



HAL
open science

Une autre Géométrie de Descartes : le problème des trois bâtons ou "comment bien démêler les équations"

Sébastien Maronne

► **To cite this version:**

Sébastien Maronne. Une autre Géométrie de Descartes : le problème des trois bâtons ou "comment bien démêler les équations". Thibault Gress. Cheminer avec Descartes. Concevoir, raisonner, comprendre, admirer et sentir, Classiques Garnier, pp.313-341, 2018. hal-01572457

HAL Id: hal-01572457

<https://hal.science/hal-01572457>

Submitted on 7 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE AUTRE GEOMETRIE DE DESCARTES : LE PROBLEME DES TROIS BÂTONS OU COMMENT « BIEN DEMÊLER LES EQUATIONS »

Résumé

J'étudie dans cet article un problème de gnomonique connu sous les deux noms de « problème des trois bâtons » ou *Problema astronomicum*, et jugé exemplaire selon l'aveu même de Descartes « pour remarquer l'industrie de bien démêler les équations ». En donnant l'histoire et une brève présentation mathématique de ce problème qui n'a pas cessé de retenir l'attention de Descartes puis de Schooten, mais reste toutefois méconnu par l'historiographie cartésienne, je souhaite mettre en lumière une *autre* Géométrie cartésienne.

Introduction

Un problème de gnomonique

Je me propose d'étudier dans cet article¹ un problème de gnomonique² connu sous les deux noms de « problème des trois bâtons » ou *Problema astronomicum*, et jugé exemplaire selon l'aveu même de Descartes « pour remarquer l'industrie de bien *démêler* les équations ». Bien que le nombre des hypothèses varient selon les mathématiciens qui s'y intéressent, et que la question de la dépendance des hypothèses les unes par rapport aux autres constituent un enjeu dans la résolution, on peut décrire ce problème de la façon suivante. Il s'agit de déterminer le lieu et le jour de l'année dans lesquels trois bâtons **A**, **B**, **C**, placés verticalement sur un plan horizontal, produisent des ombres dont l'extrémité passe respectivement par le pied de chacun des deux autres bâtons, les longueurs de ces bâtons et la longueur AB entre deux de ces bâtons étant données.

Des *Cogitationes Privatae* des années 1620 à la Correspondance de 1630, de la controverse de 1638-1640 avec Stampioen à l'édition latine de *La Géométrie* de 1649, mais aussi dans la Correspondance de 1645, des problèmes de gnomonique mathématique parcourent la Géométrie cartésienne. On retrouve ainsi des questions conceptuellement semblables dont les énoncés et les hypothèses varient. Parmi ces questions, le problème des trois bâtons occupe une place centrale.

En donnant l'histoire et une brève présentation mathématique de ce problème qui n'a pas cessé de retenir l'attention de Descartes puis de Schooten, mais reste toutefois méconnu par l'historiographie cartésienne, je souhaite mettre en lumière une *autre* Géométrie cartésienne.

En guise de prologue : une lettre de Descartes de juin 1645

¹ Cet article a été rédigé à partir de la troisième partie de ma thèse Maronne (2007) qui aborde dans le détail le *Problema Astronomicum*.

² La gnomonique est la théorie des cadrans solaires.

Dans une lettre de Descartes à un destinataire inconnu qu'Adam et Tannery datent de juin 1645³, on trouve des recommandations de Descartes sur des questions à soumettre pour éprouver la Méthode enseignée dans *La Géométrie* de 1637. Descartes commence par revenir sur une question proposée par son correspondant, celle consistant à trouver une sphère tangente à quatre sphères données, qu'il juge comme relevant du « Calcul » c'est-à-dire du calcul littéral⁴.

Le caractère remarquable des exemples présentés par Descartes dans cette lettre tient à leur *variété*. Pour « faire preuve des divers usages de l'Algebre », Descartes propose ainsi une question arithmétique sur les nombres tri-parfaits⁵, qu'il a traitée dans la Correspondance avec Mersenne de l'année 1638⁶ après avoir dans un premier temps dénié l'intérêt de telles questions⁷. Il propose aussi comme question « touchant les lignes courbes », le problème inverse des tangentes qui lui avait été proposé par Debeaune à l'automne 1638⁸. Fait remarquable, Descartes paraît ainsi revenir sur les limitations strictes qu'il avait imposées à la Méthode huit ans plus tôt dans *La Géométrie*.

D'autre part, dans cette même lettre, Descartes recommande à son correspondant la « question des trois bâtons » comme un problème exemplaire pour apprendre à pratiquer la combinaison et l'élimination des équations dans la résolution des problèmes géométriques. Citons Descartes :

Pour des questions, celle des quatre globes, que vous me mandez avoir enuoyée, est fort bonne, afin d'éprouver si on sçait bien le calcul ; *mais pour remarquer aussi l'industrie de bien demesler les équations, ie n'en sçache point de plus propre que celle des trois bâtons*⁹, dont la solution n'a peut-estre point encore passé jusqu'en Bourgogne. *Tres baculi erecti sunt ad perpendicularum, in horizontali plano, ex punctis A, B, C. Et baculus A est 6 pedum, B 18 pedum, C 8 pedum, & linea AB est 33 pedum. Et unâ atque eâdem die extremitas umbræ solaris, quam facit baculus A, transit per puncta B & C ; extremitas umbræ baculi B, per A & C ; & ex consequenti etiam baculi C, per A & B. Quæritur in quanam poli altitudine, & qua die anni contingat. Et supponimus illas umbras describere accurate conicas sectiones, ut quæstio sit Geometrica, non Mechanica.*¹⁰

Le problème des trois bâtons et la géométrie cartésienne : étude historique

La gnomonique mathématique dans le contexte cartésien : Clavius et Desargues

La gnomonique mathématique occupa durant le dix-septième siècle une place importante dans le champ de la recherche et des études mathématiques¹¹. Clavius avait

³ Cf. AT IV, p. 227-232.

⁴ L'initiation au calcul littéral et au calcul des radicaux fait par exemple l'objet de la première partie de *l'Introduction à la Géométrie* qu'on attribue à Haestrecht, comme des *Principia Matheseos Universalis* rédigées par Erasme Bartholin à partir de ses notes du cours de Frans van Schooten. Cf. Haestrecht ? (1638a), p. 661-672, Haestrecht ? (1638b), p. 328-338 et Schooten (1651).

⁵ C'est-à-dire les nombres dont la somme des diviseurs est égale au triple de ces mêmes nombres.

⁶ Cf. la lettre à Mersenne du 13 juillet 1638 : AT II, p. 250-251. Descartes donne dans cette lettre plusieurs nombres tri-parfaits sans démonstration, indiquant que pour les trouver, il n'a fait qu'employer « son Analyse ».

⁷ Cf. la lettre à Mersenne d'octobre ou novembre 1631 : AT I, p. 229-230.

⁸ Cf. la lettre de Descartes à Debeaune du 20 février 1639 : AT II, p. 514-517.

⁹ C'est moi qui souligne.

¹⁰ Cf. AT V, p. 228-229.

¹¹ Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'ouvrage de Jean Pares : Pares (1988).

en effet donné en 1581 une somme savante sur la théorie mathématique de la gnomonique qui fera autorité au siècle suivant, les *Gnomonices Libri Octo*¹². Dans le cadre de l'enseignement jésuite pratiqué à La Flèche, on peut supposer que cet ouvrage ait pu passer par les mains de Descartes.

Un autre témoin de l'engouement pour les questions portant sur la théorie et la pratique des cadrans solaires, proche de Descartes, est le géomètre lyonnais Desargues. Celui-ci a consacré deux travaux à la gnomonique, le premier figurant dans son second *Brouillon Project* publié en août 1640¹³, le second tiré à part, fin 1640, comme complément¹⁴. Ce second écrit retiendra l'attention de Descartes qui jugera, dans une lettre à Mersenne du 28 janvier 1641, l'invention qui y est présentée « fort belle, & d'autant plus ingénieuse qu'elle est plus simple »¹⁵. De surcroît, Descartes suggérera un procédé facilitant la pratique de la méthode du géomètre lyonnais¹⁶.

La méthode présentée par Desargues dans ce dernier écrit s'appuie sur une idée géométrique fort simple. Il s'agit de retrouver un cercle de section du cône des rayons solaires, trois directrices — qui correspondent à trois rayons solaires observés au cours d'une journée — étant données. Pour cela, Desargues remarque qu'il suffit de prendre sur ces trois génératrices trois longueurs égales à partir du sommet. On obtiendra ainsi trois points déterminant un cercle de section dont le centre appartiendra à l'axe du cône des rayons, c'est-à-dire au style du cadran solaire. Ce dernier sera ainsi déterminé par le sommet du cône et ce dernier point.

