



HAL
open science

Analyse numérique des problèmes de valeur propre max-plus généralisés

Nicolas Bacaër

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër. Analyse numérique des problèmes de valeur propre max-plus généralisés. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 10.1016/j.cam.2003.08.054 . hal-01573578v1

HAL Id: hal-01573578

<https://hal.science/hal-01573578v1>

Submitted on 10 Aug 2017 (v1), last revised 16 Jun 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse numérique des problèmes de valeur propre max-plus généralisés *

Nicolas Bacaër

Résumé

On s'intéresse au problème d'optimisation déterministe en temps discret à horizon infini sur un espace métrique compact avec un critère de coût moyen qui fait intervenir deux fonctions K (le coût) et T (le temps). On rassemble tout d'abord les différentes caractérisations de la valeur λ comme problème de valeur propre max-plus et comme problème de programmation linéaire. Puis on démontre une borne sur l'erreur faite sur λ lorsque l'espace est discrétisé.

Mots clés : Optimisation en temps discret ; Coût moyen ; Programmation linéaire ; Analyse numérique

1 Introduction

On s'intéresse au problème d'optimisation déterministe en temps discret à horizon infini avec un critère de coût moyen

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

où X est un espace métrique compact, K et T sont des fonctions continues avec $T > 0$. L'ensemble X est l'espace d'états, x_n l'état du système au temps n , $K(x_n, x_{n+1})$ le coût et $T(x_n, x_{n+1})$ le temps associé à la transition de l'état x_n vers l'état x_{n+1} . Le problème est motivé par des exemples qui viennent de la physique (modèles de Frenkel et Kontorova pour les transitions de phase [8]), de l'ingénierie (ordonnancement des machines [10]) et de l'économie ([11], agriculture [3], voyageur de commerce).

L'objectif ici est double. Tout d'abord, on rassemble les différentes caractérisations de λ comme problème de valeur propre max-plus généralisé (aussi appelé équation d'optimalité de Bellman)

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)$$

* *Journal of Computational and Applied Mathematics* 163 (2004) 79-89.

et comme problème de programmation linéaire. Ces caractérisations semblent n'avoir été démontrées que dans le cas particulier où $T = 1$ [7, 8, 13] ou d'un ensemble X qui est fini [11, 14, 10, 4]. Deuxièmement, on démontre une borne pour l'erreur commise sur λ lorsque l'espace X est discrétisé, ce qui généralise un travail récent [2] qui supposait que $T = 1$.

Mentionnons quelques domaines de recherche liés à notre étude. Des problèmes de programmation linéaire en dimension infinie qui ressemblent beaucoup à l'équation (4) ci-dessous apparaissent dans le problème de transport de masse de Monge et Kantorovich et dans le problème de transbordement de Kantorovich et Rubinstein étudié dans [17]. Il y a naturellement aussi des analogues en temps continu de notre problème. Un analogue en temps continu de la formule (4) intervient par exemple dans l'étude des systèmes lagrangiens [12]. La propriété (7) est aussi un ingrédient de base de la théorie d'Aubry et Mather [5, 6]. Des problèmes de coût moyen se trouvent aussi dans le cadre de la théorie du contrôle stochastique [15, 16]. Ces études supposent que $T = 1$ et ne couvrent donc pas notre travail. Notons qu'ici, il ne sera pas nécessaire d'utiliser les méthodes sophistiquées de la programmation linéaire en dimension infinie présentées par exemple dans [1] et basées sur les topologies faibles, le théorème d'Alaoglu et le théorème de séparation par un hyperplan pour démontrer la « dualité forte ».

2 Notations et résultats

Rappelons quelques définitions. Si X est un espace métrique compact, alors $C^0(X)$ est l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles. C'est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme du suprémum. L'espace dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $C^0(X)$ (ou mesures sur X), sera noté $\mathcal{M}(X)$. Si $\rho \in \mathcal{M}(X)$, alors $\rho \geq 0$ signifie que $\langle u, \rho \rangle \geq 0$ pour tout $u \in C^0(X)$ tel que $u \geq 0$. Les crochets désignent le produit de dualité.

