



HAL
open science

Analyse asymptotique et géométrie de la tomographie réflective

Jean-Baptiste Bellet

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Bellet. Analyse asymptotique et géométrie de la tomographie réflective. 2017. hal-01571707

HAL Id: hal-01571707

<https://hal.science/hal-01571707>

Preprint submitted on 3 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DE LA TOMOGRAPHIE RÉFLECTIVE

JEAN-BAPTISTE BELLET

RÉSUMÉ. La tomographie réfective est une heuristique d'imagerie optique performante, en cours de développement. Elle est validée par l'expérience, mais doit être étayée mathématiquement : elle repose sur l'usage d'une inversion de Radon en dehors de son cadre habituel. On cherche donc à justifier ce procédé dans un cadre mathématique. Pour y parvenir, on propose une analyse asymptotique haute-fréquence de la rétroprojection filtrée réfective. On obtient un développement asymptotique ponctuel, dont les contributions sont issues des singularités des projections. En examinant les ordres les plus élevés, on obtient une description géométrique et quantitative des parties de la scène correctement imagées, et aussi des artefacts. Résultats numériques à l'appui, cette approche décrit pertinemment différents cas canoniques de tomographie réfective. L'analyse effectuée paraît importante dans une perspective de perfectionnement des algorithmes de tomographie réfective.

1. INTRODUCTION

1.1. Tomographie réfective. En optique, reconstruire un milieu à partir d'images en intensité est un réel défi, très important pour les applications. Durant ces trente dernières années, différents auteurs se sont intéressés à une solution, baptisée *tomographie réfective*. L'idée est d'appliquer un algorithme de reconstruction tomographique, une *rétroprojection filtrée*, à des données *réfectives*. Ce concept a été introduit à la fin des années 80 pour différents types de données laser [7]. Il a été utilisé en imagerie de satellite [8], et il est l'un des ingrédients d'une méthode d'imagerie optronique 3D récente [2,3]. En somme, la tomographie réfective est une heuristique de reconstruction, efficace et stable, éprouvée par l'expérience.

1.2. Fossé mathématique. Cependant, à la connaissance de l'auteur, il reste à apporter des garanties mathématiques à cette heuristique. En effet, les théorèmes usuels de tomographie concernent l'inversion de la transformation de Radon [9]. Ils ne justifient pas l'usage de la rétroprojection filtrée sur des données réfectives, puisqu'elles ne résultent pas d'une transformation de Radon. Cet article s'inscrit dans une démarche visant à combler ce fossé. La première étape a fait l'objet de la note [1] ; elle consiste à formuler un modèle mathématique de tomographie réfective, réaliste et exploitable. Au passage, dans cette note, on interprète intuitivement la reconstruction heuristique, à l'aide d'accumulation/compensation de termes cohérents/incohérents. Dans cet article, on va aboutir à ce type de conclusion avec davantage de rigueur : par des calculs asymptotiques de type phase stationnaire.

1.3. Stratégie proposée. Puisque les données réfectives ne sont pas de Radon, on considère la rétroprojection filtrée comme un opérateur direct qui leur est appliqué, sans utiliser explicitement que c'est un opérateur d'inversion de Radon. D'autre part, comme il est souvent d'usage en Mathématiques, on propose une analyse asymptotique. Il s'agit donc d'étudier asymptotiquement l'effet de la rétroprojection filtrée sur des données réfectives. Le cadre retenu est le suivant. On suppose que la projection réfective d'une scène, en continu, est injectée dans une rétroprojection filtrée, avec un filtre de support fréquentiel borné. On s'intéresse à l'asymptotique haute fréquence, dans le sens où la plus grande fréquence du support du filtre tend vers l'infini. L'étude est menée ponctuellement.

1.4. Résultats principaux. Les quatre résultats principaux de cet article sont les suivants.

Le premier résultat important (page 4) est une hypothèse sur la structure de la projection réfective, en lien avec la géométrie de la scène projetée. Cette hypothèse généralise la projection des silhouettes d'un convexe.

Date: 3 août 2017(v8.4).

2010 Mathematics Subject Classification. 41A60 ; 78A97 ; 94A12 ; 44A12.

Key words and phrases. Asymptotic expansion ; computational optics ; reconstruction ; Radon transform.

Le deuxième résultat est un développement asymptotique mono-fréquentiel (Théorème 3.13) ; il exhibe une structure en superposition de termes algébriquement décroissants et de termes oscillants. Les différentes contributions, obtenues par une formule de type phase stationnaire [5], sont issues des courbes de singularité, identifiées dans l’hypothèse structurelle susmentionnée.

Le résultat le plus important est un développement asymptotique ponctuel de la rétroprojection filtrée réflexive (RFBP) : Théorème 4.4. Il est obtenu par la méthode des transformées de Mellin [4], à partir du développement mono-fréquentiel.

En corollaire (Corollaire 4.6), on obtient une quantification asymptotique ponctuelle d’une inversion de type Radon, appliquée à des données réflexives. On obtient notamment une description géométrique de l’ensemble des points où l’ordre, en le paramètre asymptotique, y est le plus élevé.

1.5. Organisation. Le corps du texte s’articule somme suit. D’abord, on modélise la tomographie réflexive. Ensuite, on détermine les développements asymptotiques, mono, puis multi-fréquentiel. Enfin, on examine l’impact de ces résultats sur différents cas canoniques, et on valide numériquement l’approche. En annexe, on trouvera des compléments qui facilitent la compréhension.

2. PROJECTION RÉFLECTIVE

2.1. Tomographie réflexive. On propose un modèle continu d’acquisition de tomographie réflexive, et on formule l’heuristique de reconstruction associée.

On considère une scène d’objets opaques dans une enceinte, en deux dimensions, que l’on projette en réflexion de manière similaire à la note [1]. On suppose que l’on mesure ainsi un réflectogramme $P : (\theta, s) \in \Theta \times [-R, R] \mapsto P(\theta, s)$, où $\Theta = [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \subset [0, 2\pi]$ est un intervalle d’angles, et $R > 0$ est la demi-largeur d’un écran de projection.

Notation. On convient d’identifier un angle $\theta \in \Theta$ avec le vecteur $(\cos \theta, \sin \theta) \in S^1$, et on note \cdot^\perp la rotation de centre 0 et d’angle $\pi/2$. En particulier, $\Theta \equiv \{(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]\}$, $\theta \equiv (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\theta^\perp \equiv (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Plus en détails, on note $\partial O = \partial W \cup \partial S$, où ∂W est le bord de l’enceinte et ∂S est le bord des objets de la scène. Comme sur la Figure 1, pour chaque angle $\theta \in \Theta$, et chaque $s \in [-R, R]$, on projette la scène dans la direction $-\theta^\perp$, le long de la droite $x \cdot \theta = s$. Sur un écran parallèle à θ , situé entre les objets et l’enceinte, on enregistre $P(\theta, s) = f(\theta, y(\theta, s))$, avec $y(\theta, s) \in \{x \in \partial O : x \cdot \theta = s\}$ le point visible de la scène, et $f : (\Theta, \partial O) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction contenant la “physique” du problème. Par opacité des objets, sur le rayon $x \cdot \theta = s$, le point visible est le dernier point de ∂O lorsque l’on parcourt le rayon dans la direction $-\theta^\perp$.

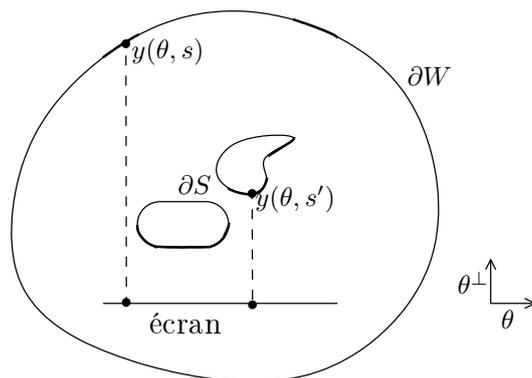


FIGURE 1. Projection réflexive pour un angle $\theta \in \Theta$: l’enceinte ∂W et la scène ∂S sont projetés dans la direction $-\theta^\perp$ sur un écran, le long des rayons $x \cdot \theta = s$, avec $s \in [-R, R]$. L’ensemble des points visibles projetés $y(\theta, s), s \in [-R, R]$, est représenté en gras. Les pointillés représentent deux rayons de projection, des points visibles $y(\theta, s)$ et $y(\theta, s')$ vers l’écran.

On pose le problème d’imagerie suivant : reconstruire les objets de la scène ∂S , connaissant la projection réflexive P sur $\Theta \times [-R, R]$. La géométrie d’acquisition rappelle l’acquisition de la transformée de Radon : la scène est projetée le long de rayons parallèles. Comme cela a été fait dans les références, une heuristique de reconstruction consiste à appliquer un algorithme de type

inversion de Radon : une rétroprojection filtrée. Cette heuristique calcule donc une reconstruction dont la forme est donnée par la définition suivante.

Définition 2.1. Soit P un réflectogramme intégrable sur $\Theta \times [-R, R]$. Soient $\Omega > 0$ et ψ une fonction paire à valeurs réelles, régulière sur $[0, 1]$. Soit un filtre de support spectral contenu dans $[-\Omega, \Omega]$, associé à ψ :

$$\psi_\Omega(s) := \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \psi\left(\frac{\sigma}{\Omega}\right) e^{i\sigma s} d\sigma = \int_0^1 \psi(\sigma) \cos(\Omega\sigma s) d\sigma.$$

On appelle rétroprojection (ψ_Ω) -filtrée de P la fonction bi-dimensionnelle :

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega] : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \int_{\Theta} \int_{[-R, R]} P(\theta, s) \psi_\Omega(x \cdot \theta - s) ds d\theta.$$

Ainsi, en tomographie réflective, on mesure un réflectogramme P ; la reconstruction heuristique $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega]$ de la scène est obtenue en deux temps : d'abord on filtre les données P en la variable spatiale s , par un filtre ψ_Ω , puis on applique une rétroprojection, opération adjointe de la transformée de Radon \mathcal{R} .

Bien sûr, la reconstruction dépend du choix du filtre ψ_Ω . Les filtres tomographiques usuels sont obtenus en choisissant ψ sous la forme $\psi = |\cdot| h$, avec h une fonction de fenêtrage paire, régulière sur $[-1, 1]$; ils ont été conçus pour inverser des données de Radon. Pour l'heuristique étudiée, ils ne sont peut-être pas les meilleurs possibles, puisque P n'est pas une transformée de Radon. C'est la raison pour laquelle la forme que nous retenons pour le filtrage ψ est plus générale. Nous considérons dans cet article le filtre ψ comme un paramètre de la reconstruction, sur lequel il sera possible d'agir dans des travaux futurs ; nous exprimerons nos résultats en fonction de ce filtre.

Par ailleurs, la demi-largeur Ω de la fenêtre fréquentielle de ψ_Ω joue le rôle d'un paramètre de résolution. En pratique, lorsque P est connue sur une grille discrète, Ω ne peut pas dépasser la fréquence de Shannon-Nyquist associée à la discrétisation de P en la variable s . Dans ce travail académique, on suppose que P est connue en continu, et l'on s'intéresse au comportement de la reconstruction lorsque le paramètre de résolution Ω devient grand. Le but principal est de déterminer, en fonction de la position du point $x \in \mathbb{R}^2$, un développement asymptotique de la reconstruction $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x)$, lorsque $\Omega \rightarrow \infty$.

2.2. Structure d'un réflectogramme. On établit quelques hypothèses de travail sur la structure de la projection réflective P , valables en particulier pour la projection d'un convexe régulier.

2.2.1. Silhouette d'un convexe. Le résultat suivant précise la forme du réflectogramme P lorsque l'on mesure la silhouette d'un seul objet convexe, comme sur la Figure 2.

Proposition 2.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un convexe compact d'intérieur non vide, dont l'ensemble des points extrémaux est $Z \subset \partial S$. On mesure la silhouette de S , sur un écran suffisamment grand, sur un tour complet : $f|_{\partial W} = 0$, $f|_{\partial S} = 1$, $S \subset \{|x| < R\}$ et $\Theta = \mathbb{S}^1$. Soit $\theta \in \Theta$.

1. On peut poser $s_g(\theta) := \min\{s : S \cap \{x \cdot \theta = s\} \neq \emptyset\}$ et $s_d(\theta) := \max\{s : S \cap \{x \cdot \theta = s\} \neq \emptyset\}$. On dénombre exactement deux hyperplans d'appui de S dirigés par θ^\perp : $x \cdot \theta = s_g(\theta)$ et $x \cdot \theta = s_d(\theta)$.
2. La projection de S sur l'écran dirigé selon θ est constante par morceaux :

$$P(\theta, \cdot) : s \in [-R, R] \mapsto P(\theta, s) = \mathbb{1}_{[s_g(\theta), s_d(\theta)]}(s).$$

3. La projection $P(\theta, \cdot)$ saute en s , si, et seulement si, il existe un point extrémal $z \in Z$ tel que la droite $x \cdot \theta = s$ est un hyperplan d'appui de S en z ; dans ce cas, $s = z \cdot \theta$.