On trouve enfin une *Propositio demonstrata a. D. Descartes* éditée par Clerselier à la suite d'une lettre de Descartes du 18 décembre 1648 à un destinataire inconnu¹⁷, qui répond à une question antérieure proposée par Desargues en 1641¹⁸. Voici l'énoncé de cette proposition :

Etant donnée une section conique quelconque et un point situé comme on veut hors de son plan, on cherche un cercle qui soit une base du cône que décrit une droite tournant, à partir du point donné comme sommet, autour de la section conique donnée ; car il n'est pas douteux que la surface ainsi donnée ne soit conique, [...] ¹⁹

Il s'agit donc de trouver un cercle de section d'un cône, une section quelconque de ce cône ainsi que son sommet étant donnés.

¹² Cf. Clavius (1581). Cf. également le quatrième tome des *Œuvres Mathématiques* Clavius (1611-1612) qui contient l'ensemble des traités de Clavius consacrés à la gnomonique.

¹³ Il s'agit de la dernière partie intitulée « Manière universelle de tracer au moyen du style placé, tous quadrans plats d'heures égales au Soleil, avec la règle, le compas, l'esquerre et le plomb ». Cf. l'édition de Poudra Desargues (1864), I, p. 352-358.

¹⁴ « Manière vniverselle de poser le style aux rayons du soleil en quelconque endroit possible, avec la règle, le compas, l'esquerre et le plomb ». Cf. Desargues (1864), I, p. 385-392. Pour une étude de ces méthodes, cf. Desargues (1864), I, p. 395-39, Pares (1988), p. 61-72 et Oudet (1994), p. 331-346.

¹⁵ Cf. AT III, p. 294 et p. 298.

¹⁶ Cf. AT III, p. 295 et p. 298-299.

¹⁷ Cf. Clerselier, III, p. 475-479.

¹⁸ Cf. AT III, p. 707. Pour cette raison, Adam-Tannery ont repoussé cette proposition dans des Additions à AT III, p. 707-714. Cf. également l'éclaircissement AT III, p. 715-717 qui apporte des éléments supplémentaires sur l'histoire du problème, procurés par Mersenne dans son *Traité Mersenne* (1644). Cf. enfin l'édition récente d'André Warusfel dans Descartes (2009), p. 515-526.

¹⁹ Traduction André Warusfel : cf. Descartes (2009), p. 519. Cf. AT III, p. 708 pour le texte latin :

Datâ quâlibet conicâ sectione & puncto extra eius planum ut libet sito, quæritur circulus qui sit basis conî quem describit linea recta, ex dato puncto, ut vertice, circa datam conicam sectionem conversa ; nam, quod superficies ita descripta sit conica, [...]

Nous disposons d'autre part de plusieurs éléments dans le corpus cartésien attestant de l'attention accordée par Descartes à des questions de gnomonique de même nature que celle du problème des trois bâtons.

Une question de gnomonique dans les *Cogitationes Privatae*

On trouve ainsi l'énoncé d'une question de gnomonique dans les *Cogitationes Privatae*²⁰, notes rédigées par Descartes au début des années 1620 :

Question de gnomonique. Soit à construire un cadran sous une ligne équinoxiale horizontale, dont la ligne équinoxiale est donnée, ainsi que trois points donnés de manière quelconque, pourvu qu'ils ne soient pas alignés, qui soient tels que l'extrémité de l'ombre doit les atteindre lorsque le soleil est au tropique du Capricorne²¹ : trouver le centre du cadran solaire et la longueur du style.

Cela se ramène à un cercle tangent à trois autres cercles inégaux dont les centres [ne] sont [pas] alignés.²²

La remarque qui suit le problème met clairement en relation la question de gnomonique qui intéresse le jeune Descartes avec celle de trouver un cercle tangent à trois cercles donnés, question qui sera reprise par lui bien plus tard pour être proposée dans sa Correspondance à la Princesse Elisabeth²³.

Le choix cartésien de s'intéresser à une telle question paraît assez naturel dans le contexte de l'époque, d'autant plus qu'il s'insère dans une tradition dont un des acteurs essentiels est le mathématicien jésuite Clavius.

Il s'agit de déterminer, sous l'équateur, au solstice d'hiver, la position d'un gnomon ainsi que son sommet, lorsque l'extrémité de son ombre est soumise à la condition de passer par trois points donnés non alignés. Le fait que Descartes précise que les points en question ne sont pas alignés n'est pas anodin. On sait en effet que lors des deux équinoxes, l'extrémité de l'ombre d'un gnomon placé à l'équateur décrit une

²⁰ Cf. AT X, p. 213-256. Le titre est une invention du premier éditeur de ces notes inédites, Foucher de Careil. Ces fragments proviennent d'un manuscrit de Leibniz, qui en avait pris copie auprès de Clerselier, le 1^{er} juin 1676, lors de son séjour à Paris. Ce manuscrit est malheureusement aujourd'hui disparu, en sorte qu'Adam-Tannery n'ont disposé que de l'édition défectueuse de Foucher de Careil pour établir le texte. Pour l'histoire du texte et les détails de son établissement, cf. AT X, Avertissement, p. 207-212.

²¹ C'est-à-dire lors du solstice d'hiver.

²² Traduction de Frédéric de Buzon et André Warusfel (communication personnelle). Cf. AT X, p. 229 :

Quæstio in gnomonicâ. Sit sub lineâ æquinoctiali horizontali horologium faciendum, cujus linea æquinoctialis est data, ac prætereâ tria puncta ad quæ umbræ extremitas debeat pertingere, dum Sol est in tropico Capricorni, quomodocumque data sint, modò ne in rectam lineam incidant : centrum Solis horologij reperire est & longitudinem styli.

Hoc reducitur ad circulum tres alios inæquales tangentem, quorum centra in rectam lineam [non] incidant.

Il faut ajouter 'non' dans la remarque qui suit l'énoncé du problème. En effet, si les centres des cercles sont alignés, le problème est impossible à résoudre. Si l'on suppose que la proposition cartésienne est correcte, on est conduit à penser qu'il s'agit d'un oubli dans la transcription.

²³ Cf. les lettres de Descartes à Elisabeth du 17 novembre 1643 et du 29 novembre 1643 in AT IV, resp. p. 37-42 et p. 45-50. Cf. également ces mêmes lettres in Descartes (2003), resp. p. 155-158 et p. 163-166, ainsi que l'Appendice consacré par H. Bos à cette question : Bos (2003). Viète a donné dans *l'Apollonius Gallus* une solution synthétique classique au problème. Pour une étude de la solution de Viète, mais aussi de ces questions de contact chez Ghetaldi et Toricelli, cf. Brigaglia et Nastasi (1986), p. 83-98.

droite de part et d'autre de ce dernier. On se trouve alors dans le cas dégénéré d'une branche d'hyperbole qui correspond à la trajectoire de l'ombre dans les autres cas.

Néanmoins, il semble plus important de s'interroger sur la nature de la solution dont Descartes pouvait disposer à l'époque pour cette question. S'agissait-il d'une solution géométrique ou algébrique ? Dans le second cas, Descartes aurait-il reconnu, dès les années 1620 ou bien au plus tard en 1630, l'intérêt et la pertinence d'une solution qu'il jugerait plus tard, bien que sous des formes différentes, comme particulièrement adaptée pour mettre en lumière l'usage et la puissance de sa Méthode ?

Les problèmes envoyés à Mersenne dans la lettre du 15 avril 1630

Le fait de retrouver dix années plus tard, sous une forme plus générale, la question de gnomonique posée dans les *Cogitationes Privatae*, parmi trois questions transmises par Descartes à Mersenne dans une lettre datée du 15 avril 1630, alors que Descartes se propose de jauger le talent des mathématiciens parisiens, paraît très significatif de l'importance de cette question dans la géométrie cartésienne. Descartes, ayant envoyé peu de temps auparavant la solution de problèmes posés par Mydorge à Mersenne avec une lettre datée par Adam-Tannery du 4 mars 1630²⁴, prenait alors son tour de questions. Il écrivait ainsi avec, comme toujours, un blasement accompagné de la plus grande immodestie :

Pour des problemes, ie vous en enuoyeray vn milion pour proposer aus autres, si vous le desirés ; mais ie suis si las des Mathematiques, & en fais maintenant si peu d'estat, que ie ne sçaurois plus prendre la peine de les soudre moy-mesme. l'en mettray ici trois que i'ay autrefois troués sans aide que de la Geometrie simple, c'est a dire avec la reigle & le compas.

Trouver le diamètre de la sphère tangente à quatre autres [sphères] données de grandeur et de position.

Trouver l'axe de la parabole tangente à trois lignes droites données de position et indéfinies, et dont l'axe coupe à angles droits une autre droite donnée de position et indéfinie.

Trouver le style d'un cadran solaire à inscrire dans une partie donnée du monde, de telle sorte que l'extrémité de [son] ombre, un jour donné de l'année, passe par trois points donnés, du moins quand cela est possible.²⁵

l'en trouerois bien de plus difficiles si i'y voulois penser, mais ie ne croy pas qu'il en soit de besoin.²⁶

Remarquons tout d'abord que la troisième et dernière question de gnomonique est précédée de celle des quatre sphères. De façon assez remarquable, ces deux questions font écho en les généralisant à la question de gnomonique et à celle des trois cercles que Descartes avait mises en relation dix années auparavant dans les *Cogitationes privatae*, puisqu'il indiquait alors que la première pouvait être réduite à la seconde. Quant au

²⁴ Cf. AT I, p. 125.