L'énoncé du premier théorème nécessite quelques notations spéciales. Si $u \in C^0(X)$, définissons Q_1u et $Q_2u \in C^0(X^2)$ par $(Q_1u)(x, y) = u(x)$ et $(Q_2u)(x, y) = u(y)$ pour tout $(x, y) \in X^2$. Si $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$, définissons $P_1\rho$ et $P_2\rho \in \mathcal{M}(X)$ par $\langle u, P_1\rho \rangle = \langle Q_1u, \rho \rangle$ et $\langle u, P_2\rho \rangle = \langle Q_2u, \rho \rangle$ pour tout $u \in C^0(X)$. Rappelons aussi que si E est un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, alors la notation $x \in \operatorname{argmax}_{y \in E} f(y)$ signifie que $x \in E$ et $f(x) = \max\{f(y); y \in E\}$.

Théorème 1 *Soit X un espace métrique compact, $K \in C^0(X^2)$ et $T \in C^0(X^2)$. Supposons que $T(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in X$. Il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in C^0(X)$ avec*

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (1)$$

De plus,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (2)$$

$$= \min\{\mu; (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X), K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \quad (3)$$

$$= \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in \mathcal{M}(X^2), \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1 \rho = P_2 \rho\} \quad (4)$$

et (λ, u) qui vérifient (1) atteignent le minimum dans (3). Si $x_0 \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \quad (5)$$

alors

- (x_n) atteint le maximum dans (2);
- la mesure $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ définie par

$$\forall \phi \in C^0(X^2), \quad \langle \phi, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \quad (6)$$

atteint le maximum dans (4).

- pour tout $0 \leq i < j$, pour tout $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$,

$$\sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \quad (7)$$

On dit que l'unique nombre réel λ défini dans le théorème 1 est la valeur propre de (K, T) . On dit d'une fonction u qui vérifie (1) que c'est une fonction propre de (K, T) . La proposition suivante concerne le problème transposé.

Proposition 1 *Mêmes hypothèses que dans le théorème 1. Pour tout $x, y \in X$, posons $K'(x, y) = K(y, x)$ et $T'(x, y) = T(y, x)$. Soit λ la valeur propre de (K, T) et λ' la valeur propre de (K', T') . Alors $\lambda = \lambda'$.*

Le théorème suivant aborde la question de l'analyse numérique de (1). Rappelons qu'une fois discrétisé, il y a des algorithmes bien connus pour résoudre le problème fini qui en résulte, par exemple l'algorithme d'itération des politiques [9].

Théorème 2 *Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $T : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lipschitziennes avec des constantes de Lipschitz C_K et $C_T : \forall x, x', y, y' \in X$,*

$$|K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\}$$

$$|T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}.$$

Supposons que $T(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in X$. Soit λ la valeur propre de (K, T) . Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de X tels que

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème 1, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\lambda_p \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in X_p, \max_{y \in X_p} \{K(x, y) - \lambda_p T(x, y) + u_p(y)\} = u_p(x).$$

Soit $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\}$ et $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\| C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

et $\lambda_p \rightarrow \lambda$ quand $p \rightarrow +\infty$.

Certains résultats utiles pour démontrer la première partie du théorème 1 sont rappelés dans la section 3. Ces résultats se trouvent par exemple dans [2]. La preuve de la première partie du théorème 1 se trouve dans la section 4. On démontre la formule (2) et l'optimalité de (x_n) dans la section 5. On démontre les formules (3), (4) et l'optimalité de (λ, u) et de ρ^* dans la section 6 en généralisant les démonstrations de [10]. On démontre la propriété (7) dans la section 7, la proposition 1 dans la section 8, le théorème 2 dans la section 9. Enfin, on propose dans la section 10 une démonstration alternative de l'existence de (λ, u) qui vérifie (1). Elle repose sur un passage à la limite à partir d'un problème de coût actualisé. Un avantage de cette approche par rapport à celle de la section 4 est qu'elle n'utilise pas la proposition 4 ci-dessous (qui repose sur le théorème de point fixe de Schauder). Elle n'utilise que le théorème de point fixe de Banach.