Démonstration. 1. S est borné et d'intérieur non vide donc $E = \{s : S \cap \{x \cdot \theta = s\} \neq \emptyset\}$ est non vide, borné, et ses bornes vérifient $s_g(\theta) := \inf E < \sup E =: s_d(\theta)$. Dans E , on fixe une suite minimisante (s_n) qui converge vers $s_g(\theta)$. Alors il existe une suite de points de S , (x_n) , telle que $x_n \cdot \theta = s_n, n \geq 0$. Quitte à extraire une sous-suite, par compacité de S , (x_n) converge vers $\hat{x} \in S$, avec, à la limite, $\hat{x} \cdot \theta = s_g(\theta)$, et donc la borne inférieure est atteinte. L'hyperplan $x \cdot \theta = s_g(\theta)$ est un hyperplan d'appui de S : il intersecte S en \hat{x} , et par construction de $s_g(\theta)$, $S \subset \{x : x \cdot \theta \geq s_g(\theta)\}$. On procède de manière analogue pour l'hyperplan $x \cdot \theta = s_d(\theta)$. Enfin, les hyperplans d'appui $x \cdot \theta = s_g(\theta)$ et $x \cdot \theta = s_d(\theta)$ sont les seuls orthogonaux à θ : si $s \notin [s_g(\theta), s_d(\theta)]$, alors $x \cdot \theta = s$ n'intersecte pas S , et si $s \in (s_g(\theta), s_d(\theta))$, alors $x \cdot \theta \geq s$ ne contient pas $S \cap \{x \cdot \theta = s_g(\theta)\}$, et $x \cdot \theta \leq s$ ne contient pas $S \cap \{x \cdot \theta = s_d(\theta)\}$.

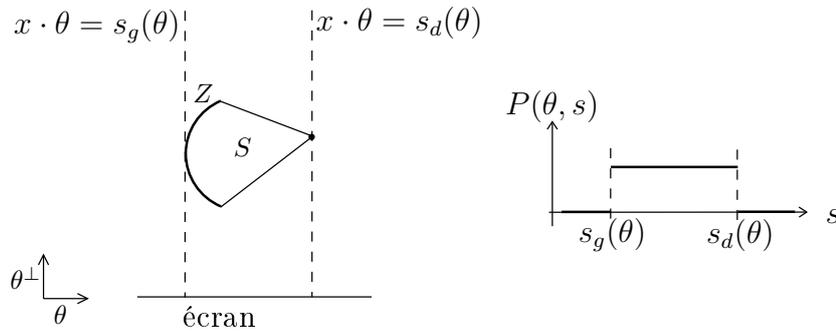


FIGURE 2. Projection de la silhouette d'un convexe compact S , pour un angle $\theta \in \Theta$. À gauche : points extrémaux $Z \subset \partial S$ (en gras), et hyperplans d'appui dirigés par θ^\perp (en pointillés). À droite : silhouette associée $P(\theta, s) = \mathbb{1}_{[s_g(\theta), s_d(\theta)]}(s)$, $s \in [-R, R]$.

2. Si $s \notin [s_g(\theta), s_d(\theta)]$, alors $x \cdot \theta = s$ n'intersecte pas $\partial S \subset S$, donc $y(\theta, s) \in \partial W$, puis $P(\theta, s) = f|_{\partial W}(\theta, y(\theta, s)) = 0$. Sinon, le rayon $x \cdot \theta = s$ intersecte ∂S au point visible $y(\theta, s) = \hat{x}$, vérifiant : \hat{x} minimise $\hat{x} \cdot \theta^\perp$ sur $S \cap \{x \cdot \theta = s\}$; puis $P(\theta, s) = f|_{\partial S}(\theta, y(\theta, s)) = 1$.
3. D'après (ii) et (i) : $P(\theta, \cdot)$ saute en s si, et seulement si, $s \in \{s_g(\theta), s_d(\theta)\}$, soit $x \cdot \theta = s$ est un hyperplan d'appui de S . On conclut car un hyperplan d'appui H de S possède toujours au moins un point extrémal $z \in Z$: les points extrémaux de $H \cap S$ sont extrémaux pour S . □

La proposition précédente détermine les points singuliers d'une coupe (θ fixé) dans le réfectogramme P . En faisant varier θ et en regroupant les points singuliers issus d'une même portion régulière de Z , et ceux issus d'un même sommet de Z , deux types de courbe de singularité apparaissent naturellement dans le réfectogramme P . Chacun de ces deux cas est réalisé pour l'exemple de la Figure 2.

Proposition 2.3. *Sous les hypothèses de Proposition 2.2. On suppose l'existence d'une courbe régulière $z \equiv \{z(\theta), \theta \in [\theta_0, \theta_1]\} \subset Z$, avec $\theta_0 < \theta_1$, telle que pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, $\dot{z}(\theta) \neq 0$ et $\dot{z}(\theta) \cdot \theta = 0$. Alors pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, la tangente $(z(\theta), \dot{z}(\theta))$ est un hyperplan d'appui de S en $z(\theta)$, dirigé par θ^\perp , et donc le réfectogramme P est singulier en chaque point de la courbe $\Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1]) := \{s = z(\theta) \cdot \theta, \theta \in [\theta_0, \theta_1]\}$.*

Proposition 2.4. *Sous les hypothèses de Proposition 2.2. On suppose l'existence d'un sommet $z \in Z$ et d'angles $\theta_0 < \theta_1$ tels que les droites $x \cdot \theta = z \cdot \theta, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, sont des hyperplans d'appui de S en z . Alors le réfectogramme P est singulier en chaque point de la courbe $\Gamma_b(z, [\theta_0, \theta_1]) := \{s = z \cdot \theta, \theta \in [\theta_0, \theta_1]\}$.*

En somme, nous avons introduit deux familles de courbes de singularité, dans le cadre de la projection de la silhouette d'un convexe. La première provient de la projection des enveloppes de familles de droites tangentes ; la deuxième provient de la projection des sommets.

2.2.2. *Extension.* L'usage de ces deux types de courbes couvre en fait des cas plus généraux.

En effet, d'une manière générale, pour une physique f régulière par morceaux et une géométrie ∂O multi-objets, on s'attend à une projection P régulière par morceaux, où les discontinuités de P sont reliées aux hyperplans d'appui locaux de la scène ∂S (voir Figure 3), et aux discontinuités de f . Fondamentalement, un morceau z convexe régulier, situé au premier plan, et qui occulte l'arrière de la scène, générera une courbe de la forme $\Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1])$. Et un point z , visible et singulier sur toute une plage angulaire, générera une courbe de la forme $\Gamma_b(z, [\theta_0, \theta_1])$; ce cas traite les coins de ∂O et les points de saut de f . À partir de ces considérations empiriques, on formalise une hypothèse sur la structure du réfectogramme P (voir Figure 4) :

Hypothèse. *Soient une scène et une physique $(\partial O, f)$, un ensemble d'angles $\Theta = [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \subset [0, 2\pi]$ avec $\theta_{\min} < \theta_{\max}$, et une demi-largeur d'écran $R > 0$. Soit le réfectogramme associé P , sur le rectangle $D = \Theta \times [-R, R]$. On suppose que la structure de P vérifie les hypothèses suivantes. P est régulière par morceaux sur D : il existe une famille finie d'ouverts réguliers (Σ_i) , deux à deux disjoints, telle que $D = \cup_i \overline{\Sigma_i}$, et chaque $P|_{\Sigma_i}$ est prolongeable en une fonction régulière. Ce*

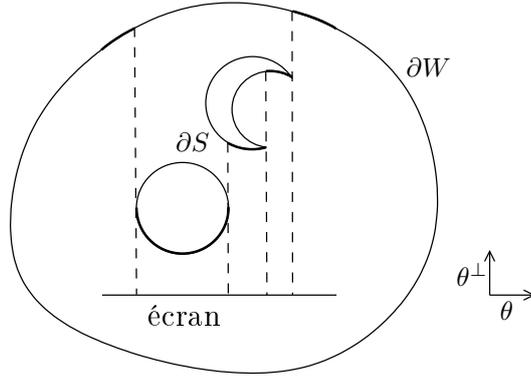


FIGURE 3. Pour un angle θ de projection, le point visible $y(\theta, s) \in \partial W \cup \partial S$ parcourt la zone en gras. Les pointillés représentent les rayons $x \cdot \theta = s$ où $y(\theta, s)$ saute. À gauche, ils sont tangents à un convexe ; à droite, ils passent par un coin.

découpage fait intervenir un ensemble fini \mathcal{G} de courbes, définies à partir des interfaces entre des morceaux distincts, de la forme $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$, et de segments sur le bord ∂D . On suppose que le bord de chaque morceau Σ_i est une réunion de courbes de \mathcal{G} , et que chaque courbe $\Gamma \in \mathcal{G}$ est de l'une des formes suivantes :

- $\Gamma_a(z, \delta\Theta) = \{(\theta, s) : s = z(\theta) \cdot \theta, \theta \in \delta\Theta\}$, où $\delta\Theta = [\theta_0, \theta_1] \subset \Theta$, $\{z(\theta), \theta \in \delta\Theta\} \subset \partial O$ est une courbe régulière telle que pour tout $\theta \in \delta\Theta$, $\dot{z}(\theta) \neq 0$ et $\dot{z}(\theta) \cdot \theta = 0$,
- $\Gamma_b(z, \delta\Theta) = \{(\theta, s) : s = z \cdot \theta, \theta \in \delta\Theta\}$, où $\delta\Theta = [\theta_0, \theta_1] \subset \Theta$, et $z \in \partial O$,
- $\Gamma_c(r, \delta\Theta) = \{(\theta, r), \theta \in \delta\Theta\}$, avec $\delta\Theta = [\theta_0, \theta_1] \subset \Theta$ et $r \in [-R, R]$,
- $\Gamma_d(\beta, [s_0, s_1]) = \{(\beta, s), s \in [s_0, s_1]\}$ avec $\beta \in \{\theta_{\min}, \theta_{\max}\}$ et $[s_0, s_1] \subset [-R, R]$.

Les courbes de type a) ou b), comme nous l'avons vu, proviennent de la géométrie ∂O de la scène et de la physique f . Les autres types sont liés aux limitations de l'acquisition : troncature sur $[-R, R]$ des projections en l'espace pour les segments de type c), et troncature sur Θ du réflectogramme en l'angle pour ceux de type d). Ces hypothèses de travail constituent un cadre d'étude agréable, et plutôt général ; elles seront satisfaites pour les cas canoniques de la dernière section. On supposera désormais que nous sommes dans ce cadre.

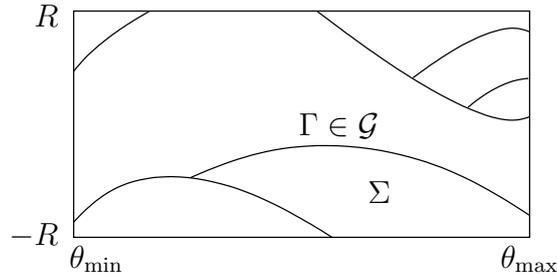


FIGURE 4. Hypothèses : le réflectogramme P est régulier par morceaux sur $\Theta \times [-R, R]$, et le bord de chaque morceau Σ s'obtient par réunion de courbes $\Gamma \in \mathcal{G}$.

Remarque. Il est toutefois possible de construire des réflectogrammes qui n'entrent pas complètement dans le cadre étudié : l'hypothèse formulée ne permet pas de gérer les annulations de courbure sur le bord d'un convexe régulier, comme en témoigne la Proposition 2.5 ci-dessous. ■

Le résultat (préliminaire) suivant précise le repère de Fresnet et la courbure pour une courbe z à l'origine d'une courbe $\Gamma_a(z, \delta\Theta)$:

Proposition 2.5. Soient $\delta\Theta = [\theta_0, \theta_1]$, et une courbe $\{z(\theta), \theta \in \delta\Theta\}$, régulière telle que pour tout $\theta \in \delta\Theta$, $\dot{z}(\theta) \neq 0$ et $\dot{z}(\theta) \cdot \theta = 0$. En $z(\theta)$, le repère de Fresnet est $(z(\theta), \eta\theta^\perp, -\eta\theta)$, avec $\eta = \text{sign}(\dot{z}(\theta) \cdot \theta^\perp)$, et la courbure est $\frac{1}{|\dot{z}(\theta)|} > 0$. En particulier :

$$\dot{z}(\theta) = -\frac{1}{\kappa(\theta)}\theta^\perp, \quad (2.1)$$

où $\kappa(\theta) := \frac{-\eta}{|\dot{z}(\theta)|}$ représente une courbure algébrique.

Démonstration. On introduit une abscisse curviligne ℓ sur la courbe régulière $\{z(\theta), \theta \in \delta\Theta\}$: $\ell(\theta) := \int_{\theta_0}^{\theta} |\dot{z}(t)| dt$, de dérivée $\frac{d\ell}{d\theta} = |\dot{z}(\theta)| > 0$, et on pose $\gamma(\ell(\theta)) := z(\theta)$. La tangente unitaire en $z(\theta) = \gamma(\ell)$ est $T(\ell) := \dot{\gamma}(\ell) = \frac{\dot{z}(\theta)}{|\dot{z}(\theta)|}$, et la normale unitaire est $N(\ell) := T(\ell)^\perp$. Or, $\dot{z}(\theta) \cdot \theta = 0$, donc $T(\ell) \cdot \theta = 0$. Alors, $T(\ell) = \eta\theta^\perp$ et $N(\ell) = -\eta\theta$, où $\eta = \text{sign}(\dot{z}(\theta) \cdot \theta^\perp)$. La courbure de l'objet en $\gamma(\ell)$ est définie par $\kappa_\gamma(\ell) := \frac{d\theta}{d\ell} = \frac{1}{|\dot{z}(\theta)|}$, et la dérivée de la tangente est $\dot{\gamma}(\ell) = \kappa_\gamma(\ell)N(\ell)$. On obtient immédiatement $\dot{z}(\theta) = \frac{-1}{\kappa(\theta)}\theta^\perp$ pour $\kappa(\theta) := -\eta\kappa_\gamma(\ell(\theta))$. \square

Remarque. On aurait pu regrouper les courbes de type a) et les courbes de type c) dans une même classe : elles s'écrivent toutes sous la forme $s = z(\theta) \cdot \theta$ avec $z(\theta)$ comme dans la Proposition 2.5 ($z(\theta) = \pm R\theta$ pour une courbe de type c)). On préfère toutefois distinguer deux classes de courbes, car elles ont une origine différente. Celà permet d'isoler l'effet de la troncature spatiale. \blacksquare

2.3. Propriétés géométriques. Précisons quelques propriétés géométriques sur les courbes de singularité du réflectogramme.