²⁵ Ma traduction. Les énoncés des problèmes sont donnés en latin par Descartes :

Invenire diametrum sphaerae tangentis alias quatuor magnitudine & positione datas.

Invenire axem parabolae tangentis tres lineas rectas positione datas & indefinitas, cujus etiam axis secet ad angulos rectos aliam rectam etiam positione datam & indefinitam.

Invenire stilum horologij in data mundi parte describendi, ita ut umbræ extremitas, data die anni, transeat per tria data puncta, saltem quando istud fieri potest.

²⁶ Cf. AT I, p. 139.

second problème mentionné, nous ne sachons pas qu'il ait laissé d'autre trace dans la Correspondance et même dans l'œuvre mathématique cartésienne dont nous disposons.

La question des quatre sphères apparaîtra plus tard comme le cinquième et dernier exemple proposé dans *l'Introduction à la Géométrie* de Godefroy de Haestrecht²⁷, dans le cas plus simple où les sphères données sont tangentes deux à deux. Cette question, dont Descartes dit dans une lettre à Mersenne du 13 juillet 1638 « [qu'il] ne [croit] pas que [les] analystes de Paris puissent [en] venir à bout »²⁸, apparaît également dans la lettre de Descartes de 1645 précédemment mentionnée où celui-ci recommande le Problème des trois bâtons.

Descartes propose ainsi de déterminer la position et le sommet d'un gnomon, lorsque l'extrémité de son ombre est soumise à la condition de passer par trois points donnés, un jour donné de l'année, en un lieu donné²⁹. On retrouve ainsi sous une forme plus générale la question que Descartes avait notée dix ans auparavant dans les *Cogitationes Privatae*. La discussion que Descartes paraît souligner en mentionnant la possible absence de solution pourrait faire référence selon moi au cas limite des équinoxes à l'équateur où les points donnés doivent être choisis nécessairement alignés, puisque dans ce cas la trajectoire de l'extrémité de l'ombre du gnomon est une droite. On peut aussi faire l'hypothèse, comme Pierre Costabel, que Descartes veut dire par là que, dans le cas d'une hyperbole, les points se trouvent sur une seule et même branche³⁰.

D'autre part, il importe de remarquer que le défi lancé par Descartes pour la résolution de ces questions est double, et que de surcroît son Auteur, par sa formulation, invite sciemment à suivre une fausse piste. Ainsi, il s'agit non seulement de résoudre ces questions, mais avec la règle et le compas seul, autrement dit de reconnaître qu'il s'agit de problèmes plans. Descartes passe sous silence l'algèbre qui permet, après élimination et réduction, d'obtenir une équation quadratique caractéristique d'un problème plan, insistant à dessein sur sa résolution d'autrefois — géométrique ou algébrique ? — « sans aide que de la Geometrie simple ».

Le *Problema astronomicum* et la controverse Stampioen-Waessenaer de 1638-1640

On retrouve de façon remarquable dans la controverse avec Stampioen de 1638-1640 un problème, le *Problema astronomicum*, quasi-identique au problème des trois bâtons³¹. En 1638, Stampioen dit « le jeune » pour le distinguer de son père, mathématicien flamand né en 1610 et demeurant à la Haye, proposa un défi mathématique sous la forme d'une affiche portant pour titre :

Problème Astronomique & Géométrique, proposé par Jean Stampioen le Jeune
Mathématicien, demeurant à La Haye, aux Bailleurs de la Question d'Anvers.³² [1638].

²⁷ Cf. Haestrecht ? (1638b). Pour la solution de la question des quatre sphères ou globes, cf. Haestrecht ? (1638b), p. 346-352. Le problème des quatre sphères ne figure pas dans la copie Haestrecht ? (1638a).

²⁸ Cf. AT II, p. 246.

²⁹ Pierre Costabel donne une étude de cette question et la met en relation avec le *Problema astronomicum* et le problème des trois cercles. Cf. Costabel (1990), p. 380-384.

³⁰ Cf. Costabel (1990), p. 380.

³¹ Cf. infra section 3.2 la comparaison détaillée des énoncés.

³² *Problema Astronomicum & Geometricum* voor-gesteld Door Iohan Stampioen de Jonghe Mathematicus, Residerende in's Graven-Haghe, Aende Vytgevers van het Antwerpsch VraagStuck. Traduction personnelle.

Dans une liasse de manuscrits appartenant à F. van Schooten le fils, on trouve un exemplaire de cette affiche³³ dans lequel figure l'énoncé du problème en flamand.

Stampioen le jeune³⁴ avait acquis une réputation certaine dans les Provinces-Unies lorsqu'il brisa des lances avec Waessenaer, arpenteur et jeune élève de l'école cartésienne hollandaise, et Descartes lors de la controverse de 1638-1640³⁵. Descartes, relatant la controverse dans une lettre à Mersenne du 29 janvier 1640, écrivait ainsi :

[...] il s'est trouvé un homme [Stampioen] de ce pais si habile en l'art de Charlatan que, sans rien du tout sçavoir en Mathematiques, il n'a pas laissé de faire profession de les enseigner & de passer pour le plus sçavant de tous ceux qui s'en meslent. Et ce, par la seule impudence de se vanter qu'il sçavoit tout ce qu'il avoit ouy dire estre ignoré par les autres ; & de faire des livres qui prometoient des merveilles au titre, mais qui ne contenoient au dedans que des fautes ou des pieces derobées ; & de dire effrontement toutes sortes d'injures a ceux qui lui contredisoient, & les provoquer par gageures³⁶.

En 1638, Stampioen avait rejoint la cour de La Haye pour devenir le précepteur en mathématiques du prince Guillaume d'Orange. Il semble également que la princesse Elisabeth recourut à ses services avant de s'adresser à Descartes³⁷. Plus tard, en 1644, Stampioen serait également le premier maître en mathématiques de Christiaan Huygens.

Cette affiche fixe la première occurrence du *Problema astronomicum* au sein de la controverse de 1638-1640. Auparavant, une première « Question aux Ingénieurs bataves » avait été proposée en 1638 par Stampioen sous le pseudonyme de Jean-Baptiste d'Anvers et des solutions de cette question avaient été données, critiquées et complétées par Waessenaer et Stampioen³⁸. D'autre part, en avril 1639, Stampioen publiait un nouveau livre d'algèbre, en flamand, qu'il annonçait déjà depuis longtemps et dont le titre témoigne de l'ambition affichée par l'Auteur :

Algèbre ou nouvelle méthode, par laquelle on trouve en mathématiques tout ce qui est trouvable, chose qui, jusqu'ici, n'a jamais été connue. Par Jean Stampioen le jeune, Mathématicien, demeurant a la Haye. à La Haye, imprimé chez l'Auteur, à la Sphæra Mundi.³⁹

³³ Cf. AT X, p. 646-647.

³⁴ Pour des informations sur la vie et la carrière de Stampioen, on se reportera à la notice biographique détaillée de J. van de Ven in Descartes (2003), p. 299-303. Les indications qui suivent lui sont empruntées. On peut également consulter l'article de H. Bosmans : Bosmans (1927), p. 116-119.

³⁵ Pour une histoire de la controverse et l'indication de références supplémentaires, cf. Bosmans (1927), p. 125 *sq.*, Descartes (2003), p. 301-302 et Maronne (2006), 204-210. On peut aussi voir les éclaircissements d'Adam-Tannery in AT II, p. 581-582 & p. 611-615 et AT III, p. 16-17, ainsi que les notes et l'appendice de Roth « The Stampioen-Waessenaer Affair, november-december, 1639 » in AT II, resp. p. 686-687 & p. 710-726.

³⁶ Cf. AT III, p. 5.

³⁷ Cf. la lettre de Descartes à Pollot du 21 octobre 1643 in AT IV, p. 26-27 et Descartes (2003), p. 133.

³⁸ Cf. Descartes (2003), p. 301 et AT II, p. 611-612. Descartes traite le problème dans une lettre adressée vraisemblablement à van Schooten fin 1638 ou début 1639 selon Adam-Milhaud. Cette hypothèse nous semble préférable à celle de Adam-Tannery qui indiquent Huygens comme destinataire et adoptent fin octobre 1639 comme datation. Cf. AM III, p. 142-154 et AT II, p. 600-615.

³⁹ Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel, waer door alles ghevanden wordt, inde Wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt voor desen bekendt. Door Iohan Stampioen d'longhe, Mathematicus, Residerende in's Graven Hague. 's Graven Hage, gedrukt ten Huuse van den Autheur, in Sphæra-Mundi. Traduction Adam-Tannery. Littéralement, *Stel-Regel* signifie règle de supposition et renverrait à l'introduction de l'inconnue en algèbre (communication personnelle de Henk Bos). Le privilège est daté du 25 mars 1639. Cf. éclaircissement in AT II, p. 581-582.