3 Résultats connus

Proposition 2 Soit X un espace métrique compact et $K \in C^0(X)$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in C^0(X)$ qui vérifie

$$\forall x \in X, \max_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x).$$

De plus,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}). \quad (8)$$

Proposition 3 Soit X un espace métrique compact. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $K_\alpha \in C^0(X)$. Supposons que pour tout $x, y \in X$, la fonction $\alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ soit convexe. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit λ_α l'unique nombre réel associé à K_α par la proposition 2. Alors la fonction $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est convexe.

4 Démonstration de la première partie du théorème 1

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in X$, posons $K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y)$. Vue la proposition 2, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe

$u_\lambda \in C^0(X)$ qui vérifie

$$\forall x \in X, \max_{y \in X} \{K_\lambda(x, y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Avec la formule (8), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda(\lambda) = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1}). \quad (9)$$

Mais $T \geq 0$ implique que l'application $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$ de \mathbb{R} dans $C^0(X)$ est décroissante. La formule (9) montre alors que l'application $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est aussi décroissante. Puisque K_λ est une fonction linéaire (donc convexe) de λ , la proposition 3 montre que Λ est une fonction convexe, donc continue.

Prenons pour la suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ dans (9) la suite stationnaire égale à x_0 . Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Mais $T(x_0, x_0) > 0$, donc $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$, et $\Lambda(\lambda) \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$.

Puisque X est compact et puisque la fonction T est continue et strictement positive, on a $\delta_T = \min\{T(x, y); (x, y) \in X^2\} > 0$. Posons $\|K\| = \max\{|K(x, y)|; (x, y) \in X^2\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$ et $(x, y) \in X^2$, on a $K_\lambda(x, y) = K(x, y) - \lambda T(x, y) \leq \|K\| - \lambda \delta_T \leq -\varepsilon$. La formule (9) implique que pour tout $\lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$, on a $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$.

Comme la fonction continue Λ prend des valeurs > 0 et < 0 , il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(\lambda^*) = 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad u_{\lambda^*}(x) &= \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y \in X} \{K_{\lambda^*}(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\} \\ &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda^* T(x, y) + u_{\lambda^*}(y)\}. \end{aligned}$$

La partie existence du théorème 1 est démontrée. L'unicité résulte de la formule (2), qui est démontrée dans la prochaine section.

5 Démonstration de la formule (2)

- Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Alors (1) implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Additionnons les N premières inégalités. On obtient

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Mais $T > 0$, donc

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Comme $T \geq \delta_T > 0$, on a $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \rightarrow +\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Comme u est borné, on obtient

$$\lambda \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Mais $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ était arbitraire. Donc

$$\lambda \geq \sup_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

• Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui vérifie (5). Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

On additionne ces équations et on obtient comme avant que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Avec (10), cela démontre la formule (2) et le fait que (x_n) atteigne le maximum.

6 Démonstration des formules (3) et (4)

Posons

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2); \rho \geq 0, \langle T, \rho \rangle = 1, P_1\rho = P_2\rho\}$$

et

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X); K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\}.$$

Pour tout $\rho \in E$ et $(\mu, v) \in \tilde{E}$,

$$\langle K, \rho \rangle \leq \langle \mu T + Q_1 v - Q_2 v, \rho \rangle = \mu \langle T, \rho \rangle + \langle v, P_1 \rho - P_2 \rho \rangle = \mu,$$

donc

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Avec la première partie du théorème 1, on sait qu'il existe $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ qui vérifie (1). On remarque que $K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$ pour tout $x, y \in X$, donc $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ et

$$\inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

Considérons ρ^* défini par (6). On voit facilement que ρ^* appartient à $\mathcal{M}(X^2)$, que $\rho^* \geq 0$ et que $\langle T, \rho^* \rangle = 1$. Pour tout $u \in C^0(X)$,

$$\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

$$\langle u, P_2 \rho^* \rangle = \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

donc $\langle u, P_1 \rho^* \rangle = \langle u, P_2 \rho^* \rangle$ (puisque u est borné), et $P_1 \rho^* = P_2 \rho^*$. Ainsi $\rho^* \in E$. De plus,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

puisque (x_n) atteint le maximum dans (2). Donc

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} \geq \lambda.$$

En conclusion,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle; \rho \in E\} = \min\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* atteint le maximum et (λ, u) atteint le minimum.