L'ensemble des droites qui passent par un point $x \in \mathbb{R}^2$ correspond à une sinusoïde associée à x : $\{(\theta, s) : x \cdot \theta = s\}$. Alors, par définition même, une courbe $\Gamma_b(z, \delta\Theta)$ est un morceau de la sinusoïde associée au point z . Tandis que si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$, on montre qu'en chaque point $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$, Γ est tangente à la sinusoïde du point $z(\theta^*)$:

Proposition 2.6. *Soit $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$. Pour tout $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$, Γ est tangente en (θ^*, s^*) à la sinusoïde de $z(\theta^*)$: $s = z(\theta^*) \cdot \theta$, avec contact d'ordre 2.*

Démonstration. On s'intéresse au contact entre les courbes $s = z(\theta) \cdot \theta$ et $s = z(\theta^*) \cdot \theta$, en $\theta^* \in \delta\Theta$. On pose donc $d : \theta \mapsto z(\theta^*) \cdot \theta - z(\theta) \cdot \theta$. Il s'agit de montrer que $d(\theta^*) = d'(\theta^*) = 0$ pour la tangence, puis $d''(\theta^*) \neq 0$ pour l'ordre du contact. Évidemment, $d(\theta^*) = 0$. Pour la dérivée, $d'(\theta) = (z(\theta^*) - z(\theta)) \cdot \theta^\perp - \dot{z}(\theta) \cdot \theta = (z(\theta^*) - z(\theta)) \cdot \theta^\perp$, puis $d'(\theta^*) = 0$. Enfin, la dérivée seconde est $d''(\theta) = -(z(\theta^*) - z(\theta)) \cdot \theta - \dot{z}(\theta) \cdot \theta^\perp$ et donc $d''(\theta^*) = -\dot{z}(\theta^*) \cdot \theta^{*\perp} = \frac{1}{\kappa(\theta^*)} \neq 0$ (d'après (2.1)). \square

On munit les courbes de \mathcal{G} d'une abscisse curviligne :

Notation. Pour toute courbe $\Gamma \in \mathcal{G}$, on considère l'abscisse curviligne $\ell \in [0, |\Gamma|]$ suivante :

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 + (z(\alpha) \cdot \alpha^\perp)^2} d\alpha & \text{si } \Gamma = \Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1]), & \quad \ell(\theta) = \theta - \theta_0 & \text{si } \Gamma = \Gamma_c(r, [\theta_0, \theta_1]), \\ \ell(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 + (z \cdot \alpha^\perp)^2} d\alpha & \text{si } \Gamma = \Gamma_b(z, [\theta_0, \theta_1]), & \quad \ell(s) = s - s_0 & \text{si } \Gamma = \Gamma_d(\beta, [s_0, s_1]). \end{aligned}$$

Définition 2.7. Pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, fixé, on pose

$$\varphi : (\theta, s) \in \Theta \times [-R, R] \mapsto \varphi(\theta, s) = x \cdot \theta - s.$$

En plus, pour $\Gamma \in \mathcal{G}$, en $(\theta, s) = (\theta(\ell), s(\ell)) \in \Gamma$ d'abscisse curviligne ℓ , on pose $\tilde{\varphi}(\ell) = \varphi(\theta(\ell), s(\ell))$.

Pour aller plus loin que la Proposition 2.6, on décrit plus généralement le contact entre une courbe Γ et les lignes de niveaux de $\varphi(\theta, s) = x \cdot \theta - s$, pour un point $x \in \mathbb{R}^2$. En notant C_Φ la ligne de niveau Φ de $\varphi : x \cdot \theta - s = \Phi$, C_0 est la sinusoïde représentant x (ensemble des droites qui traversent x), et C_Φ est C_0 translatée de vecteur $(0, -\Phi)$. Lorsque φ est constante sur une courbe Γ , Γ coïncide avec une portion de courbe C_Φ . Plus généralement, en (θ^*, s^*) , l'ordre $\rho^* \geq 1$ d'annulation de $\ell \mapsto \varphi(\theta(\ell), s(\ell)) - \varphi(\theta^*, s^*)$ représente l'ordre du contact de Γ avec la ligne de niveau $C_{\varphi(\theta^*, s^*)}$. Le résultat suivant précise l'ordre du contact en fonction de x et du type de courbe.

Notation. La droite d'origine $z \in \mathbb{R}^2$ et dirigée par $\theta \in S^1$, est notée (z, θ) .

Proposition 2.8. *Soit $\Gamma \in \mathcal{G}$. Soient $x \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\theta, s) = x \cdot \theta - s$ et $\tilde{\varphi} : \ell \mapsto \varphi(\theta(\ell), s(\ell))$. Soit $(\theta^*, s^*) = (\theta(\ell^*), s(\ell^*)) \in \Gamma$ tel que $\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}(\ell^*)$ s'annule à l'ordre $\rho^* \geq 1$ (éventuellement infini).*

a) Si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$, alors

$$\begin{cases} \rho^* = 1, & \text{si } x \notin (z(\theta^*), \theta^*), \\ \rho^* = 2, & \text{si } x \in (z(\theta^*), \theta^*) \setminus \{x(\theta^*)\}, \\ \rho^* \geq 3, & \text{si } x = x(\theta^*) := z(\theta^*) + \frac{1}{\kappa(\theta^*)}\theta^*, \end{cases}$$

où $x(\theta^*)$ est le centre de courbure de $z(\theta)$, $\theta \in \delta\Theta$, en θ^* ;

b) si $\Gamma = \Gamma_b(z, \delta\Theta)$, alors

$$\rho^* = \begin{cases} 1, & \text{si } x \notin (z, \theta^*), \\ 2, & \text{si } x \in (z, \theta^*) \setminus \{z\}, \\ \infty, & \text{si } x = z; \end{cases}$$

c) si $\Gamma = \Gamma_c(r, \delta\Theta)$, alors

$$\rho^* = \begin{cases} 1, & \text{si } x \notin (0, \theta^*), \\ 2, & \text{si } x \in (0, \theta^*) \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

d) si $\Gamma = \Gamma_d(\beta, [s_0, s_1])$, alors $\rho^* = 1$.

Démonstration. Soit $d : \ell \in [0, |\Gamma|] \mapsto \tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(\ell^*)$. $\rho^* \geq 1$ est le plus petit entier tel que $d^{(\rho^*)}(\ell^*) \neq 0$ (et $d(\ell^*) = d'(\ell^*) = \dots = d^{(\rho^*-1)}(\ell^*) = 0$), ou est infini si toutes les dérivées sont nulles.

a) Si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$. Pour $(\theta, s) \in \Gamma$, $\varphi(\theta, s) = (x - z(\theta)) \cdot \theta$ puis $d'(\ell) = \frac{d\theta}{d\ell}(x - z(\theta)) \cdot \theta^\perp$, avec $\frac{d\theta}{d\ell} = (1 + (z(\theta) \cdot \theta^\perp)^2)^{-1/2}$. Donc $d'(\ell^*) = 0 \Leftrightarrow (x - z(\theta^*)) \cdot \theta^{*\perp} = 0$. Donc $\rho^* = 1$ si $x \notin (z(\theta^*), \theta^*)$. Sinon, $x \in (z(\theta^*), \theta^*)$, $d'(\ell^*) = 0$, et $\rho^* \geq 2$. Dans ce cas, $d''(\ell) = \frac{d^2\theta}{d\ell^2} d'(\ell) \left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^{-1} - \left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 [\dot{z}(\theta) \cdot \theta^\perp + (x - z(\theta)) \cdot \theta]$, avec $d'(\ell^*) = 0$, et $\dot{z}(\theta) \cdot \theta^\perp = -\frac{1}{\kappa(\theta)}$ (d'après (2.1)). Ici, $x \in (z(\theta^*), \theta^*)$ est de la forme $x = z(\theta^*) + \alpha\theta^*$ avec α une constante. Alors $d''(\ell^*) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\kappa(\theta^*)}$. Et donc, $\rho^* = 2$ si $\alpha \neq \frac{1}{\kappa(\theta^*)}$, et $\rho^* \geq 3$ sinon.

b) Si $\Gamma = \Gamma_b(z, \delta\Theta)$. Pour $(\theta, s) \in \Gamma$, $\varphi(\theta, s) = (x - z) \cdot \theta$. Si $x = z$, alors $\varphi = 0$ sur Γ donc $\rho^* = \infty$. Sinon, la dérivée est $d'(\ell) = \frac{d\theta}{d\ell}(x - z) \cdot \theta^\perp$ avec $\frac{d\theta}{d\ell} \neq 0$, et donc $d'(\ell^*) = 0 \Leftrightarrow (x - z) \cdot \theta^{*\perp} = 0$, i.e. $\rho^* = 1 \Leftrightarrow x \notin (z, \theta^*)$. Dans le cas $x = z + \alpha\theta^*$ avec $\alpha \neq 0$, alors $d''(\ell) = \frac{d^2\theta}{d\ell^2} d'(\ell) \left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^{-1} - \left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 (x - z) \cdot \theta$. Par conséquent, $d''(\ell^*) = -\left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 \alpha \neq 0$, donc $\rho^* = 2$.

c) Si $\Gamma = \Gamma_c(r, \delta\Theta)$. Pour $(\theta, s) \in \Gamma$, $\varphi(\theta, s) = x \cdot \theta - r$. Si $x = 0$ alors φ est constante sur Γ et donc $\rho^* = \infty$. Sinon, $d'(\ell) = \frac{d\theta}{d\ell} x \cdot \theta^\perp$ avec $\frac{d\theta}{d\ell} \neq 0$, et donc $d'(\ell^*) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \theta^\perp = 0$, i.e. $\rho^* = 1 \Leftrightarrow x \notin (0, \theta^*)$. Dans le cas contraire, $x = \alpha\theta^*$ avec $\alpha \neq 0$, $d''(\ell) = \frac{d^2\theta}{d\ell^2} x \cdot \theta^\perp - \left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 x \cdot \theta$, puis $d''(\ell^*) = -\left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 \alpha \neq 0$, donc $\rho^* = 2$.

d) Si $\Gamma = \Gamma_d(\beta, [s_0, s_1])$. Pour $(\theta, s) \in \Gamma$, $\varphi(\theta, s) = x \cdot \beta - s$, puis $d'(\ell) = -\frac{ds}{d\ell} \neq 0$, donc $\rho^* = 1$. \square

2.4. Application. La structure supposée de P permet de reconstruire une partie de la scène.

Admettons que l'on dispose d'un moyen de segmentation performant pour partitionner l'image P , et ainsi déterminer les courbes de \mathcal{G} . Alors on connaît les courbes de la forme $\Gamma_a(z, \delta\Theta)$ et de la forme $\Gamma_b(z, \delta\Theta)$. Elles sont de type $\Gamma : s = s(\theta), \theta \in \delta\Theta$, avec

$$z(\theta) = s(\theta)\theta + \frac{ds(\theta)}{d\theta}\theta^\perp.$$

En connaissant Γ , on connaît $s(\theta)$; la pente $\frac{ds}{d\theta}$ de la tangente à Γ peut être déduite par dérivation numérique de s . Ceci permet donc de remonter à z .

Ces considérations d'ordre géométrique fournissent un moyen de reconstruction des courbes $z(\theta), \theta \in \delta\Theta$, à l'origine des courbes de type a), et des points isolés z à l'origine des courbes de type b). Cette méthode peut être considérée comme complémentaire à la reconstruction par tomographie réflective. Elle est plus simple à comprendre, mais plus difficile à mettre en œuvre : la difficulté a été déplacée dans le problème de segmentation de P . Nous verrons que RFBP permet en fait de mettre en évidence les mêmes points, mais sans avoir à segmenter.