On ne trouve pas dans cet ouvrage de solution donnée au Problème des trois bâtons par Stampioen.

C'est dans un écrit en flamand publié sous le nom de Waessenaer deux ans plus tard, en novembre 1640, que l'on retrouve le *Problema astronomicum* accompagné d'une solution qui est la première à notre connaissance. Je donne *in extenso* le titre de cet ouvrage très rare⁴⁰, qui me semble témoigner de l'enjeu qu'il revêtait alors pour Waessenaer et Descartes :

La sottise du mathématicien J.J. Stampioen révélée par son imprudente gageure et ses solutions manquées de ses propres questions. Comme aussi une règle générale pour extraire les racines cubiques et toutes autres des expressions binômes ; laquelle règle n'a pas été connue jusqu'à présent. *Enfin les solutions par l'algèbre de deux difficiles questions de Géométrie, utiles pour apprendre à résoudre toutes les autres*⁴¹. Par Jacob a Waessenaer, Arpenteur à Utrecht. Leyde, imprimé chez Willem Christiaens pour Jean Maire.⁴²

Comme l'indique son titre, cet ouvrage se compose de trois parties⁴³. La première consiste en une préface polémique de trente pages qui relate la querelle. On sait qu'elle est de la main de Descartes qui la donna à traduire à Antoine van Surck⁴⁴. Notons que cette pièce inédite n'a jamais été éditée ni traduite.

Dans la deuxième partie figure, sans démonstration, une règle d'extraction de racines de binômes, c'est à dire servant à transformer, lorsque cela est possible, l'expression $\sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$ en $x + \sqrt{y}$ où x, y, a, b sont des nombres rationnels. Celle-ci répond à l'énoncé fautif qui avait été donné par Stampioen dans son *Algebra* dans le cas de la racine cubique⁴⁵. Une lettre de Descartes à Waessenaer du 1^{er} février 1640 prouve de surcroît que Descartes en est le seul inventeur⁴⁶.

Enfin, dans la troisième partie, on trouve l'analyse et la solution de deux problèmes antérieurement proposés par Stampioen dont le second n'est autre que le *Problema Astronomicum* de 1638. Quant au premier problème, il s'agit de celui que Stampioen soumit à titre de défi, par l'entremise de Beeckman à Descartes en 1633⁴⁷. Ce dernier y

⁴⁰ C'est ce qu'indique Pierre Costabel qui mentionne son existence à la Bibliothèque d'Amsterdam. Cf. Costabel (1990), p. 377, n.. On le trouve également à la British Library de Londres.

⁴¹ C'est moi qui souligne.

⁴² Den On-Wissen Wis-konstenaer I.I. Stampioenius ontdeekt. Door sijen ongegronde Weddinge ende mis-lucte Solutien van sijne eygene Questien. Midtsgaders Eenen generalen Regel om de Cubic-wortelen ende alle andere te trecken uyt tweenamighe ghetallen : dewelcke voor desen niet bekend en is geweest. Noch de Solution van twee sware Geometrische Questien door de Algebra : dienstlich om alle andere te leeren ontbinden. Door Iacobus à Waessenaer, Landmeeter tot Vytrecht. Tot Leyden, gedruckt by Willem Christiaens voor Iohannes. Traduction Adam-Tannery légèrement modifiée. Cf. AT II, p. 613.

⁴³ Je reprends ici la description de l'ouvrage donnée par AT III, p. 30-31.

⁴⁴ Cf. AT III, p. 30 et la lettre de Huygens à Descartes du 14 août 1640 in AT III, p. 754.

⁴⁵ Adam-Tannery reproduisent la règle de Stampioen selon l'énoncé donné par Waessenaer dans Waessenaer (1640), p. 35-36. Cf. l'éclaircissement in AT III, p. 149-150.

⁴⁶ Cf. AT III, p. 21-30. Descartes confie dans cette lettre à Waessenaer l'énoncé et la démonstration de la règle dans le cas des racines cubiques. Cf. également l'aveu fait par Descartes dans une lettre à Mersenne du 30 septembre 1640 : AT III, p. 187.

⁴⁷ Selon le propre témoignage de Stampioen dans un de ses pamphlets. Cf. AT I, Additions, p. 574. Ce problème propose de déterminer un triangle rectangle dans lequel sont inscrits un carré et deux cercles qui interceptent des sécantes données selon des longueurs données.

répondit facilement et en communiqua la solution mais non l'analyse à Stampioen⁴⁸, avec morgue et dédain, comme à son habitude, engendrant ainsi un ressentiment tenace qui conduirait plus tard à la querelle.

Pour les raisons que vous venons de rappeler, regardant la composition des deux premières parties du *Den On-Wissen Wis-konstenaer*, les historiens des mathématiques s'accordent à reconnaître en Waessenaer un « homme de paille », un nouveau masque pour Descartes⁴⁹.

Mais, quel est l'auteur des solutions apportées aux deux problèmes de Stampioen dans la troisième partie du *Den On-Wissen Wis-konstenaer* ? En particulier, quel est l'auteur de la solution du *Problema Astronomicum* ? Dans sa lettre du 1^{er} février 1640, Descartes rappelle à Waessenaer qu'il attend de sa part des solutions, tâche dont il l'aurait auparavant chargé :

J'aurai aussi plaisir à avoir votre solution des deux questions de St[ampioen], dès qu'elle sera achevée.⁵⁰

Waessenaer combla-t-il les attentes du maître exigeant qu'était Descartes ? Si la participation de Descartes à l'analyse et à la solution figurant dans le *Den On-Wissen Wiskonstenaer* est très probable, elle demeure néanmoins indéterminée dans sa nature. Seul un examen mathématique détaillé de la solution qui figure dans l'ouvrage pourrait nous permettre de conjecturer ce que fut la contribution cartésienne.

Schooten et les éditions latines de *La Géométrie* de 1649 et 1659-1661

Dans un *Additamentum* figurant à la suite de son commentaire au sein des deux éditions latines de *La Géométrie* de 1649 et 1659-1661⁵¹, Frans van Schooten fit le choix de reprendre à son tour la solution du *Problema astronomicum* à partir de l'écrit de Waessenaer en la traduisant en latin⁵² et d'ajouter la règle d'extraction des racines des binômes extraite du même ouvrage. Voici comment Schooten annonçait et présentait la solution du problème :

Cependant, afin qu'apparaisse clairement qu'il n'est pas facile de donner quelque problème qui échapperait à cette Géométrie, ou ne pourrait être résolu par sa méthode, je soumettrai comme exemple la solution très habile d'un problème qu'on trouve dans un petit livre très ingénieux qui fut publié par Waessenaer l'an 1640 sous le titre : *Den onwissen Wiskonstenaer I.I. Stampioënius*. Toutefois puisque pour sa solution, transmise ici, on admet des choses qui méritent d'être démontrées, il est apparu qu'elles devaient être exhibées dans une démonstration à la suite du théorème.⁵³

⁴⁸ Cf. la lettre de Descartes à Stampioen in AT I, p. 275-280 et Additions, p. 573-578. Dans ces Additions, Adam-Tannery reproduisent l'énoncé de ce problème accompagné de son analyse et de sa solution qui figurent dans le pamphlet de Waessenaer. Cf. Waessenaer (1640), p. 60-63.

⁴⁹ C'est ainsi l'objet principal de l'article de H. Bosmans cité auparavant et consacré à la dispute Stampioen Waessenaer et à « l'auteur principal » de ce dernier écrit. Cf. Bosmans (1927), p. 114-115, 126, 139-140.

⁵⁰ Il s'agit de la traduction française donnée par Adam-Tannery du texte original écrit en flamand par Descartes. Cf. AT III, p. 29. Pour le texte original flamand, cf. AT III, p. 22.

⁵¹ Cf. resp. Schooten (1649) et Schooten (1659).

⁵² Cf. resp. Schooten (1649), p. 295-323 et Schooten (1659), p. 369-389.

⁵³ Traduction personnelle.

Cæterùm, ut pateat, non facile Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis,

Le *Problema astronomicum* apparaît dans cette présentation comme une pierre de touche pour la géométrie et la méthode cartésienne. Par cette déclaration et son choix, Schooten faisait de ce problème l'enjeu principal de la controverse de 1638-1640 avec Stampioen, controverse qu'il réduisait à la conclusion cartésienne triomphante du *Den On-Wissen Wis-konstenaer* de Waessenaer, « livre très ingénieux », présentant une « solution très habile » de ce problème dont Stampioen avait pu croire qu'il « échapperait à la Géométrie » et ne pouvait être résolu au moyen de la méthode cartésienne.