7 Démonstration de (7)

Soit $0 \leq i < j$ et $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Pour tout $i \leq n \leq j-1$,

$$K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) = u(x_n),$$

$$K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) \leq u(y_n).$$

Additionnons ces équations et utilisons l'égalité $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\ &= u(x_i) - u(x_j) \\ &= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

8 Démonstration de la proposition 2

Soit $u \in C^0(X)$ une fonction propre de (K, T) et $u' \in C^0(X)$ une fonction propre de (K', T') . Choisissons $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{u(x) + u'(x)\}$. Il existe $x_1 \in X$ tel que

$$K(x_0, x_1) - \lambda T(x_0, x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Remarquons que

$$K'(x_1, x_0) - \lambda' T'(x_1, x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Soustrayons ces deux lignes. On obtient

$$(\lambda - \lambda')T(x_0, x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0,$$

donc $\lambda - \lambda' \leq 0$ et $\lambda \leq \lambda'$. Si l'on échange (K, T) et (K', T') , on obtient $\lambda' \leq \lambda$. Donc $\lambda = \lambda'$.

9 Démonstration du théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule (2),

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

$$\lambda_p = \max_{(y_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n, y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n, y_{n+1})}.$$

D'un côté, $X_p \subset X$, donc il est clair que $\lambda \geq \lambda_p$. D'un autre côté, soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. D'après la définition de h_p , pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in X_p$ tel que $d(x_n, y_n) \leq h_p$. Mais les fonctions K et T sont lipschitziennes, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq C_K h_p$ et $|T(x_n, x_{n+1}) - T(y_n, y_{n+1})| \leq C_T h_p$. Pour simplifier, posons $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})$ et de même pour $T_N(x)$. Alors pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)} \right| &= \left| \frac{[K_N(x) - K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K_N(x) - K_N(y)}{T_N(x)} \right| + \left| \frac{K_N(y)[T_N(y) - T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)} \right| \\ &\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(x)}{T_N(x)} &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p \\ &\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p. \end{aligned}$$

Mais $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ était arbitraire. On obtient donc la seconde inégalité du théorème 3.

10 Démonstration alternative de l'existence : la méthode du coût actualisé

Lemme 1 Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$ tel que

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_{\alpha, \lambda}(y)\} = v_{\alpha, \lambda}(x).$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $v \in C^0(X)$ et $x \in X$, posons

$$(\mathcal{K}v)(x) = \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v(y)\}.$$

Puisque K et T sont uniformément continus, \mathcal{K} envoie $C^0(X)$ dans $C^0(X)$. Pour tout $v_1, v_2 \in C^0(X)$ et $x \in X$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\leq \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\leq \alpha \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Donc par symétrie, $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \leq \alpha \|v_1 - v_2\|$. Puisque $\alpha \in]0, 1[$, le théorème du point fixe de Banach montre qu'il existe $v_{\alpha, \lambda} \in C^0(X)$ tel que $\mathcal{K}v_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda}$.

Lemme 2 Soit $x_0 \in X$. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe un unique $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u_\alpha \in C^0(X)$ qui vérifie $u_\alpha(x_0) = 0$ et

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda_\alpha T(x, y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \quad (10)$$

De plus,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}. \quad (11)$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, choisissons $v_{\alpha, \lambda}$ comme dans le lemme 1 et posons $u_{\alpha, \lambda} = v_{\alpha, \lambda} - v_{\alpha, \lambda}(x_0)$ et $r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) v_{\alpha, \lambda}(x_0)$. Alors le lemme 1 montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in X$,

$$\max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(y)\} = r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x).$$

Ceci implique que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$r_{\alpha, \lambda} = (1 - \alpha) \max_{(x_n)_{n \geq 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \quad (12)$$

En effet, pour tout $(x_n)_{n \geq 1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha u_{\alpha, \lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha, \lambda} + u_{\alpha, \lambda}(x_n). \quad (13)$$

Multiplions cette équation par α^n , faisons la somme et utilisons le fait que $u_{\alpha, \lambda}(x_0) = 0$. On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha, \lambda}}{1 - \alpha}, \quad (14)$$

et il y a égalité si $(x_n)_{n \geq 1}$ est choisi de sorte qu'il y ait égalité dans (14) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci démontre (13).