3. ASYMPTOTIQUE MONO-FRÉQUENTIELLE

3.1. Motivation. En proposant un schéma de preuve du résultat principal de cet article, on met en évidence le rôle de la contribution de la fréquence $\lambda > 0$:

$$h(x; \lambda) := \int P(\theta, s) \cos(\lambda\varphi(\theta, s)) ds d\theta.$$

En effet, pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$ et toute fréquence $\Omega > 0$, RFBP est :

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \int P(\theta, s) \int_0^1 \psi(\sigma) \cos(\Omega\sigma(x \cdot \theta - s)) d\sigma ds d\theta = \int_0^1 \psi(\sigma) h(x; \Omega\sigma) d\sigma.$$

Le problème posé est donc celui de l'étude asymptotique de la $h(x; \cdot)$ -transform de ψ , à x fixé. Le résultat est conditionné par le comportement de $h(\lambda) = h(x; \lambda)$, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

La première difficulté pour obtenir le développement provient de l'annulation de σ sur l'intervalle d'intégration. On isolera cette difficulté à l'aide d'un neutraliseur ν de 0 :

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = I_\nu(x; \Omega) + I_{1-\nu}(x; \Omega), \text{ où :}$$

$$I_\nu(x; \Omega) := \int_0^1 \psi(\sigma) \nu(\sigma) h(\Omega\sigma) d\sigma, \quad I_{1-\nu}(x; \Omega) := \int_0^1 \psi(\sigma) (1 - \nu)(\sigma) h(\Omega\sigma) d\sigma.$$

Pour $I_{1-\nu}(x; \Omega)$, σ reste minoré par une constante > 0 sur l'intervalle d'intégration ; le développement s'obtiendra donc en remplaçant $h(\Omega\sigma)$ par son développement asymptotique. Pour $I_\nu(x; \Omega)$, en utilisant la méthode des transformées de Mellin, présentée dans l'Annexe B, on obtiendra un résultat de la forme :

$$I_\nu(x; \Omega) = - \sum \text{Res} (\Omega^{-z} M[\psi\nu, 1 - z] M[h, z]), \quad (3.1)$$

où $M[\psi\nu, 1 - z]$ et $M[h, z]$ sont des prolongements méromorphes (ou holomorphes) de transformées de Mellin. Le prolongement de $M[h, z]$ dépend du comportement de h à l'infini, sachant en particulier qu'une fonction oscillante, resp. à décroissance algébrique, conduit à un prolongement holomorphe, resp. méromorphe. En somme, à la fois pour I_ν et pour $I_{1-\nu}$, le comportement asymptotique de h à l'infini doit être connu. C'est l'objet de cette section.

3.2. Décomposition sur les bords du découpage. On décompose $h(x; \lambda)$ à l'aide d'intégrales sur les courbes de \mathcal{G} , par formule de divergence.

Le gradient $\nabla\varphi(\theta, s) = (x \cdot \theta^\perp, -1)$ ne s'annule jamais, d'où la formule de divergence :

Lemme 3.1. *Soient $\Sigma \in \{\Sigma_i\}$, de normale unitaire extérieure ν_Σ , g une fonction régulière sur Σ et C une constante. Alors*

$$\int_\Sigma g \cos(\lambda\varphi + C) = \lambda^{-1} \int_{\partial\Sigma} g \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \cdot \nu_\Sigma \cos(\lambda\varphi + C - \frac{\pi}{2}) - \lambda^{-1} \int_\Sigma \nabla \cdot \left[g \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \right] \cos(\lambda\varphi + C - \frac{\pi}{2}).$$

Démonstration. On a l'identité :

$$\lambda g \cos(\lambda\varphi + C) = \nabla \cdot \left[g \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \cos(\lambda\varphi + C - \frac{\pi}{2}) \right] - \nabla \cdot \left[g \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \right] \cos(\lambda\varphi + C - \frac{\pi}{2}),$$

puis en intégrant :

$$\int_\Sigma g \cos(\lambda\varphi + C) = \lambda^{-1} \int_\Sigma \nabla \cdot \left[g \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \cos(\lambda\varphi + C - \frac{\pi}{2}) \right] - \lambda^{-1} \int_\Sigma \nabla \cdot \left[g \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} \right] \cos(\lambda\varphi + C - \frac{\pi}{2}),$$

d'où le résultat par formule de divergence sur le premier terme du membre de droite. \square

La contribution d'un morceau Σ sur lequel P est régulière, est une intégrale oscillante double, avec phase φ . En itérant la formule de la divergence, on la développe à l'aide d'intégrales de bord :

Lemme 3.2. *Soient $\Sigma \in \{\Sigma_i\}$ et $h_\Sigma(x; \lambda) = \int_\Sigma P(\theta, s) \cos(\lambda\varphi(\theta, s)) ds d\theta$. Pour tout entier $N \geq 1$,*

$$h_\Sigma(x; \lambda) = - \sum_{j=1}^N (-\lambda)^{-j} \int_{\partial\Sigma} H_{\Sigma,j} \cdot \nu_\Sigma \cos(\lambda\varphi - j\frac{\pi}{2}) dl + (-\lambda)^{-N} \int_\Sigma g_{\Sigma,N} \cos(\lambda\varphi - N\frac{\pi}{2}) ds d\theta,$$

avec $g_{\Sigma,0} = P|_\Sigma$, $H_{\Sigma,j} = g_{\Sigma,j-1} \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2}$, $g_{\Sigma,j} = \nabla \cdot H_{\Sigma,j}$, et ν_Σ est la normale extérieure à Σ .

On en déduit un développement asymptotique de $h(x; \lambda)$ en fonction d'intégrales sur les courbes du découpage de P :

Proposition 3.3. *Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier $N \geq 1$, la contribution de la fréquence $\lambda > 0$ vérifie :*

$$h(x; \lambda) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} \sum_{1 \leq j \leq N-1} \lambda^{-j} \int_\Gamma H_{\Gamma,j} \cos(\lambda\varphi - j\frac{\pi}{2}) dl + \mathcal{O}(\lambda^{-N}), \quad (3.2)$$

où, sur chaque courbe $\Gamma \in \mathcal{G}$ du découpage (Σ_i) , les $H_{\Gamma,j}$ sont des fonctions régulières.

Démonstration. On décompose h à l'aide du découpage (Σ_i) : $h = \sum_{\Sigma \in \{\Sigma_i, i\}} h_\Sigma$. On applique la formule de divergence itérée sur chaque Σ ; le dernier terme (intégrale sur Σ) et le dernier terme de la somme (indice $j = N$) sont $\mathcal{O}(\lambda^{-N})$. Donc :

$$h(x; \lambda) = - \sum_{\Sigma \in \{\Sigma_i, i\}} \sum_{1 \leq j \leq N-1} (-\lambda)^{-j} \int_{\partial \Sigma} H_{\Sigma, j} \cdot \nu_\Sigma \cos(\lambda \varphi - j \frac{\pi}{2}) d\ell + \mathcal{O}(\lambda^{-N}).$$

Chaque intégrale sur $\partial \Sigma$ est somme d'intégrales sur des courbes $\Gamma \in \mathcal{G}$. En réarrangeant les termes, on obtient au total une somme indexée par $\Gamma \in \mathcal{G}$. Si $\Gamma \subset \partial D$, est de type c) ou d), alors on pose $H_{\Gamma, j} := (-1)^{j+1} H_{\Sigma, j} \cdot \nu_\Sigma$. Sinon, Γ , de type a) ou b), est une partie de l'interface $\partial \Sigma \cap \partial \tilde{\Sigma}$ entre $\Sigma \neq \tilde{\Sigma}$, et on pose $H_{\Gamma, j} := (-1)^{j+1} (H_{\Sigma, j} \cdot \nu_\Sigma + H_{\tilde{\Sigma}, j} \cdot \nu_{\tilde{\Sigma}})$; ce terme représente un saut à travers Γ ($\nu_\Sigma + \nu_{\tilde{\Sigma}} = 0$). \square

Pour unifier les deux cas rencontrés dans la preuve, on peut convenir de prolonger les fonctions par 0 en dehors de D pour définir un saut $[\cdot]$:

Notation. Soit $\Gamma \in \mathcal{G}$ et F une fonction régulière sur les morceaux Σ_i .

a-b) Soit Γ , de type a) ou b), est interface entre Σ et $\tilde{\Sigma}$, de normale ν_Σ , pointant de Σ vers $\tilde{\Sigma}$. Le saut de F à travers Γ , selon ν_Σ , est la fonction définie sur Γ par $[F](\theta, s) = F|_{\tilde{\Sigma}}(\theta, s) - F|_{\Sigma}(\theta, s)$.

c-d) Soit $\Gamma \subset \partial D$, de type c) ou d), est portion du bord d'un morceau Σ , de normale extérieure ν_Σ . Par convention, le saut de F à travers Γ est la fonction définie sur Γ par $[F](\theta, s) = -F|_{\Sigma}(\theta, s)$.

Remarque. Ainsi, pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}$: $H_{\Gamma, 1} = -[P] \frac{\nabla \varphi \cdot \nu_\Sigma}{|\nabla \varphi|^2}$. \blacksquare

Le développement asymptotique (3.2) n'est pas très exploitable en l'état. Pour aller plus loin, on développe chaque terme

$$h_{\Gamma, j}(x; \lambda) = \lambda^{-j} \int_{\Gamma} H_{\Gamma, j} \cos(\lambda \varphi - j \frac{\pi}{2}) d\ell,$$

avec reste $\mathcal{O}(\lambda^{-N})$, $1 \leq j \leq N-1$. Comme $\lambda^j h_{\Gamma, j}$ est une intégrale uni-dimensionnelle, de type cos-transform, avec phase $\tilde{\varphi}(\ell) = \varphi(\theta(\ell), s(\ell))$, on va utiliser les formules de phase stationnaire, obtenues dans l'Annexe A. Une attention particulière est donc portée sur les points d'annulation de phase ou de sa dérivée.

3.3. Annulation de la phase ou de sa dérivée. On traduit géométriquement ce que signifient les conditions d'annulation de la phase, ou de ses dérivées successives, ponctuellement, ou sur tout un intervalle.

Dans l'espace des (θ, s) , la condition d'annulation de phase en (θ^*, s^*) signifie que Γ intersecte C_0 , et la condition de stationnarité de la phase en (θ^*, s^*) signifie que l'ordre du contact de Γ avec $C_{\varphi(\theta^*, s^*)}$ est $\rho^* \geq 2$. On peut traduire ce que signifient ces conditions pour le point x dans l'espace de la scène :

Proposition 3.4. Soient $\Gamma \in \mathcal{G}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$, et $z^* = y(\theta^*, s^*)$, le point visible de la scène associé. Alors φ s'annule en (θ^*, s^*) , si, et seulement si, x est sur la droite $(z^*, \theta^{*\perp})$.

Démonstration. Évident : par définition de z^* , $z^* \cdot \theta^* = s^*$, donc $x \cdot \theta^* - s^* = 0 \Leftrightarrow (x - z^*) \cdot \theta^* = 0$. \square

Proposition 3.5. Soient $\Gamma \in \mathcal{G}$, $x \in \mathbb{R}^2$, et $(\theta^*, s^*) = (\theta(\ell^*), s(\ell^*)) \in \Gamma$.

- Si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$, alors ℓ^* est un point stationnaire de $\tilde{\varphi}$, si, et seulement si, x est sur la droite normale à l'objet en $z(\theta^*)$, d'origine $z(\theta^*)$ et dirigée par $\theta^* : (z(\theta^*), \theta^*)$;
- si $\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$, alors ℓ^* est un point stationnaire de $\tilde{\varphi}$, si, et seulement si, x est sur la droite d'origine z^* et dirigée par $\theta^* : (z^*, \theta^*)$;
- si $\Gamma = \Gamma_c(r, \delta\Theta)$, alors ℓ^* est un point de stationnaire de $\tilde{\varphi}$, si, et seulement si, x est sur la droite d'origine 0 et dirigée par $\theta^* : (0, \theta^*)$;
- si $\Gamma = \Gamma_d(\beta, [s_0, s_1])$, alors $\tilde{\varphi}$ ne possède pas de point stationnaire.

Démonstration. Conséquence directe de Proposition 2.8 : on retient les cas $\rho^* \geq 2$. \square

On en déduit les conditions pour que la phase soit constante le long d'un morceau de courbe singulière :

Proposition 3.6. Soient $\Gamma \in \mathcal{G}$, $x \in \mathbb{R}^2$, et $L \subset [0, |\Gamma|]$ un intervalle.

- a) Si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$, $\tilde{\varphi}$ est constante sur L , si, et seulement si, x est dans l'intersection de toutes les droites normales $(z(\theta), \theta)$, $\ell \in L$; ceci équivaut à : $z(\theta), \ell \in L$, parcourt un morceau de cercle de centre x ;
- b) si $\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$, alors $\tilde{\varphi}$ est constante sur L , si, et seulement si, $x = z^*$;
- c) si $\Gamma = \Gamma_c(r, [s_0, s_1])$, alors $\tilde{\varphi}$ est constante sur L , si, et seulement si, $x = 0$;

Démonstration. $\tilde{\varphi}$ est constante sur L , si et seulement si, $\tilde{\varphi}' \equiv 0$ sur L , i.e. chaque point $\ell \in L$ est un point stationnaire. On applique alors le lemme de stationnarité de $\tilde{\varphi}$ en chaque ℓ ; on obtient les différentes conditions sur x par intersection.

Enfin, pour le cas a), si $z(\theta), \ell \in L$, parcourt un morceau de cercle de centre x , alors évidemment, x est dans l'intersection de tous les rayons $(z(\theta), \theta)$, $\ell \in L$. Réciproquement, si x est dans l'intersection de toutes les droites normales $(z(\theta), \theta)$, $\ell \in L$, on écrit $z(\theta) - x = \alpha(\theta)\theta$, et l'on dérive dans la direction θ : $\dot{z}(\theta) \cdot \theta = \dot{\alpha}(\theta)$. Or $\dot{z} \perp \theta$, donc $\dot{\alpha}(\theta) = 0$ puis α est constante. \square

Remarque. Pour les courbes Γ de type b) ou c), φ est constante sur une portion $\tilde{\Gamma} = \{(\theta(\ell), s(\ell)), \ell \in L\} \subset \Gamma$ si, et seulement si, φ est constante sur Γ tout entier. \blacksquare

Définition 3.7. L'ensemble des points génériques est l'ensemble $E_{\mathcal{G}} \subset \mathbb{R}^2$ des points x tels que : pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}$, soit φ est constante sur Γ tout entier, soit l'ordre d'annulation de $\tilde{\varphi} - \varphi(\theta^*, s^*)$ est un entier fini ρ^* , en tout point $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$.