Pour autant, capter un tel héritage n'était pas sans comporter quelques difficultés posées entre autres, une fois encore, par les « omissions » cartésiennes. En effet, non seulement la solution du problème qu'on trouve dans le *Den On-Wissen* (qui occupe quatorze pages) consistait en une série complexe d'éliminations et de substitutions algébriques, mais elle recourait à une hypothèse non démontrée⁵⁴. Il semblait ainsi nécessaire à Schooten d'insérer un théorème géométrique préliminaire et une démonstration de son cru. De moindres difficultés dans la solution du *Problema astronomicum* engageaient d'autre part Schooten à requérir aux services d'Erasmus Bartholin pour annoter certains éléments de la solution⁵⁵ qui pourraient inspirer de la difficulté aux lecteurs moins exercés à la méthode⁵⁶. Avec ces additions, la solution complète du problème occupe rien moins que vingt-neuf pages [!] dans l'édition latine de *La Géométrie* de 1649, ce qui donne une idée de la complexité des calculs algébriques.

Au regard des compléments apportés par Schooten et Bartholin, il semble donc que Waessenaer ne fût pas d'un grand secours pour éclaircir la solution du *Problema astronomicum* qui figurait dans le *Den On-Wissen Wis-konstenaer*. Cela accentue la présomption selon laquelle celui-ci n'aurait fait que rassembler et du reste assez mal les éléments de la solution cartésienne.

Une solution de Newton dans *l'Arithmetica Universalis*

Remarquons pour terminer que Newton donne une solution du *Problema astronomicum* dans ses *Lectures on Algebra, 1673-1683*⁵⁷ publiées plus tard en 1707 dans *l'Arithmetica Universalis*. Cette solution lui fut vraisemblablement inspirée par sa lecture de *l'Additamentum* de F. van Schooten.

quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ à Waessenaer Anno 1640 sub titulo : *Den onwissen Wiskonstenaer I.I. Stampioënius*, in lucem prodit. Verùm enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.

Cf. respectivement Schooten (1649), p. 295 et Schooten (1659), p. 369, sans changement dans les deux éditions latines.

⁵⁴ Cf. Schooten (1649), p. 295-300 et Schooten (1659), p. 369-371.

⁵⁵ Cf. resp. Schooten (1649), p. 318-323 & Schooten (1659), p. 385-389. Les notes sont inchangées d'une édition à l'autre.

⁵⁶ Schooten écrit ainsi :

Cum autem in exposita hujus Problematis solutione nonnulla occurrant, quæ illustrationem aliquam requirere videntur, atque minùs exercitatis scrupulum injicere possent ; placuit ea, quæ ad eorum explicationem [...] D. Erasmus Bartholinus [...] concinnavit, paucis hic adjicere.

Cf. resp. Schooten (1649), p. 318 et Schooten (1659), p. 384-385.

⁵⁷ Cf. MP V, p. 266-279.

Ajoutons que, précédant immédiatement le *Problema astronomicum*, on trouve un groupe de cinq problèmes qui traitent de problèmes de contact entre droites et cercles⁵⁸. Le dernier de ces problèmes propose ainsi de « décrire un cercle passant par un point donné et tangent à deux autres cercles donnés de grandeur et de position »⁵⁹. L'ordre choisi par Newton semble donc suggérer à nouveau une relation entre le *Problema astronomicum* et le problème des trois bâtons.

Une présentation mathématique du problème des trois bâtons

Les pré-requis mathématiques du problème

Rappelons tout d'abord les pré-requis mathématiques du problème⁶⁰. Que soit donné un bâton quelconque **A**, de longueur $AR = \alpha$, élevé verticalement en un point donné **A** du globe terrestre, et qu'on cherche tout d'abord la courbe décrite par l'extrémité de l'ombre de ce bâton, un jour donné de l'année. Il est clair, que relativement à la position du bâton, seule la latitude λ intervient. D'autre part, le jour de l'année est donné par la déclinaison solaire δ qui indique l'inclinaison des rayons solaires par rapport à l'équateur. Soit **RS** la droite parallèle à l'axe polaire.

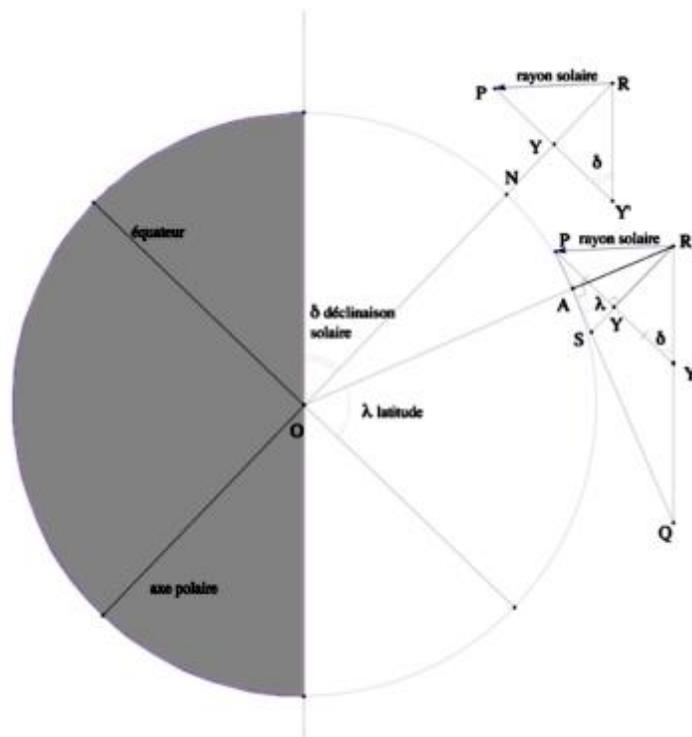


Figure 1 – Le cône des rayons solaires (1)

⁵⁸ Cf. MP V, p. 252-266.

⁵⁹ Cf. MP V, p. 262-266.

⁶⁰ Pierre Costabel et D.T. Whiteside donnent également une présentation mathématique du problème. Cf. Costabel (1990), p. 377-378, 380-385 et MP V, p. 267-268. Pour une étude complète, cf. Maronne (2007), Partie III et Warusfel (2010).

On peut montrer facilement (cf. figure 1) qu'on retrouve ces deux angles dans le cône dont le sommet est l'extrémité R du bâton, les génératrices les rayons lumineux au cours d'une journée, et dont l'axe RS est parallèle à l'axe du monde du fait de la rotation diurne de la terre autour de ce même axe. Ainsi, le demi-angle au sommet R du cône est égal au complément de la déclinaison solaire δ tandis que l'angle entre l'axe du cône et l'horizontale est égal à la latitude λ .

Si l'on néglige d'autre part la variation de la déclinaison solaire un jour donné, l'angle au sommet du cône sera supposé constant et on aura donc un cône circulaire de révolution. Descartes avait remarqué cette condition sur la nature de la courbe décrite par les extrémités des ombres respectives de chacun des bâtons. Dans sa lettre, datée par Adam-Tannery de juin 1645, il ajoute après avoir donné l'énoncé du problème à son correspondant :

Et nous supposons que ces ombres décrivent exactement des sections coniques, afin que la question soit géométrique, et non mécanique.⁶¹

En effet, une telle supposition était nécessaire pour résoudre le problème selon la méthode de la Géométrie puisque Descartes en avait exclu les courbes mécaniques.

Finalement, la courbe décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton AR sera une conique ou du moins un arc de conique. D'autre part, le point A, pied du bâton, appartiendra à un axe de la conique. Au pôle, le jour du solstice d'été, la conique sera un cercle de centre A, le pied du bâton. Remarquons qu'on retrouve ainsi « physiquement » l'idée projective de la réduction des coniques au cercle par une projection orthogonale bien choisie.

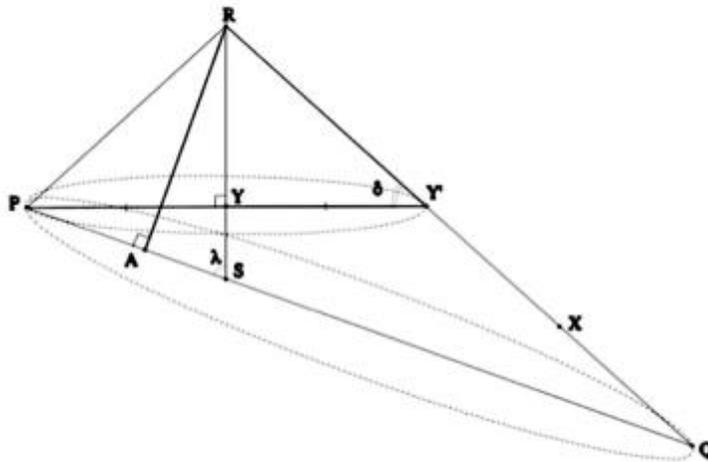


Figure 2 – Le cône des rayons solaires (2)

À présent, il est possible d'interpréter le *Problema astronomicum* et les problèmes de gnomonique qui lui sont liés dans un cadre purement géométrique. Cela permettra de

⁶¹ Traduction personnelle. Cf. AT IV, p. 229.

Et supponimus illas umbras describere accurate conicas sectiones, ut quaestio sit Geometrica, non Mechanica.

restituer les raisons d'être du problème et de ses solutions et d'éclairer les relations du problème des trois bâtons avec la question de Desargues et le problème des cercles tangents d'Apollonius.

