\alpha \in]0, 1[$ ، تظهر نظرية بنات نقطة ثابتة $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$ ، $\exists v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$.

ليما 2. يتم تحديد $x_0 \in X$ نملك $u_{\alpha}(x_0) = 0$ ، $\exists \lambda_{\alpha} \in \mathbb{R}$ ، $\exists u_{\alpha} \in C^0(X)$ ، $\forall \alpha \in]0, 1[$ و

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_{\alpha} T(x, y) + \alpha u_{\alpha}(y)\} = u_{\alpha}(x). \quad (11)$$

علاوة على ذلك،

$$\lambda_{\alpha} = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (12)$$

دليل. دع $\alpha \in]0, 1[$. للجميع $\lambda \in \mathbb{R}$ ، يتم تحديد $v_{\alpha, \lambda}$ كما هو الحال في lemma 1 ونحدده

$$u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0), \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0).$$

وفقاً لـ Lemma 1،

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

نملك

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (13)$$

لإثبات ذلك ، لدينا

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (14)$$

نضرب هذه المعادلة في α^n . نحن نجمع ونستخدم $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$ نحصل

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}. \quad (15)$$

عدم المساواة هو المساواة إذا كان هناك مساواة في (14) للجميع n . هذا يثبت (13).

بحسب (13): $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$ هي دالة محدبة (وبالتالي مستمرة) ووظيفة متناقصة ، لأنها الغلاف العلوي لتناقص الوظائف الخطية لـ λ . علاوة على ذلك،

$$\begin{aligned} & \bullet \quad r_{\alpha, \lambda} < 0 \quad \text{إذا } \lambda > \|K\|/\delta_T \\ & \bullet \quad r_{\alpha, \lambda} > 0 \quad \text{إذا } \lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0) \end{aligned}$$

إذا لدينا

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0.$$

نحدد $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$. ثم حل (11). بحسب (15):

$$\forall (x_n)_{n \geq 1}, \quad \lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

مع المساواة إذا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

ليما 3. يتم تحديد $x_0 \in X$ نمالك. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in C^0(X)$ ،:

$$\begin{aligned} & u(x_0) = 0, \\ & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda, \\ & \forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

دليل. أولاً ، الصيغة (12) تعني ذلك لجميع $\alpha \in]0, 1[$ ، $\|K\|/\delta_T \leq |\lambda_\alpha|$. سوف نظهر: $(u_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ هي عائلة متساوية. دع X و $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. نظراً لأن الدالتين K و T مستمرتان بشكل موحد ،

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

مع $d(x, x') \leq \eta$ نمالك

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1[, \quad u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha (T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

وبالتناظر ، $(u_\alpha)_{\alpha \in]0, 1[}$ هي عائلة متواصلة.

سوف نظهر ذلك $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ هي عائلة محدودة بشكل موحد. مع (11) ،

$$\forall \alpha \in]1/2, 1[, \quad \forall y \in X, \quad K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

إذا لدينا $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ مع (11) لدينا أيضا

$$\forall x \in X, \quad u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

إذا لدينا $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$ و $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2, 1[}$ يحد بشكل موحد.

يتم تحديد $\alpha_n \in]1/2, 1[$ مع $\alpha_n \rightarrow 1^-$ إذا $n \rightarrow +\infty$. حسب نظرية Bolzano ونظرية أسكولي ، $\exists (\alpha_{\phi(n)})$ ، $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ، $\exists u \in C^0(X)$ مع

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_{\phi(n)}} = \lambda \bullet$$

$$u_{\alpha_{\phi(n)}} \text{ تتلاقى بشكل موحد } u \bullet$$

خذ الحد في (11). نحصل على (16). مع $u_{\alpha}(x_0) = 0 \forall \alpha$ ، ولدينا ايضا $u(x_0) = 0$. أخيرا ، حقيقة ذلك $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} = \lambda$ (وليس فقط بالنسبة للالتزام) ينتج عن تفرد λ الذي يرضي (16) ، والذي تم إثباته في القسم 5.

المراجع الببليوغرافية

1. E. J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite – Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
2. N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel – Kontorova models and homogenization of Hamilton – Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185 – 1195.
3. N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
5. V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H. O. Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1 – 56.
6. V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49 – 63.
7. W. Chou, R. J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486 – 498.
8. W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one – dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 6219 – 6234.
9. J. Cochet – Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J. –P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max – plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>
10. R. A. Cuninghame – Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.
11. G. B. Dantzig, W. O. Blattner, M. R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77 – 83.
12. A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043 – 1046.
13. V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.
14. E. L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209 – 213.
15. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.
16. O. Hernandez – Lerma, J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete – time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.
17. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.
18. S. Yu. Yakovenko, L. A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V. P. Maslov, S. N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167 – 210.