Les éventuels points $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E_{\mathcal{G}}$ ("non génériques") sont tels que : il existe une courbe $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$, telle que, φ n'est pas constante sur l'intégralité de Γ , et pour un certain point $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$, $\rho^* = \infty$, et donc x est le centre de courbure $x(\theta^*)$ de la courbe $z(\theta)$, en θ^* . Le plus souvent, $\mathbb{R}^2 \setminus E_{\mathcal{G}}$ est vide, ou en tout cas, contient peu de points. Pour simplifier, nous cherchons à déterminer le développement asymptotique uniquement en les points génériques $x \in E_{\mathcal{G}}$; les points non génériques sont ainsi exclus de l'étude. Celà permet de tirer profit de la partition suivante :

Définition 3.8. Pour $x \in E_{\mathcal{G}}$, l'ensemble $\mathcal{G}_x^* := \{\Gamma \in \mathcal{G} : \varphi|_{\Gamma} \text{ n'est pas constante}\}$ est l'ensemble des courbes de \mathcal{G} où l'ordre ρ^* est fini en tout point ; les courbes de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*$ sont les courbes de \mathcal{G} à phase constante.

On étudie successivement les contributions des courbes de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*$ puis celles des courbes de \mathcal{G}_x^* .

3.4. Courbe singulière à phase constante. La contribution d'une courbe singulière sur laquelle la phase est constante est donnée par le résultat suivant.

Proposition 3.9. Soient $\Gamma \in \mathcal{G}$, $x \in E_{\mathcal{G}}$, $\lambda > 0$, $j \geq 1$.

- a) Si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$ est telle que φ est une constante Φ sur Γ , i.e. $z(\theta), \theta \in \delta\Theta$ parcourt un morceau de cercle de centre x , alors le rayon du cercle est $|\Phi| > 0$ et $h_{\Gamma,j}(x; \lambda)$ est oscillante en λ :

$$h_{\Gamma,j}(x; \lambda) = \lambda^{-j} \kappa_{\Gamma,j} s_{\Gamma,j}(\lambda), \quad s_{\Gamma,j}(\lambda) := \cos(\lambda\Phi - j\frac{\pi}{2}), \quad \kappa_{\Gamma,j} := \int_{\Gamma} H_{\Gamma,j} d\ell;$$

- b) si $\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$, de phase φ constante, i.e. $x = z^*$, alors $\varphi \equiv 0$ et $h_{\Gamma,j}$ est à décroissance algébrique :

$$h_{\Gamma,j}(x; \lambda) = \lambda^{-j} \kappa_{\Gamma,j} s_{\Gamma,j}, \quad s_{\Gamma,j} := \cos(j\frac{\pi}{2}), \quad \kappa_{\Gamma,j} := \int_{\Gamma} H_{\Gamma,j} d\ell;$$

- c) si $\Gamma = \Gamma_c(r, \delta\Theta)$, avec phase φ constante, i.e. $x = 0$, alors $\varphi \equiv \Phi = -r$ et $h_{\Gamma,j}$ est oscillante :

$$h_{\Gamma,j}(x; \lambda) = \lambda^{-j} \kappa_{\Gamma,j} s_{\Gamma,j}(\lambda), \quad s_{\Gamma,j}(\lambda) := \cos(\lambda\Phi - j\frac{\pi}{2}), \quad \kappa_{\Gamma,j} := \int_{\Gamma} H_{\Gamma,j} d\ell;$$

- d) si $\Gamma = \Gamma_d(\beta, [s_0, s_1])$, alors $h_{\Gamma,j}(x; \lambda)$ ne contient pas de contribution de phase φ constante sur toute une portion.

Démonstration. D'une manière générale, la contribution d'indice j associée à une courbe Γ sur laquelle la phase φ est une constante Φ est :

$$h_{\Gamma,j}(x; \lambda) = \lambda^{-j} \int_{\Gamma} H_{\Gamma,j} \cos(\lambda\varphi - j\frac{\pi}{2}) d\ell = \lambda^{-j} \cos(\lambda\Phi - j\frac{\pi}{2}) \int_{\Gamma} H_{\Gamma,j} d\ell.$$

Dans chaque cas, on applique la Proposition 3.6 pour traduire la condition de phase constante en une condition sur x . Puis, on précise la valeur de la constante. Dans le cas a), la constante est $\Phi = (x - z(\theta)) \cdot \theta$ et vaut, en valeur absolue, le rayon du cercle parcouru par $z(\theta)$. Dans le cas b), la phase est $\Phi = (x - z^*) \cdot \theta = 0$. Dans le cas c), la phase est $\Phi = 0 \cdot \theta - r = -r$. Enfin, $\lambda \mapsto \cos(\lambda\Phi - j\frac{\pi}{2})$ est une fonction oscillante si $\Phi \neq 0$, et constante sinon. \square

En annexe, la Proposition C.1 précise les contributions principales.

3.5. Points singuliers avec contact d'ordre fini. On détermine la contribution des points des courbes singulières où le contact avec une sinusoïde, ligne de niveau de φ , est d'ordre fini.

Par Corollaire A.2, pour une courbe $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$ à phase non constante, on obtient le développement de $h_{\Gamma,j}(x; \lambda)$ par sommation des contributions en provenance des points critiques : extrémités de Γ et points intérieurs de phase stationnaire. En toute rigueur, on doit s'assurer au préalable que le nombre de points critiques est fini. Ceci motive l'introduction des ensembles suivants :

Définition 3.10. Pour $x \in E_{\mathcal{G}}$, les points critiques de $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$ décrivent l'ensemble

$$\Gamma_x^* := \{(\theta(\ell^*), s(\ell^*)), \ell^* = 0, |\Gamma|\} \cup \{(\theta(\ell^*), s(\ell^*)) \in \Gamma : \tilde{\varphi}'(\ell^*) = 0, 0 < \ell^* < |\Gamma|\}.$$

L'ensemble des points génériques pour lesquels le nombre total de points critiques est fini est :

$$E_{\mathcal{G}}^* := \{x \in E_{\mathcal{G}} : \forall \Gamma \in \mathcal{G}_x^*, \Gamma_x^* \text{ est fini}\}.$$

Le résultat suivant montre que si $E_{\mathcal{G}} \setminus E_{\mathcal{G}}^*$ est non vide, il ne contient que des points très spécifiques :

Proposition 3.11. $x \in E_{\mathcal{G}} \setminus E_{\mathcal{G}}^*$ équivaut à : il existe une courbe $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta) \in \mathcal{G}_x^*$, tel que l'ensemble des $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$ avec x appartenant au rayon normal $(z(\theta^*), \theta^*)$ est infini.

Démonstration. Soit $x \in E_{\mathcal{G}}$. Soit $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$; alors Γ n'est pas de type d). Γ comporte deux extrémités. Si Γ est de type b) ou c), Γ possède au plus deux points stationnaires : à x fixé, la condition de stationnarité porte sur l'angle θ^* (Propositions 3.5 et 3.6). La seule possibilité pour que Γ_x^* soit infini est donc que Γ soit de type a), avec infinité de points stationnaires; puis l'on traduit la condition de stationnarité de Proposition 3.5. \square

Pour des raisons techniques, on propose donc de déterminer les développements asymptotiques uniquement en les points $x \in E_{\mathcal{G}}^*$; on élimine de l'étude les points de $E_{\mathcal{G}} \setminus E_{\mathcal{G}}^*$, s'ils existent.

Proposition 3.12. Soient $x \in E_{\mathcal{G}}^*$, $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$, et $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$, un point critique avec ordre de contact fini $\rho^* \geq 1$. Pour $1 \leq j \leq N-1$, dans $h_{\Gamma,j}(x; \lambda)$, la contribution de (θ^*, s^*) est de la forme :

$$h_{\Gamma,j}^*(x; \lambda) = \sum_{0 \leq n \leq (N-j)\rho^* - 2} K_n^* \lambda^{-j - \frac{n+1}{\rho^*}} \kappa_{j,n}^* s_{j,n}^*(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{-N}),$$

où $K_n^* = \frac{1}{n! \rho^*} \Gamma[(n+1)/\rho^*]$, les $\kappa_{j,n}^*$ sont des constantes et les fonctions $s_{j,n}^*(\lambda)$ sont oscillantes ou constantes. Au total,

$$h_{\Gamma,j}(x; \lambda) = \sum_{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^*} h_{\Gamma,j}^*(x; \lambda).$$

Démonstration. $h_{\Gamma,j}$ est une intégrale oscillante, de phase $\tilde{\varphi}(\ell) = \varphi(\theta(\ell), s(\ell))$, où $\ell \in [0, |\Gamma|]$ est l'abscisse curviligne. Par Corollaire A.2, $h_{\Gamma,j}$ est superposition de contributions de points critiques $(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^*$. On examine la contribution d'un point $(\theta^*, s^*) = (\theta(\ell^*), s(\ell^*))$. On pose $d(\ell) = \tilde{\varphi}(\ell) - \tilde{\varphi}(\ell^*)$, d'ordre d'annulation ρ^* en ℓ^* .

Pour définir les $\kappa_{j,n}^* s_{j,n}^*(\lambda)$, on introduit : $\varepsilon^* = \text{sign } \tilde{\varphi}^{(\rho^*)}(\ell^*)$, $k_{j,n}^* := k_j^{*(n)}(0)$, $l_{j,n}^* := l_j^{*(n)}(0)$, où : dans un voisinage à droite de ℓ^* , $u^{\rho^*} := \varepsilon^* d(\ell)$ et $k_j^*(u) := H_{\Gamma,j}^+ \frac{d\ell}{du}$, et dans un voisinage à gauche de ℓ^* , $v^{\rho^*} := (-1)^{\rho^*} \varepsilon^* d(\ell)$ et $l_j^*(v) := H_{\Gamma,j}^- \frac{d\ell}{dv}$. L'exposant \pm insiste sur le fait que l'on doit considérer les fonctions $H_{\Gamma,j}(\theta(\ell), s(\ell))$ et $\tilde{\varphi}(\ell)$, à droite du point ℓ^* ($\ell \geq \ell^*$), resp. à gauche ($\ell \leq \ell^*$). Si (θ^*, s^*) est l'extrémité gauche ($\ell^* = 0$), resp. droite ($\ell^* = |\Gamma|$), de Γ , on pose $\kappa_{j,n}^* = k_{j,n}^*$, resp. $\kappa_{j,n}^* = -l_{j,n}^*$; si (θ^*, s^*) est intérieur ($0 < \ell^* < |\Gamma|$), on pose $\kappa_{j,n}^* = 2k_{j,n}^*$. Il reste à préciser davantage les $s_{j,n}^*(\lambda)$, au cas par cas.

Extrémités Soit (θ^*, s^*) est l'extrémité gauche, resp. droite, de Γ .

Soit $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, *i.e.* C_0 intersecte Γ en (θ^*, s^*) , *i.e.* $x \in (y(\theta^*, s^*), \theta^{*\perp})$. Dans ce cas, $s_{j,n}^*(\lambda)$ est constante : $s_{j,n}^*(\lambda) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{n+1-j\varepsilon^*\rho^*}{\rho^*}\right)$, resp. $s_{j,n}^*(\lambda) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{n+1-j(-1)^{\rho^*}\varepsilon^*\rho^*}{\rho^*}\right)$. Lorsque $n = (m + j\varepsilon^*)\rho^* - 1$, resp. $n = (m + j(-1)^{\rho^*}\varepsilon^*)\rho^* - 1$, avec m un entier (relatif) impair, $s_{j,n}^* \equiv 0$.

Soit $\varphi(\theta^*, s^*) \neq 0$, *i.e.* C_0 n'intersecte pas Γ en (θ^*, s^*) , *i.e.* $x \notin (y(\theta^*, s^*), \theta^{*\perp})$. $s_{j,n}^*(\lambda)$ est oscillante : $s_{j,n}^*(\lambda) = \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*) + \alpha_{jn}^*)$ avec $\alpha_{jn}^* = \frac{\varepsilon^*(n+1)\pi}{2\rho^*} - j\frac{\pi}{2}$, resp. $\alpha_{jn}^* = \frac{(-1)^{\rho^*}\varepsilon^*(n+1)\pi}{2\rho^*} - j\frac{\pi}{2}$.

Point intérieur de phase stationnaire et nulle Soit (θ^*, s^*) est un point intérieur de phase nulle et stationnaire : $\varphi(\theta^*, s^*) = \tilde{\varphi}'(\ell^*) = 0$. Ceci est équivalent à : C_0 et Γ sont tangentes en (θ^*, s^*) avec contact $\rho^* \geq 2$. Dans ce cas, $s_{j,n}^*$ est une constante, éventuellement nulle.

Si ρ^* est pair, alors $s_{j,n}^* = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{n+1-j\varepsilon^*\rho^*}{\rho^*}\right) \mathbb{1}_{n=2p}$, constante qui est nulle si n est impair. Si ρ^* est impair, alors $s_{j,n}^* = (-1)^{j/2} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2\rho^*}\right) \mathbb{1}_{n=2p, j=2q} + (-1)^{(j-1)/2} \varepsilon^* \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2\rho^*}\right) \mathbb{1}_{n=2p+1, j=2q+1}$. Le premier terme est nul si $n = m\rho^* - 1$ avec m impair, et le deuxième est nul si $n = m\rho^* - 1$ avec m pair.