Il est clair d'après les remarques précédentes que si la déclinaison solaire δ et la latitude λ sont données, le triangle PRS est donné de forme, plus précisément à une homothétie près de centre A. Le cône des rayons lumineux est donc donné à une translation de son sommet près sur la verticale issue du point A.

D'autre part, sous ces mêmes conditions, la direction du plan de section du cône est donnée, et donc la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A est donnée de forme i.e. à une similitude près.

Mais si la conique est donnée de forme et de grandeur, alors le sommet du cône et donc le cône sont donnés. Ainsi la longueur α du bâton A est donnée. Sous l'hypothèse que trois points suffisent à déterminer une conique de grandeur lorsqu'elle est déjà connue de forme⁶², on retrouve les deux problèmes de gnomonique de Descartes des *Cogitationes Privatae* et de la lettre à Mersenne du 15 avril 1630.

Réciproquement, si la longueur α du bâton A est donnée et si la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A est donnée, pour trouver la déclinaison solaire δ et la latitude λ il suffit de déterminer le cercle de section du cône passant par le point P. On pourra ainsi calculer

$$\tan \lambda = \frac{AR}{AS} \text{ et } \tan \delta = \frac{RY}{PY}.$$

On retrouve donc une question semblable à celle de Desargues de 1641.

Pierre Costabel a précisé mathématiquement la relation suggérée par Descartes entre le problème de gnomonique des *Cogitationes Privatae* et le problème d'Apollonius des trois cercles tangents⁶³. La réduction du problème gnomonique au problème des trois cercles qu'il propose est *purement géométrique* et non algébrique. Elle laisse donc indécidée la question de savoir si Descartes possédait ou non à l'époque une solution algébrique du problème, de même nature que celle qu'on retrouvera plus tard au moment de la controverse avec Stampioen. La mention « avec la règle & le compas » dans la lettre du 15 avril 1630 de Descartes à Mersenne pourrait ainsi renvoyer à une résolution géométrique classique.

Les hypothèses physiques du problème et leur traduction géométrique

Si l'on compare les énoncés des problèmes donnés par Stampioen⁶⁴, Descartes⁶⁵, Schooten⁶⁶ et Newton⁶⁷, on remarque que ceux-ci sont différents les uns des autres

⁶² Pierre Costabel propose une conjecture concernant la connaissance par Descartes d'une telle propriété. Cf. Costabel (1990), p. 381.

⁶³ Cf. Costabel (1990), p. 381-382 et Maronne (2007), p. 393-396. Pierre Costabel ne cite pas le premier problème des *Cogitationes Privatae* mais seulement le second tiré de la lettre à Mersenne d'avril 1630 où la relation avec le problème des trois cercles est bien plus implicite, puisqu'elle est seulement indiquée par le fait qu'un problème précédent est celui des quatre sphères.

⁶⁴ Cf. AT X, p. 646-647.

⁶⁵ Cf. AT IV, p. 228-229.

⁶⁶ Cf. Schooten (1649), p. 301 et Schooten (1659), I, p. 372.

quant aux hypothèses mentionnées. Après une partie commune, il semble que la reconnaissance par certains des auteurs d'hypothèses non nécessaires à la solution du problème les aient conduits soit à ne mentionner que les données nécessaires et suffisantes, soit à expliciter des relations entre les hypothèses. Bien sûr, au constat de la surdétermination de la question s'ajoutait une difficulté bien plus grande : disposer d'une solution ne requérant qu'un nombre minimal d'hypothèses.

Voici la transcription que l'on peut donner de ces différents énoncés. Nous rappelons tout d'abord la partie commune, puis les hypothèses de chacun :

Problema Astronomicum *En un lieu, trois bâtons A, B, C sont élevés perpendiculairement à un plan horizontal aux points A, B et C. Le bâton A mesure 6 pieds, le bâton B 18 pieds et le bâton C 8 pieds. Le segment AB mesure 33 pieds. Un même jour, l'extrémité de l'ombre du bâton A passe par les points B et C,*

Stampioen *passe celle de B par A et celle de C par A.*⁶⁸

Descartes *celle de B par A et C, par conséquent celle de C par A et B.*⁶⁹

Schooten *celle de B par A et C, et celle de C par A, donc par B.*⁷⁰

Newton *celle de B par A et C, et celle de C par A.*⁷¹

Sous ces hypothèses, quelle est la déclinaison solaire et l'élévation polaire, i.e. quel jour de l'année et en quel lieu de la terre cela s'est-il produit ?

Traduisons à présent géométriquement les hypothèses portant sur les ombres des bâtons. Soit (Γ) la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton A. Cette conique passe par les points B et C par hypothèse. Son grand axe, passant par le point A, est PQ. Elle est coupée respectivement par la droite AB au point E et par la droite AC au point F. Soit DG la droite passant par A et parallèle à la droite BC. La conique (Γ) est coupée par la droite DG aux points D et G. Désignons enfin par α , β et γ les longueurs des bâtons A, B et C. Par conservation des rapports de longueur par projection selon la direction des rayons solaires, on peut traduire géométriquement les hypothèses portant sur les ombres par la donnée de rapports de segments, les longueurs des bâtons étant connues et données en nombres.

Lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton B passe par le point A, l'extrémité de l'ombre du bâton A passe par le point E et on a :

$$BA : AE = \beta : \alpha. (1)$$

De même, lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton C passe par A,

$$CA : AF = \gamma : \alpha. (2)$$

Lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton B passe par C,

⁶⁷ Cf. MP V, p. 266.

⁶⁸ Ajouté à la main en note dans l'exemplaire de Schooten : « et celle de B par C ». Cf. AT X, p. 647.

⁶⁹ Cf. AT IV, p. 228-229.

⁷⁰ Cf. Schooten (1649), p. 301 et Schooten (1659), p. 372. L'énoncé est inchangé dans les deux éditions.

⁷¹ Cf. MP V, p. 266-267.

$$BC : AD = \beta : \alpha. (3)$$

Et lorsque l'extrémité de l'ombre du bâton **C** passe par **B**,

$$CB : AG = \gamma : \alpha. (4)$$

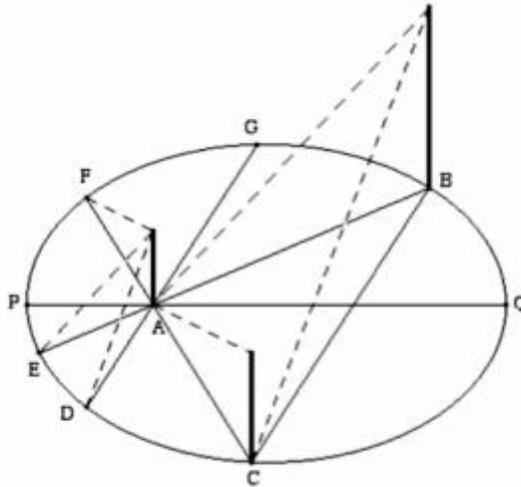


Figure 3 – Le *Problema astronomicum*

Ainsi, se donner une hypothèse sur les ombres du bâton **B** ou du bâton **C** revient à se donner un point (E, F, D ou G) par lequel la conique décrite par l'extrémité de l'ombre du bâton **A** doit passer, en plus des deux points déjà donnés par hypothèse B et C. Or, comme on le sait, il suffit de se donner cinq points pour définir une conique.

Dans la solution du *Problema astronomicum* qu'on retrouve dans le *Den On-Wissen Wis-konstenaer* de Waessenaer et l'*Additamentum* de Schooten, apparaît en outre, sans démonstration, un cinquième rapport qui n'est pas directement fourni par les hypothèses, puisqu'il ne correspond à aucune hypothèse portant sur les ombres des bâtons :

$$GA : AD = \beta : \gamma. (5)$$

Ce dernier rapport peut être déduit des rapports (3) et (4), ce qui oblige à disposer des six hypothèses sur les ombres. Le théorème préliminaire donné par Schooten et précédemment mentionné, en montrant que l'hypothèse correspondant à la proportion (4) peut être déduite de la proportion (3), pourvoit à cette tâche et complète la démonstration de Descartes-Waessenaer, en montrant qu'il suffit de disposer de cinq hypothèses sur les ombres.

On peut ainsi résumer de la façon suivante les différents énoncés. Outre les deux hypothèses énonçant que l'extrémité de l'ombre du bâton **A** décrit une conique qui passe par les points **B** et **C** :

- Stampioen suppose (1) et (2) ;
- Descartes-Waessenaer, (1) et (3), ajoutant que (1) et (3) impliquent (2) et (4) [dans la lettre de 1645], et utilisant dans sa solution (1), (2), (3) et (5) ;
- Schooten, (1), (2) et (3), démontrant dans un théorème préliminaire que (1), (2) et (3) impliquent (4), et en déduisant (5) ;
- Newton, (1), (2) et (3).