Notons que (13) montre que l'application $\lambda \mapsto r_{\alpha, \lambda}$ est convexe (donc continue) et décroissante, puisque c'est l'enveloppe supérieure de fonctions linéaires décroissantes de λ . De plus, $r_{\alpha, \lambda} < 0$ pour $\lambda > \|K\|/\delta_T$ et $r_{\alpha, \lambda} > 0$ pour $\lambda < K(x_0, x_0)/T(x_0, x_0)$. Donc il existe $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_{\alpha, \lambda_\alpha} = 0$. Posons $u_\alpha = u_{\alpha, \lambda_\alpha}$. Alors u_α vérifie (11). Et (15) implique que pour tout $(x_n)_{n \geq 1}$,

$$\lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})},$$

avec égalité si $(x_n)_{n \geq 1}$ est choisi tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{y \in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

Lemme 3 Soit $x_0 \in X$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^0(X)$ tel que $u(x_0) = 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ et

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x). \quad (15)$$

Démonstration. Tout d'abord, la formule (12) implique que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$. Montrons que la famille $(u_\alpha)_{\alpha \in (0, 1)}$ est équicontinue. Soit $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque les fonctions K et T sont uniformément continues, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d(x, x') \leq \eta$ implique

$$\max_{y \in X} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y \in X} |T(x, y) - T(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Si $d(x, x') \leq \eta$, alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y \in X} \{K(x, y) - K(x', y) - \lambda_\alpha(T(x, y) - T(x', y)) \\ &\quad + K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y \in X} \{K(x', y) - \lambda_\alpha T(x', y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T} \varepsilon, \end{aligned}$$

et par symétrie, $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$. Donc la famille $(u_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ est équicontinue.

Montrons que la famille $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2,1[}$ est uniformément bornée. Avec (11), on voit que pour tout $\alpha \in]1/2,1[$ et $y \in X$,

$$K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Donc $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. De (11), il résulte aussi que pour tout $x \in X$,

$$u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0) + \alpha u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha T(x, x_0).$$

Donc $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. Ainsi $(u_\alpha)_{\alpha \in]1/2,1[}$ est uniformément borné.

Soit (α_n) une suite dans l'intervalle $]1/2,1[$ telle que $\alpha_n \rightarrow 1^-$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par les théorèmes de Bolzano et d'Ascoli, il existe une sous-suite, encore notée (α_n) , $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^0(X)$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\alpha_n} = \lambda$ et (u_{α_n}) converge uniformément vers u . Prenons la limite dans (11) : on obtient (16). Puisque $u_\alpha(x_0) = 0$ pour tout α , on a aussi $u(x_0) = 0$. Enfin, le fait que $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda = \lambda$ (et pas seulement pour une sous-suite) résulte de l'unicité de λ qui vérifie (16), qui a été démontrée dans la section 5.

Références

- [1] E.J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.
- [2] N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel-Kontorova models and homogenization of Hamilton-Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185-1195.
- [3] N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.
- [4] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.
- [5] V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H.O Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1-56.
- [6] V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49-63.
- [7] W. Chou, R.J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486-498.
- [8] W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one-dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 62196234.
- [9] J. Cochet-Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J.-P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html>.

- [10] R.A. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Springer, Berlin, 1979.
- [11] G.B. Dantzig, W.O. Blattner, M.R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : *Theory of Graphs, International Symposium*, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77-83.
- [12] A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, *C.R. Acad. Sci. Paris I* 324 (1997) 1043-1046.
- [13] V.N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, *Idempotent Analysis and its Applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [14] E.L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : *Theory of Graphs, International Symposium*, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209-213.
- [15] O. Hernandez-Lerma, J.B. Lasserre, *Discrete-time Markov Control Processes*, Springer, Berlin, 1996.
- [16] O. Hernandez-Lerma, J.B. Lasserre, *Further Topics on Discrete-time Markov Control Processes*, Springer, Berlin, 1999.
- [17] S.T. Rachev, L. Rüschendorf, *Mass Transportation Problems*, Springer, Berlin, 1998.
- [18] S.Yu. Yakovenko, L.A. Kontorov, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V.P. Maslov, S.N. Samborski (Eds.), *Idempotent Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167-210.