Point intérieur de phase stationnaire et non nulle Soit $(\theta^*, s^*) \in \Gamma$ un point intérieur de phase non nulle et stationnaire : $\varphi(\theta^*, s^*) \neq 0$ et $\tilde{\varphi}'(\ell^*) = 0$. Ceci équivaut à : Γ est tangente à C_Φ en (θ^*, s^*) , avec $\Phi = \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0$; le contact est d'ordre $\rho^* \geq 2$. Dans ce cas, $s_{j,n}^*(\lambda)$ est oscillante, sous la forme : $s_{j,n}^*(\lambda) = S_{jn}^* \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*) + \alpha_{jn}^*)$ avec amplitude S_{jn}^* et déphasage α_{jn}^* .

Si ρ^* est pair, $s_{j,n}(\lambda) = S_{jn}^* \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*) + \alpha_{jn}^*)$ avec $S_{jn}^* = \mathbb{1}_{n=2p}$ et $\alpha_{jn}^* = \frac{\varepsilon^*(n+1)\pi}{2\rho^*} - j\frac{\pi}{2}$; seuls les termes d'indice n pair contribuent. Si ρ^* est impair, $s_{j,n}(\lambda) = \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2\rho^*}\right) \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*) - j\frac{\pi}{2}) \mathbb{1}_{n=2p} - \varepsilon^* \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2\rho^*}\right) \sin(\lambda\varphi(\theta^*, s^*) - j\frac{\pi}{2}) \mathbb{1}_{n=2p+1}$. Ici, la contribution du terme d'indice pair $n = 2p$ s'annule si $n = (2m+1)\rho^* - 1$, tandis que celle du terme d'indice impair $n = 2p+1$ s'annule si $n = 2m\rho^* - 1$ (avec m un entier relatif). \square

En annexe, les Propositions C.2-C.6 précisent la forme des contributions principales au cas par cas; elles sont obtenues en choisissant $j = 1$ et $n = 0$.

3.6. Bilan. En sommant les différentes contributions des points critiques isolés et des courbes à phase constante, on aboutit au théorème suivant :

Théorème 3.13 (Asymptotique mono-fréquentielle). *Soient $x \in E_G^*$ et $N \geq 1$. La contribution de la fréquence $\lambda > 0$ est de la forme :*

$$h(x; \lambda) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^* \\ 1 \leq j \leq N-1}} \lambda^{-j} \kappa_{\Gamma, j} s_{\Gamma, j}(\lambda) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_x^*} \sum_{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^*} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq (N-j)\rho^* - 2}} K_n^* \lambda^{-j - \frac{n+1}{\rho^*}} \kappa_{j,n}^* s_{j,n}^*(\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{-N}), \quad (3.3)$$

avec les $\kappa_{\Gamma, j} s_{\Gamma, j}(\lambda)$ et les $K_n^* \kappa_{j,n}^* s_{j,n}^*(\lambda)$ définis dans les Propositions 3.9 et 3.12.

En regroupant les termes différemment, à une erreur de troncature près, $h(x; \lambda)$ est une combinaison linéaire de fonctions à décroissance algébrique et monotone et de fonctions oscillantes :

Corollaire 3.14 (Structure asymptotique mono-fréquentielle). *Soient $x \in E_G^*$ et $N \geq 1$. Alors, la contribution de la fréquence $\lambda > 0$ est de la forme :*

$$h(x; \lambda) = \sum_{1 \leq i \leq n_1} a_i \lambda^{-\eta_i} + \sum_{n_1+1 \leq i \leq n_2} a_i \lambda^{-\eta_i} \cos(\omega_i \lambda + C_i) + \mathcal{O}(\lambda^{-N}),$$

avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $a_i, C_i, \eta_i, \omega_i \in \mathbb{R}$, $\eta_i \geq 1$ ($\eta_i > 1$ si $n_1 \geq i$), $\omega_i \neq 0$, tous indépendants de λ .

Démonstration. Dans la première somme de la relation (3.3), si $\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$ et $x = z^*$, alors $s_{\Gamma, j} = \cos(j\pi/2)$ est constante; sinon, $s_{\Gamma, j}(\lambda) = \cos(\lambda\Phi - j\pi/2)$ avec $\Phi \neq 0$ la valeur prise par $\varphi|_\Gamma$. Dans la deuxième somme, si $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, $s_{j,n}^*$ est une constante; sinon, $s_{j,n}^*(\lambda) = S_{jn}^* \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*) + \alpha_{jn}^*)$ avec S_{jn}^* et α_{jn}^* deux réels indépendants de λ . On regroupe donc dans une même somme les termes

tels que $\varphi|_{\Gamma} \equiv \Phi = 0$ et les termes tels que $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$; on obtient la partie algébriquement décroissante :

$$\begin{aligned} \sum a_i \lambda^{-\eta_i} = & \sum_{\substack{\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^* \\ x = z^*}} \sum_{2 \leq j = 2p \leq N-1} \kappa_{\Gamma, j} (-1)^{j/2} \lambda^{-j} \\ & + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_x^*} \sum_{\substack{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^* \\ x \cdot \theta^* = s^*}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq (N-j)\rho^* - 2}} K_n^* \kappa_{j, n}^* S_{j, n}^* \lambda^{-j - \frac{n+1}{\rho^*}}. \end{aligned}$$

La somme des termes tels que $\varphi|_{\Gamma} \equiv \Phi \neq 0$ et des termes tels que $\varphi(\theta^*, s^*) \neq 0$ constitue la partie oscillante :

$$\begin{aligned} \sum a_i \lambda^{-\eta_i} \cos(\omega_i \lambda + C_i) = & \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*, \Gamma \neq \Gamma_b(x, \delta\Theta) \\ \varphi|_{\Gamma} \equiv \Phi \neq 0}} \sum_{1 \leq j \leq N-1} \kappa_{\Gamma, j} \lambda^{-j} \cos(\lambda \Phi - j\pi/2) \\ & + \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G}_x^* \\ \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0}} \sum_{\substack{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^* \\ \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq (N-j)\rho^* - 2}} K_n^* \kappa_{j, n}^* S_{j, n}^* \lambda^{-j - \frac{n+1}{\rho^*}} \cos(\lambda \varphi(\theta^*, s^*) + \alpha_{j, n}^*). \end{aligned}$$

□

À partir des résultats obtenus, pour toute courbe $\Gamma \in \mathcal{G}$, on peut déterminer les points $x \in E_{\mathcal{G}}^*$ en lesquels un ou plusieurs points de Γ contribuent dans (3.3). On représente schématiquement la forme des contributions obtenues dans les Figures 5-11. À gauche, dans le domaine des $(\theta, s) \in D$, on représente une courbe $\Gamma \in \mathcal{G}$ et un point $(\theta^*, s^*) = (\theta(\ell^*), s(\ell^*)) \in \Gamma$. À droite, on représente en gris une configuration pouvant conduire à une telle courbe; on trace en traits pointillés le rayon de projection associé à (θ^*, s^*) : $x \cdot \theta^* - s^* = 0$, *i.e.* $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$. Lorsqu'elle existe, on trace en pointillés la droite des points x pour lesquels la phase est stationnaire en ℓ^* , *i.e.* $\tilde{\varphi}'(\ell^*) = 0$; cette droite est dirigée par θ^* . Lorsque (θ^*, s^*) apporte une contribution en $x \in E_{\mathcal{G}}^*$, on indique entre parenthèses l'ordre ρ^* d'annulation de $\tilde{\varphi} - \varphi(\theta^*, s^*)$. Et on mentionne la nature de la contribution : *alg.* pour algébrique si x est sur la droite $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, *osc.* pour oscillante sinon.

3.7. Contributions algébriquement décroissantes. La partie algébriquement décroissante, en provenance des points critiques de phase nulle (*alg.* dans les Figures 5-11), jouera un rôle important. On précise donc ici l'ensemble \mathcal{S} des points x en lesquels une telle contribution algébrique apparaît.

Définition 3.15. On note \mathcal{S} l'ensemble des points $x \in E_{\mathcal{G}}^*$ pour lesquels il existe $\Gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*$ tel que $\varphi|_{\Gamma} \equiv 0$, ou il existe $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$ tel que $\Gamma_x^* \cap \{x \cdot \theta^* - s^* = 0\} \neq \emptyset$.

Remarque. Par définition même de \mathcal{S} , si $x \notin \mathcal{S}$, alors la partie algébriquement décroissante de la décomposition de $h(x; \lambda)$ est nulle. ■

Le résultat suivant donne une description géométrique de \mathcal{S} :

Proposition 3.16. L'ensemble \mathcal{S} s'écrit $\mathcal{S} = E_{\mathcal{G}}^* \cap (\mathcal{S}_a \cup \mathcal{T}_a \cup \mathcal{S}_b \cup \mathcal{T}_b \cup \mathcal{S}_c \cup \mathcal{T}_c \cup \mathcal{T}_d)$, où :

a) \mathcal{S}_a est l'ensemble des points à l'origine des courbes a , \mathcal{T}_a est l'ensemble des tangentes aux extrémités correspondant :

$$\mathcal{S}_a = \{z(\theta), \theta \in \delta\Theta, \Gamma_a(z, \delta\Theta) \in \mathcal{G}\}, \mathcal{T}_a = \{x \in (z(\theta_0), \theta_0^\perp) \cup (z(\theta_1), \theta_1^\perp), \Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1]) \in \mathcal{G}\};$$

b) \mathcal{S}_b est l'ensemble des points à l'origine des courbes b , \mathcal{T}_b est l'ensemble des droites de projection aux extrémités correspondant :

$$\mathcal{S}_b = \{z, \Gamma_b(z, \delta\Theta) \in \mathcal{G}\}, \mathcal{T}_b = \{x \in (z, \theta_0^\perp) \cup (z, \theta_1^\perp), \Gamma_b(z, [\theta_0, \theta_1]) \in \mathcal{G}\};$$

c) \mathcal{S}_c contient des portions du cercle $|x| = R$, \mathcal{T}_c est l'ensemble associé des tangentes aux extrémités :

$$\mathcal{S}_c = \{r\theta, \theta \in \delta\Theta, \Gamma_c(r, \delta\Theta) \in \mathcal{G}\}, \mathcal{T}_c = \{x : x \cdot \theta_0 = r \text{ ou } x \cdot \theta_1 = r, \Gamma_c(r, [\theta_0, \theta_1]) \in \mathcal{G}\};$$

d) \mathcal{T}_d est l'ensemble des droites associées aux extrémités des différents morceaux, pour le plus petit et le plus grand angle de Θ :

$$\mathcal{T}_d = \{x : x \cdot \beta \in \{s_0, s_1\}, \Gamma_d(\beta, [s_0, s_1]) \in \mathcal{G}\}$$

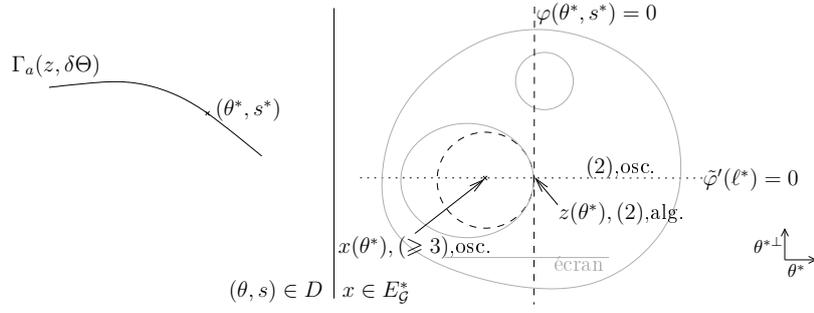


FIGURE 5. Un point intérieur (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma_a(z, \delta\Theta)$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$, si, et seulement si, x est sur la droite $(z(\theta^*), \theta^*)$. L'ordre ρ^* est maximal en $x(\theta^*)$, centre du cercle osculateur en $z(\theta^*)$ (traits pointillés).

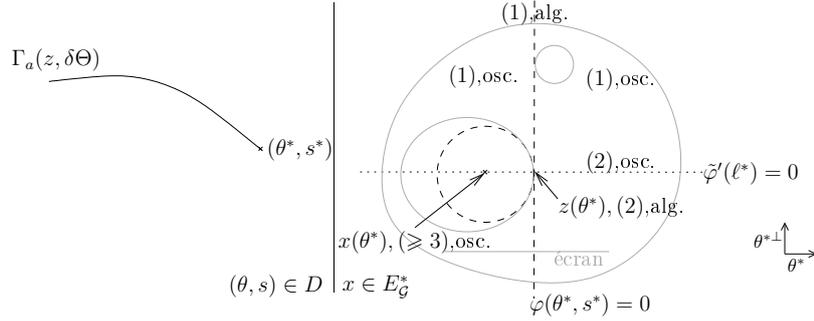


FIGURE 6. Une extrémité (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma_a(z, \delta\Theta)$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$ en tout $x \in E_{\mathcal{G}}^*$. En particulier : contributions algébriques, sur toute la droite $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$.