Le nombre des hypothèses et la nature des solutions

On peut remarquer que l'énoncé de Stampioen, le premier à avoir proposé le problème en 1638, est donné en nombres et non en lignes : Stampioen donne des valeurs numériques pour les mesures des longueurs des bâtons et la distance entre les bâtons **A** et **B**. Il s'agit là de la pratique courante du mathématicien flamand, qu'on retrouve à l'œuvre dans son traité *Algebra ofte nieuwe stel-regel* de 1640⁷². On peut aussi imaginer que Stampioen est parti de la solution pour proposer le problème.

D'autre part, il est clair que l'énoncé de Newton dérive de celui de Schooten figurant dans l'édition latine de *La Géométrie* de 1659-1661⁷³. Si Newton ne mentionne pas l'hypothèse (4) portant sur la sixième ombre — i.e. l'ombre de **C** passant par **B** —, c'est parce qu'il a reconnu dans sa lecture de la solution embrouillée présentée par Schooten que cette hypothèse pouvait en être aisément écartée (cinq points suffisent à donner une conique), ce qu'il fait dans sa solution élégante du problème.

Schooten, que ce soit dans son annotation du placard de Stampioen ou dans sa traduction de la solution de Descartes-Waessenaer, avec la démonstration d'un théorème préliminaire énonçant que la sixième hypothèse peut être déduite des cinq premières, insiste au contraire sur les relations de dépendance entre les hypothèses du problème. Une problématique différente de nature algébrique⁷⁴ — héritée des vestiges de la solution cartésienne ? — nous semble ici s'ajouter à la question de nature géométrique posée par le *Problema astronomicum* : un problème étant donné, si on lui associe un certain nombre d'équations comportant des lignes données et des lignes inconnues, qu'en est-il de la détermination du problème ?

Ajoutons qu'une telle problématique est moderne dans la mesure où elle est quantitative : elle ne s'intéresse pas seulement à la question (classique) « Si certaines choses sont données, d'autres sont-elles données ? » mais à la question du rapport entre le nombre des données et le nombre des inconnues.

De surcroît, l'énoncé cartésien dans la lettre de juin 1645 et son abrupte concision manifestée par l'usage d'« *ex consequenti* » pour signifier le conditionnement des deux dernières hypothèses par les quatre premières nous paraît témoigner de la présence de

⁷² C'est ce qu'indique H. Bos qui remarque cependant que Stampioen a consacré une brève section finale à l'algèbre littérale où il montre comment des théorèmes d'Euclide et Viète peuvent être déduits en usant de cet art. Cf. Bos (2003), p. 203.

⁷³ Comme le note D.T. Whiteside. Cf. MP V, p. 266-267.

⁷⁴ L'algèbre dont je parle ici n'est pas la théorie des équations mais renverrait plutôt à la détermination et à la résolution d'un système de m équations à n inconnues dans le cadre d'une théorie des courbes algébriques, via des éliminations bien choisies. Pour une étude détaillée de l'histoire de la théorie de l'élimination, cf. Penchèvre (2006).

cette problématique algébrique s'ajoutant au problème géométrique seul considéré par Newton.

Une solution trigonométrique

Bien sûr, c'est la formulation initiale du problème par Stampioen qui a poussé Descartes dans ses retranchements, puisque le mathématicien hollandais n'énonçait que quatre hypothèses. Si la solution de Stampioen ne nous est pas parvenue, peut-on lui en faire crédit, alors qu'on le reconnaît pour un algébriste peu inspiré, comme en témoigne sa règle défectueuse d'extraction de la racine cubique des nombres binômes ? L'historien de l'Astronomie Jean-Baptiste Delambre nous permet de répondre de façon convaincante à cette question. Celui-ci fait un compte rendu critique et ironique du problème et de la solution donnée par Newton dans son *Histoire de l'Astronomie au dix-huitième siècle*. Voici ce qu'il écrit :

Si ce problème n'a aucune utilité réelle, il a du moins le mérite d'être l'un des plus extraordinaires qui aient jamais été proposés : jamais aucun hasard n'en pourra fournir les données.

[...] Son analyse occupe quatre pages ; ses équations sont hérissées de radicaux, et en se bornant même à ce qui est indispensable, le calcul est encore d'une longueur énorme et bien inutile.

[...] mais Newton, *apparemment pour montrer les ressources de son analyse, se complaît à accumuler les difficultés au lieu de les écarter. Il est évident qu'il n'a en vue que les géomètres et nullement les astronomes, qui savent fort bien que ce n'est pas dans les ouvrages d'analyse qu'il faut chercher les solutions des problèmes usuels de trigonométrie.*⁷⁵

La dernière partie de la citation que nous avons placée en italiques s'applique remarquablement à Descartes et à sa solution et pose clairement les enjeux de la controverse avec Stampioen. Stampioen disposait possiblement d'une solution trigonométrique du problème. En effet, à cette époque, la trigonométrie sphérique était utilisée dans la résolution de problèmes de gnomonique et Stampioen connaissait et maîtrisait cette théorie mathématique⁷⁶.

On peut imaginer que Stampioen ayant donné le problème en nombres, il avait fabriqué un tel problème à partir d'une solution numérique qu'il connaissait déjà, et ne s'était donc pas intéressé à la question de la dépendance des conditions. Il lui suffisait simplement de se donner assez d'hypothèses sur les ombres, en l'occurrence quatre, pour retrouver la déclinaison solaire et la latitude en employant possiblement la trigonométrie sphérique comme Delambre et Collignon⁷⁷ plus tard.

Or, comme le remarque Delambre dans son commentaire et dans la solution trigonométrique qu'il donne⁷⁸, dans ce cas :

⁷⁵ C'est moi qui souligne. Cf. Delambre (1827), p. 37, 40, 42. Cité par Whiteside : MP V, p. 278. Nul doute que Delambre ne ferait le même reproche à la solution cartésienne qui est plus longue et plus complexe encore !

⁷⁶ Il a ainsi publié un traité de trigonométrie sphérique en 1627 intitulé *Kort by-voegsel der sphaerische triangulen*. Cf. la note biographique de J. van de Ven : Descartes (2003), p. 300.

⁷⁷ Collignon a écrit un article particulièrement détaillé et intéressant sur la courbe d'ombre d'un gnomon Collignon (1888). On y trouve d'abord une étude de l'équation de cette courbe qui emploie la trigonométrie sphérique : Collignon (1888), p. 53-67. L'auteur résout ensuite des problèmes de gnomonique dont celui des trois bâtons et son problème « inverse » qui correspond aux questions de gnomonique posées par Descartes. Cf. Collignon (1888), p. 67-72.

⁷⁸ Cf. Delambre (1827), p. 35-42.

De ses cinq observations nous supprimons la cinquième comme superflue, [...] Newton [et Descartes] voulait trouver l'ellipse, dont on aura aucun besoin pour ce problème.⁷⁹

Ainsi, Stampioen, qui n'avait besoin que de quatre hypothèses car il employait une méthode trigonométrique, obligeait Descartes, si ce dernier voulait répondre au défi lancé contre sa Géométrie, non seulement à produire une solution au problème conforme à la Méthode, mais encore à réfléchir d'un point de vue algébrique sur les relations de dépendance entre les hypothèses.

Une solution algébrique

En effet, Descartes et Newton ont besoin dans leur solution de la conique décrite par l'ombre de l'extrémité du bâton **A**. Plus précisément, ils déduisent de l'équation de la conique (qu'ils obtiennent après une analyse algébrique astucieuse fondée sur plusieurs éliminations et substitutions) les distances du point **A** aux sommets et au centre de cette dernière — il s'agit en effet d'une ellipse —, et emploient ces distances pour trouver la latitude et la déclinaison solaire. Une conique étant déterminée par cinq points, ils ont donc besoin de la donnée de cinq ombres.⁸⁰

Schooten, en montrant que les cinq premières hypothèses du problème impliquent la sixième corrige la rédaction défectueuse et incomplète de Waessenaer mais ne paraît pas reconnaître dans le même temps, comme Newton le fera à sa suite, que cinq hypothèses suffisent pour résoudre le problème.

Une solution projective

Pour terminer, on peut noter qu'il est possible de donner une solution *projective* du problème. Une autre façon de procéder pour déterminer la latitude et la déclinaison solaire consiste en effet à supposer que la conique décrite par l'ombre est un cercle⁸¹. Un cercle étant défini par trois points, on serait assuré de la détermination de la question, en n'usant que de trois observations d'ombres⁸². On pourrait ensuite en déduire la solution pour l'ellipse, la projection orthogonale d'une ellipse sur un cercle conservant les rapports de segments de même direction. Newton écrit ainsi en note dans son *Waste Book* :

Le problème des trois bâtons dans Schooten peut être résolu plus simplement en supposant d'abord que l'ellipse est un cercle puis en réduisant [ce cercle] à l'[ellipse] souhaitée.⁸³

⁷⁹ Cf. Delambre (1827), p. 40, 42.