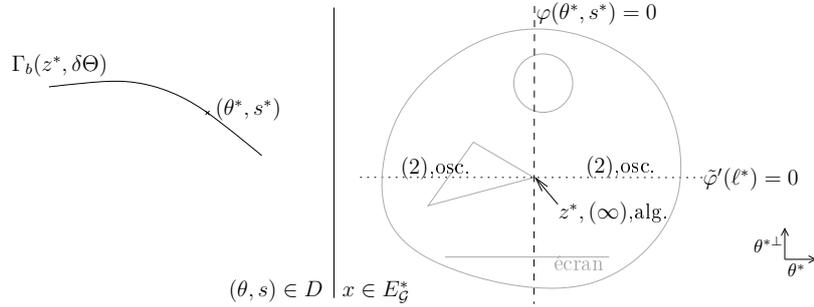


FIGURE 7. Un point intérieur (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$, si, et seulement si, x est sur la droite (z^*, θ^*) . L'ordre ρ^* est infini en z^* .

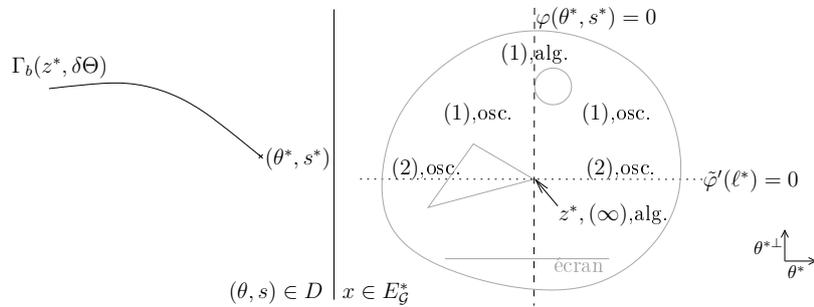


FIGURE 8. Une extrémité (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$ en tout $x \in E_{\mathcal{G}}^*$. En particulier : contributions algébriques, sur toute la droite $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$.

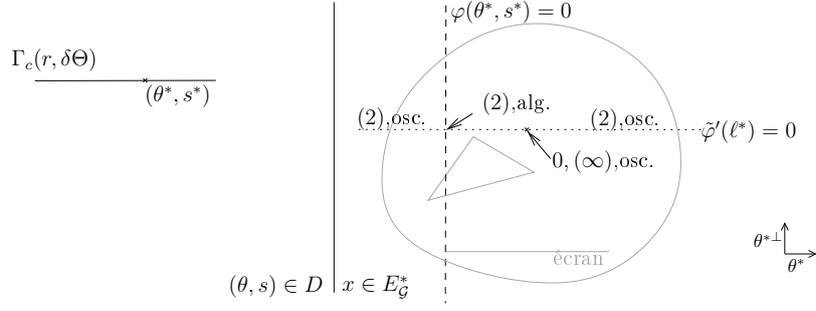


FIGURE 9. Un point intérieur (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma_c(r, \delta\Theta)$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$ si, et seulement si, x est sur la droite $(0, \theta^*)$.

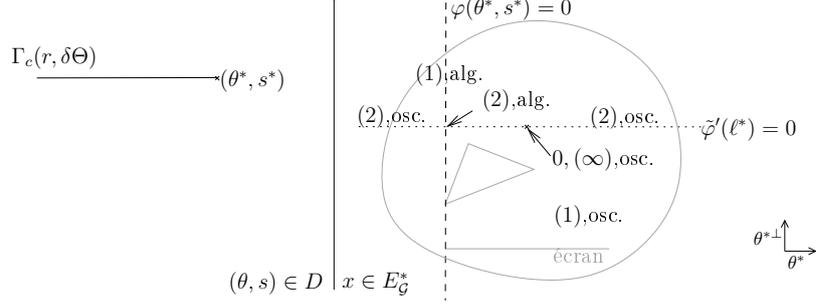


FIGURE 10. Une extrémité (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma_c(r, \delta\Theta)$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$ en tout $x \in E_G^*$. En particulier : contributions algébriques, sur toute la droite $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$.

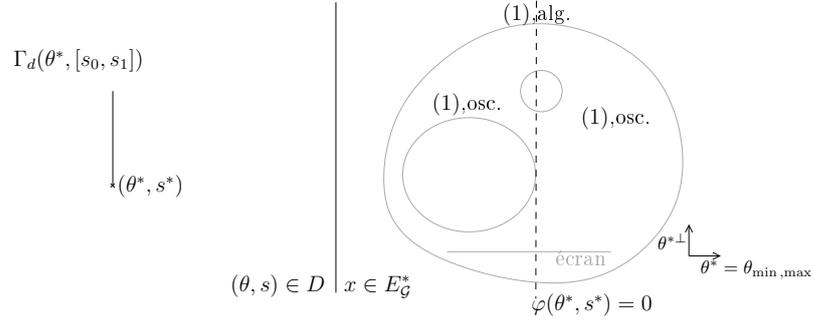


FIGURE 11. Une extrémité (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma = \Gamma_d(\theta^*, [s_0, s_1])$ apporte une contribution à $h(x; \lambda)$ en tout $x \in E_G^*$. En particulier : contributions algébriques, sur toute la droite $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$. Les points intérieurs d'un tel Γ ne contribuent pas.

Démonstration. Soit $x \in E_G^*$. En examinant les différentes possibilités de courbes et points critiques, on remarque que $x \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, x vérifie au moins une des conditions suivantes :

- $x = z(\theta^*)$ avec (θ^*, s^*) un point intérieur d'une courbe $\Gamma_a(z, \delta\Theta)$,
- $x \in (z(\theta^*), \theta^{*\perp})$ avec (θ^*, s^*) extrémité d'une courbe $\Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1])$,
- $x = z^*$ où z^* est un point visible sur une courbe $\Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$,
- $x \in (z^*, \theta^{*\perp})$ avec (θ^*, s^*) extrémité d'une courbe $\Gamma_b(z^*, [\theta_0, \theta_1])$,
- $x = r\theta^*$, avec (θ^*, r) point intérieur d'une courbe $\Gamma_c(r, \delta\Theta)$,
- $x \in (r\theta^*, \theta^{*\perp})$ avec (θ^*, r) extrémité d'une courbe $\Gamma_c(r, [\theta_0, \theta_1])$,
- $x \cdot \theta^* = s^*$, avec $\theta^* = \theta_{\min}, \theta_{\max}$ et (θ^*, s^*) extrémité de $\Gamma_d(\theta^*, [s_0, s_1])$.

□

4. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA RÉTROPROJECTION FILTRÉE RÉFLECTIVE

4.1. Résultat général. On détermine le développement multi-fréquentiel en fonction du filtre fréquentiel ψ , à partir de la structure du développement mono-fréquentiel.

Définition 4.1. Sur $[0, 1]$, un neutraliseur ν la borne 0, resp. 1, est une fonction $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ telle que : $\nu \equiv 1$ dans un voisinage de 0, resp. 1, et $\nu \equiv 0$ dans un voisinage de 1, resp. 0. La RFBP neutralisée associée est

$$I_\nu(x; \Omega) := \int_0^1 \psi(\sigma) \nu(\sigma) h(\Omega\sigma) d\sigma.$$

Proposition 4.2. Soient $x \in E_{\mathcal{G}}^*$, $N \geq 1$, et $\Omega > 0$; $h(x; \cdot)$ a la décomposition du Corollaire 3.14. Soit ν un neutraliseur de la fréquence $\sigma = 0$, et donc $1 - \nu$ neutraliseur de 1. On pose $\psi_{\eta, k-1} := \frac{d^{k-1}}{d\sigma^{k-1}} \frac{\psi(\sigma)}{\sigma^\eta} \Big|_{\sigma=1}$. Alors :

$$\begin{aligned} I_{1-\nu}(x; \Omega) &= \sum_{1 \leq i \leq n_1} a_i \Omega^{-\eta_i} M[\psi(1-\nu), 1-\eta_i] \\ &\quad + \sum_{n_1+1 \leq i \leq n_2} a_i \Omega^{-\eta_i} \sum_{1 \leq k < N-\eta_i} \frac{(-1)^{k-1}}{(\omega_i \Omega)^k} \cos(\omega_i \Omega + C_i - k \frac{\pi}{2}) \psi_{\eta_i, k-1} + \mathcal{O}_{\Omega \rightarrow \infty}(\Omega^{-N}). \end{aligned}$$

Démonstration. Dans le support de $1-\nu$, σ reste minoré par une constante > 0 , le développement est donc obtenu en remplaçant $h(x; \Omega\sigma)$ par son développement asymptotique. Grâce au Corollaire 3.14, on obtient un développement de $h(x; \Omega\sigma)$ avec reste $(\Omega\sigma)^{-N} R(\Omega\sigma)$, où $R(\lambda)$ est bornée si λ reste minoré par une constante > 0 . Par linéarité, il suffit d'obtenir un développement de chacun des termes. Un terme $\lambda^{-\eta}$, $1 \leq \eta < N$ provoque la contribution :

$$\int_0^1 \psi(1-\nu)(\Omega\sigma)^{-\eta} d\sigma = \Omega^{-\eta} M[\psi(1-\nu), 1-\eta].$$

Par IPP successives, un terme $\lambda^{-\eta} \cos(\omega\lambda + C)$, $\omega \neq 0$, $1 \leq \eta < N$ provoque à l'ordre N la contribution :

$$\int_0^1 \psi(1-\nu) \frac{\cos(\omega\Omega\sigma + C)}{(\Omega\sigma)^\eta} d\sigma = \frac{1}{\Omega^\eta} \sum_{1 \leq k < N-\eta} \frac{(-1)^{k-1}}{(\omega\Omega)^k} \cos(\omega\Omega + C - k \frac{\pi}{2}) \psi_{\eta, k-1} + \mathcal{O}(\Omega^{-N}).$$

Enfin, le terme de reste $\lambda^{-N} R(\lambda)$ provoque une contribution :

$$\int_0^1 \psi(1-\nu)(\Omega\sigma)^{-N} R(\Omega\sigma) d\sigma = \Omega^{-N} \int_0^1 \psi(1-\nu) \sigma^{-N} R(\Omega\sigma) d\sigma = \mathcal{O}(\Omega^{-N}).$$

□

Notation. L'ordre 0 de la transformée de Mellin $M[\cdot, z]$ au voisinage de $z = a$ est noté $M_0[\cdot, a]$. Ainsi, si $M[F, z]$ est holomorphe en a , $M_0[F, a] = M[F, a]$; si $M[F, z]$ est méromorphe et possède a pour pôle simple, de résidu $\text{Res}(M[F, z], a)$, alors $M_0[F, a] = \lim_{z \rightarrow a} M[F, z] - \frac{\text{Res}(M[F, z], a)}{z-a}$.

Proposition 4.3. Soient $x \in E_{\mathcal{G}}^*$, $N \geq 1$, et $\Omega > 0$; $h(x; \cdot)$ a la décomposition du Corollaire 3.14. Soit ν un neutraliseur de la fréquence $\sigma = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} I_\nu(x; \Omega) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq N-1 \\ k \notin \{\eta_i, 1 \leq i \leq n_1\}}} \Omega^{-k} M[h, k] \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ \eta_i \notin \mathbb{N}}} a_i \Omega^{-\eta_i} M[\psi\nu, 1-\eta_i] \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq k = \eta_i \leq N}} a_i \Omega^{-\eta_i} \log \Omega \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + a_i \Omega^{-\eta_i} M_0[\psi\nu, 1-\eta_i] + \Omega^{-\eta_i} M_0[h, \eta_i] \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \mathcal{O}(\Omega^{-N}). \end{aligned}$$

Démonstration. Il s'agit de justifier et détailler la formule des résidus (3.1), en utilisant la méthode des transformées de Mellin présentée dans le Théorème B.5 : I_ν est la h -transform de $\psi\nu$.

D'abord on discute des prolongements méromorphes des transformées de Mellin $M[\psi\nu, 1-z]$ et $M[h, z]$. Pour $M[\psi\nu, 1-z]$, par Proposition B.6 (avec $f = \psi\nu$) : $M[\psi\nu, 1-z]$ converge absolument dans la bande $\Re z < 1$ et s'étend en une fonction méromorphe dans le plan complexe. Ses pôles sont les entiers $j \geq 1$ tels que $\psi^{(j-1)}(0) \neq 0$; un tel pôle est simple et de résidu $-\frac{\psi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!}$. Le long des bandes verticales, $M[\psi\nu, 1-z]$ tend vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance de $|y|^{-1}$: si $c < C < k$ avec $k \in \mathbb{N}$, $\sup\{|M[\psi\nu, 1-x-iy]|, x \in [c, C]\} = \mathcal{O}(|y|^{-k})$.

Pour $M[h, z]$, on décompose d'abord h selon le Corollaire 3.14, à l'ordre $N + 1$:

$$h(x; \lambda) = h \mathbb{1}_{\lambda \leq 1} + \sum_i a_i \lambda^{-\eta_i} \mathbb{1}_{\lambda > 1} + \sum_i a_i \lambda^{-\eta_i} \cos(\omega_i \lambda + C_i) \mathbb{1}_{\lambda > 1} + R_N(\lambda),$$

où le terme de reste est $R_N = \mathbb{1}_{\lambda > 1} \mathcal{O}(\lambda^{-N-1})$ et $\eta_i < N + 1$. La transformée de Mellin de $h \mathbb{1}_{\lambda \leq 1}$ est holomorphe sur $\Re z > 0$. La transformée de Mellin de R_N est holomorphe sur $0 < \Re z < N + 1$. Par Proposition B.7, un terme oscillant $a_i \lambda^{-\eta_i} \cos(\omega_i \lambda + C_i) \mathbb{1}_{\lambda > 1}$ possède une transformée de Mellin holomorphe dans le plan complexe, avec croissance au plus polynomiale le long des bandes verticales. La transformée de Mellin du terme algébriquement décroissant est méromorphe : $M[\sum_i a_i \lambda^{-\eta_i} \mathbb{1}_{\lambda > 1}, z] = \sum_i -a_i (z - \eta_i)^{-1}$. Par superposition, on obtient la fonction $M[h, z]$, méromorphe sur $0 < \Re z < N + 1$. De plus, le comportement le long des bandes verticales est au plus polynomial : pour $0 < c < C < N + 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\{|M[h, x + iy]|, x \in [c, C]\} = \mathcal{O}(|y|^k)$.