⁸⁰ Comme on l'a vu auparavant, la résolution algébrique est longue et complexe. Pour plus de détails sur les solutions de Descartes et Newton, je me permets de renvoyer à Maronne (2007), p. 403-421.

⁸¹ Cela est le cas, physiquement, en se plaçant au pôle nord le jour du solstice d'été.

⁸² Delambre fait d'ailleurs référence à une solution donnée par Adriaen Metius au problème dans lequel un gnomon et trois ombres sont donnés. Cf. Delambre (1827), p. 38. D'autre part, Jan van Maanen conjecture que Descartes aurait pu assister aux leçons de mathématiques pratiques de Adriaen Metius à Franeker en 1629 : Maanen (1987), p. 15-16. L'intérêt de Adriaen Metius pour la gnomonique apparaît entre autres dans son ouvrage le plus connu Metius (1626).

⁸³ Cf. la note de Newton dans son *Waste Book* (ULC. Add. 4004 : 96v) citée par Whiteside in MP V, p. 269.

The Problem in Schooten *de tribus baculis* may be solved more easily by supposing y^e Ellipsis to be a circle first & reducing it to y^e desired [Ellipsis].

Une autre démonstration projective, fondée sur l'usage du célèbre théorème de l'hexagramme mystique de Pascal, est également proposée par Edouard Collignon⁸⁴.

Conclusion

Je me suis efforcé de montrer dans cet article en reprenant un projet de recherche plus général⁸⁵ qu'il y avait avantage à opérer un pas de côté pour étudier la géométrie cartésienne : d'abord, en étudiant non pas seulement *La Géométrie* de 1637 mais aussi la correspondance et les éditions latines de 1659-1661, ensuite, en constatant que cela permet d'observer une autre géométrie que celle clairement et strictement délimitée par Descartes en 1637.

Cette « autre géométrie » cartésienne ne prend pas pour objet premier et exclusif les courbes géométriques définies par une équation algébrique, mais porte sur des problèmes bien plus variés issus par exemple de la gnomonique et de l'arithmétique. Ces problèmes, bien que difficiles, ne passent souvent pas le degré deux et restent donc constructibles à la règle et au compas. On n'observera en outre nul signe avant-coureur de la généralité de *La Géométrie* (ce sont les classiques coniques qui interviennent au côté d'équations quadratiques) mais la manifestation d'une réelle dextérité dans un art crucial pour exercer la méthode. Il s'agit de l'art de *démêler* les équations, c'est-à-dire au sens moderne, des techniques d'élimination d'une ou plusieurs inconnues entre des équations, qu'on retrouve à l'œuvre dans la méthode des normales au sein de *La Géométrie*, avec en particulier la méthode des coefficients indéterminés.

Avec le problème des trois bâtons, nous avons découvert un des produits remarquables et caractéristiques de cette autre géométrie qui reste encore à explorer.

Sébastien MARONNE
Institut de Mathématiques de Toulouse / SPHERE

Remerciements

Je tiens à remercier David Rabouin et André Warusfel pour leur aide précieuse dans l'écriture de cet article.

Références

Bos Henk J.M., 2003, « Descartes, Elisabeth and Apollonius' Problem », in Descartes (2003), p. 202-212.

Bosmans Henri, 1927, « L'auteur principal de l'On-Wissen Wiskonstenaer I.I. Stampioenius ontdeckt door Jacobus a Waessanaer, Leyde, 1640 », *Revue des questions scientifiques*, 1(11), p. 113-141.

Brigaglia Aldo et Nastasi Pietro, 1986, « Le ricostruzioni appolloniane in Viète e in Ghetaldi », *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI (fasc. 1), p. 83-133.

Clavius Christophorus, 1581, *Gnomonices Libri Octo, in quibus, non solum horologiorum solarium, sed aliarum quoque rerum quæ ex gnomonis umbra cognosci possunt, descriptiones Geometrice demonstrantur*, Romæ, apud Francesco Zanetti.

⁸⁴ Cf Collignon (1888), p. 67-70.

⁸⁵ Cf. Maronne (2007), Introduction.

Clavius Christophorus, 1611-1612, *Opera Mathematica*, 5 vols., Moguntiae, Sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz.

Collignon Edouard, 1888, « Recherches sur la courbe d'ombre d'un piquet vertical », *Compte rendu de la 17e session d'Oran*, vol. 17, p. 53–72, Association française pour l'avancement des sciences, Paris.

Costabel Pierre, 1969, « Descartes et la racine cubique des nombres binômes », *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, XXII, p. 97–116.

Costabel Pierre, 1990, « La Géométrie que Descartes n'a pas publiée », in Giulia Belgioioso et alii (éd.), *Descartes, Il metodo e i saggi. Atti del Convegno per il 350e anniversario della pubblicazione del Discours de la Méthode e degli Essais*, 2 vols., Firenze, Armando Paoletti, p. 371–385.

Delambre Jean-Baptiste, 1827, *Histoire de l'Astronomie au dix-huitième siècle*, Paris, Bachelier.

Desargues Girard, 1864, *Œuvres de Desargues*, 2 vols., édition de M. Poudra, Paris, Leiber.

Descartes René, 1649, *Geometria à Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita*, édition de Frans van Schooten, Lugduni Batavorum, Ex officinâ Ioannis Maire.

Descartes René, 1659-1661, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem [...]*, 2 vols, édition de Frans van Schooten, Amstelædami, Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

[Clerselier] Descartes René, 1657-1667, *Lettres de M. Descartes*, 3 vols., édition de Claude Clerselier, Paris, Angot.

[AM] Descartes René, 1936-1963, *Correspondance de Descartes*, 8 vols., édition de Charles Adam et Gérard Milhaud, Paris, Alcan-PUF.

[AT] Descartes René, 1964-1974, *Œuvres de Descartes*, 11 vols., édition de Charles Adam et Paul Tannery, nouvelle présentation par Bernard Rochot et Pierre Costabel, Paris, Vrin.

Descartes René, 2003, *The Correspondence of René Descartes 1643*, édition de Theo Verbeek, Erik-Jan Bos et Jeroen van de Ven, volume XLV de *Quæstiones Infinitæ*, Utrecht, Zeno Institute of Philosophy.

Descartes René, 2009, *Œuvres Complètes III. Discours de la Méthode et Essais*, dir. Jean-Marie Beyssade et Denis Kambouchner, Paris, Gallimard, TEL.

Haestrecht Godefroy de ?, 1638a, « Calcul de Mons. DesCartes. [Introduction à la Géométrie] », in AT X, p. 659–680.

Haestrecht Godefroy de ?, 1638b, « Introduction à la Géométrie », in AM III, p. 328-352 [Présentation, p. 323–327].

Maanen Jan van, 1987, *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands*, Utrecht, Elinkwijk.

Maronne Sébastien, 2006, « Sur une lettre de Descartes à Schooten qu'on dit de 1639 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 12(2), p. 199-248.

Maronne Sébastien, 2007, *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Mersenne Marin, 1644, *Universæ geometriæ, mixtæque mathematicæ Synopsis, et bini refractionum demonstratarum Tractatus*, Paris, apud Antonium Bertier.

[CM] Mersenne Marin, 1945-1988, *Correspondance du P. Marin Mersenne, religieux minime*, édition de Cornélis de Waard et Armand Beaulieu, 17 vols., Paris, PUF/CNRS, 1945-1988.

[MP] Newton Isaac, 1967-1981, *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (8 vol.), édition de D.T. Whiteside, Cambridge, Cambridge University Press.

Metius Adriaen, 1626, *Arithmeticae libri duo et geometriae libri sex lib VI. Huic adjungitur trigonometriae planorum methodus succincta*, Lugduni Batavorum, ex officina Elzeviriana.

Oudet Jean-François, 1994, « Le style de Desargues. L'observation associée à la théorie pour placer le style d'un cadran solaire », in Jean Dhombres et Joël Sakarovitch, éditeurs, *Desargues en son temps*, Paris, Librairie Albert Blanchard, p. 331-339.

Pares Jean, 1988, « La Gnomonique de Desargues à Pardies. Essai sur l'évolution d'un Art scientifique », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, 17.

Penchevre Erwan, 2006, *Histoire de la théorie de l'élimination*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Schooten Frans van, 1649, « Additamentum, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam problematis & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis » in Descartes (1649), p. 295-336.

Schooten Frans van, 1651, *Principia matheseos universalis seu Introductio ad Cartesianae Geometriae Methodum. Conscripta ab Erasmio Bartholino*, Lugduni Batavorum, ex Officinâ Elzeviriorum. Republié dans Descartes (1659-1661), p. 1-48.

Schooten Frans van, 1659, « Additamentum, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam problematis & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis » in Descartes (1659-1661), I, p. 369-400.

Waessenaer Jacob van, 1640, *Den On-Wissen Wiskonstenaer I.I. Stampioenius ontdekt...*, Leyden, gedrukt by Willem Christiaens voor Iohannes Maire.

Warusfel André, 2010, *Sur l'œuvre mathématique de Descartes*, Thèse de doctorat, Université Paris IV.