On développe la h -transform de $\psi\nu$ par Théorème B.5. La formule de Parseval est applicable par Théorème B.3. En effet, $M[\psi\nu, 1 - z]$ et $M[h, z]$ convergent absolument dans la bande $0 < \Re z < 1$. Et, pour $c = 0.5 \in (0, 1)$, $M[\psi\nu, 1 - c - iy] = \mathcal{O}(y^{-2}) \in L^1(\mathbb{R}, dy)$. Puis, on choisit $C \in (N, N + 1)$ tel que $P(z) = M[\psi\nu, 1 - z]M[h, z]$ est méromorphe dans une bande contenant $c < \Re z < C$, et C est distinct de chacun des pôles de P . D'après les comportements de $M[h, z]$ et $M[\psi\nu, 1 - z]$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M[h, x + iy] = \mathcal{O}(|y|^k)$; puis $M[\psi\nu, 1 - x - iy] = \mathcal{O}(|y|^{-k-2})$, le tout uniformément par rapport à $x \in [c, C]$. Alors $\sup\{|P(x + iy)|, x \in [c, C]\} \rightarrow 0$ et $P(C + iy) = \mathcal{O}(y^{-2}) \in L^1(\mathbb{R}, dy)$.

Il reste à déterminer l'expression des résidus. Les résidus ont trois origines.

- Soit z est un pôle (simple) de $M[\psi\nu, 1 - z]$ mais n'est pas un pôle de $M[h, z]$; dans ce cas z est un entier $k \geq 1$ et le résidu vaut $-\Omega^{-k} M[h, k] \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$.
- Soit z n'est pas un pôle de $M[\psi\nu, 1 - z]$ mais est pôle (simple) de $M[a_i \lambda^{-\eta_i} \mathbb{1}_{\lambda > 1}, z]$ pour un certain η_i . Dans ce cas, $z = \eta_i$ et le résidu associé vaut $-a_i \Omega^{-\eta_i} M[\psi\nu, 1 - \eta_i]$.
- Soit z est pôle simple de $M[\psi\nu, 1 - z]$ et de $M[a_i \lambda^{-\eta_i} \mathbb{1}_{\lambda > 1}, z]$ pour un certain η_i . Dans ce cas $z = \eta_i = k \geq 1$ est entier, et est un pôle double de $\Omega^{-z} M[\psi\nu, 1 - z]M[h, z]$, de résidu : $-a_i \Omega^{-\eta_i} \log \Omega \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} - a_i \Omega^{-\eta_i} M_0[\psi\nu, 1 - \eta_i] - \Omega^{-\eta_i} M_0[h, \eta_i] \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$, où $M_0[\cdot, z]$ désigne la partie holomorphe de $M[\cdot, z]$.

Le reste du développement obtenu est $\mathcal{O}(\Omega^{-C})$, où $C > N$; on termine en tronquant tous les termes d'ordre $\geq N$. \square

En combinant les développements neutralisés, on obtient le développement général recherché :

Théorème 4.4 (Asymptotique de RFBP). *Soient $x \in E_G^*$, $N \geq 1$, et $\Omega > 0$. Soit la décomposition de $h(x; \cdot)$, selon le Corollaire 3.14. Alors RFBP possède un développement asymptotique de la forme :*

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \sum_{1 \leq k \leq N-1} \Omega^{-k} \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} M_0[h, k] + C_{\text{alg}}(x; \Omega) + C_{\text{osc}}(x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-N}), \quad (4.1)$$

où $C_{\text{alg}}(x; \Omega)$, resp. $C_{\text{osc}}(x; \Omega)$, vient de la partie algébriquement décroissante, resp. oscillante de h :

$$C_{\text{alg}}(x; \Omega) = \sum_{1 \leq i \leq n_1} a_i \Omega^{-\eta_i} M_0[\psi, 1 - \eta_i] + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq k = \eta_i \leq N}} a_i \Omega^{-\eta_i} \log \Omega \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!},$$

$$C_{\text{osc}}(x; \Omega) = \sum_{n_1 + 1 \leq i \leq n_2} a_i \Omega^{-\eta_i} \sum_{1 \leq k < N - \eta_i} \frac{(-1)^{k-1}}{(\omega_i \Omega)^k} \cos(\omega_i \Omega + C_i - k \frac{\pi}{2}) \psi_{\eta_i, k-1}.$$

Démonstration. Soit ν un neutraliseur de 0. Alors, $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = I_\nu(x; \Omega) + I_{1-\nu}(x; \Omega)$. On utilise les décompositions neutralisées, et l'on assemble les termes pour obtenir un développement indépendant de ν . À noter que lorsque $M[\cdot, z]$ est holomorphe, $M_0[\cdot, z] = M[\cdot, z]$.

Dans le développement (4.1), le premier terme dépend des moments de $h(x; \cdot)$, et intervient quelle que soit la position du point x . Le terme $C_{\text{alg}}(x; \Omega)$ provient de la partie algébriquement

décroissante (phase nulle). Si $x \notin \mathcal{S}$, alors $C_{\text{alg}}(x; \Omega) = 0$; si $x \in \mathcal{S}$, on obtient, avec les notations du Théorème 3.13 :

$$C_{\text{alg}}(x; \Omega) = \sum_{\substack{\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^* \\ x = z^*}} \sum_{2 \leq j = 2p \leq N} C_{\text{alg}, \Gamma, j}(x; \Omega) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_x^*} \sum_{\substack{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^* \\ x \cdot \theta^* = s^*}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq (N-j)\rho^* - 1}} C_{\text{alg}, \Gamma, j, n}^*(x; \Omega),$$

où la contribution j d'une courbe $\Gamma = \Gamma_b(x, \delta\Theta) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*$ et la contribution (j, n) d'un point critique isolé (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$ sont données respectivement par :

$$C_{\text{alg}, \Gamma, j}(x; \Omega) := \kappa_{\Gamma, j} (-1)^{j/2} \Omega^{-j} \left(\mathbb{1}_{j < N} M_0[\psi, 1 - j] + \log \Omega \frac{\psi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!} \right),$$

$$C_{\text{alg}, \Gamma, j, n}^*(x; \Omega) := K_n^* \kappa_{j, n}^* s_{j, n}^* \Omega^{-j - \frac{n+1}{\rho^*}} \left(\mathbb{1}_{n < (N-j)\rho^* - 1} M_0[\psi, 1 - j - \frac{n+1}{\rho^*}] + \mathbb{1}_{j + \frac{n+1}{\rho^*} = k} \log \Omega \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \right).$$

Enfin, le terme $C_{\text{osc}}(x; \Omega)$ provient de la partie oscillante (phase non nulle). On s'attend en général à obtenir ce type de contribution, quelle que soit la position du point x ; elle s'écrit sous la forme :

$$C_{\text{osc}}(x; \Omega) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*, \Gamma \neq \Gamma_b(x, \delta\Theta) \\ \varphi|_{\Gamma} \equiv \Phi \neq 0}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 1 \leq k \leq N-j-1}} C_{\text{osc}, \Gamma, j, k}(x; \Omega) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_x^*} \sum_{\substack{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^* \\ \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq (N-j)\rho^* - 2 \\ 1 \leq k < N-j - \frac{n+1}{\rho^*}}} C_{\text{osc}, \Gamma, j, n, k}^*(x; \Omega),$$

où la contribution (j, k) d'une courbe $\Gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*$, et la contribution (j, n, k) d'un point critique isolé (θ^*, s^*) d'une courbe $\Gamma \in \mathcal{G}_x^*$, sont données respectivement par :

$$C_{\text{osc}, \Gamma, j, k}(x; \Omega) := \kappa_{\Gamma, j} \Omega^{-j} \frac{(-1)^{k-1}}{(\Phi\Omega)^k} \cos(\Phi\Omega - (j+k)\frac{\pi}{2}) \psi_{j, k-1},$$

$$C_{\text{osc}, \Gamma, j, n, k}^*(x; \Omega) := K_n^* \kappa_{j, n}^* s_{j, n}^* \Omega^{-j - \frac{n+1}{\rho^*}} \frac{(-1)^{k-1}}{(\varphi(\theta^*, s^*)\Omega)^k} \cos(\varphi(\theta^*, s^*)\Omega + \alpha_{j, n}^* - k\frac{\pi}{2}) \psi_{j + \frac{n+1}{\rho^*}, k-1}.$$

□

En pratique, pour obtenir un développement à partir de $(\partial\mathcal{O}, f)$ et (Θ, R) , on décrit l'ensemble des courbes $\Gamma \in \mathcal{G}$ du réflectogramme. Pour chaque courbe, on identifie les points x où la courbe ou ses extrémités contribuent; on calcule les différentes contributions. Enfin, en chaque x , on somme les différentes contributions obtenues. Dans la suite de l'article, on focalisera sur les ordres les plus élevés.

4.2. Termes dominants. Le résultat suivant synthétise la forme des contributions principales.

Corollaire 4.5. *Soient $x \in E_{\mathcal{G}}^*$ et $\Omega > 0$. RFBP est de la forme :*

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = \sum_{1 \leq k \leq 3} \Omega^{-k} \frac{\psi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} M_0[h, k] + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} A[\Gamma](x; \Omega) + B[\Gamma](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-4}),$$

où pour $\Gamma \in \mathcal{G}$, $A[\Gamma]$, resp. $B[\Gamma]$, contient la contribution de Γ dans C_{alg} , resp. C_{osc} . Dans le pire des cas, $B[\Gamma](x; \Omega) = \mathcal{O}(\Omega^{-2})$; les termes dominants de $A[\Gamma]$ sont donnés ci-après. On pose $[w(u)]_{u_1}^{u_0} := w(u_0) - w(u_1)$.

a) Si $\Gamma = \Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1])$. Alors :

$$A[\Gamma](x; \Omega) = \begin{cases} -\Omega^{-1.5} M_0[\psi, -0.5] \sqrt{\pi} \\ \quad \times \sum_{\theta \in [\theta_0, \theta_1]: x=z(\theta)} \left(1 - \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\theta=\theta_{0,1}}\right) \text{sign}(\kappa(\theta)) [P](\theta, x \cdot \theta) \sqrt{|\kappa(\theta)|} + \mathcal{O}(\Omega^{-1.5}), \\ \hspace{15em} \text{si } x \in z([\theta_0, \theta_1]), \\ -\Omega^{-2} (M_0[\psi, -1] + \psi'(0) \log \Omega) \\ \quad \times \left[[P](\theta, x \cdot \theta) \mathbb{1}_{z(\theta) \cdot \theta}(x \cdot \theta) \frac{(x \cdot \theta^\perp)(z(\theta) \cdot \theta^\perp) + 1}{((x \cdot \theta^\perp)^2 + 1)(x - z(\theta)) \cdot \theta^\perp} \right]_{\theta_1}^{\theta_0} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \\ \hspace{15em} \text{si } x \in \cup_i(z(\theta_i), \theta_i^\perp) \setminus \{z(\theta_i)\}, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

b) Si $\Gamma = \Gamma_b(z, [\theta_0, \theta_1])$. Alors :

$$A[\Gamma](x; \Omega) = \begin{cases} -\Omega^{-2} (M_0[\psi, -1] + \psi'(0) \log \Omega) \\ \quad \times \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\nabla \cdot \left(P \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} \right) \right] d\theta \\ \hspace{15em} + \mathcal{O}(\Omega^{-3}), \quad \text{si } x = z, \\ -\Omega^{-2} (M_0[\psi, -1] + \psi'(0) \log \Omega) \\ \quad \times \left[[P](\theta, z \cdot \theta) \mathbb{1}_{z \cdot \theta}(x \cdot \theta) \frac{(x \cdot \theta^\perp)(z \cdot \theta^\perp) + 1}{((x \cdot \theta^\perp)^2 + 1)(x - z) \cdot \theta^\perp} \right]_{\theta_1}^{\theta_0} \\ \hspace{15em} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad \text{si } x \in \cup_i(z, \theta_i^\perp) \setminus \{z\}, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

c) Si $\Gamma = \Gamma_c(r, [\theta_0, \theta_1])$. Alors :

$$A[\Gamma](x; \Omega) = \begin{cases} \Omega^{-1.5} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{R}} M_0[\psi, -0.5] \\ \quad \times \sum_{\theta \in [\theta_0, \theta_1]: x=r\theta} \left(1 - \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\theta=\theta_{0,1}}\right) P(\theta, r) \\ \hspace{15em} + \mathcal{O}(\Omega^{-1.5}), \quad \text{si } x = r\theta, \theta \in [\theta_0, \theta_1], \\ -\Omega^{-2} (M_0[\psi, -1] + \psi'(0) \log \Omega) \\ \quad \times \left[P(\theta, r) \mathbb{1}_r(x \cdot \theta) \frac{\text{sign}(r)}{(1 + (x \cdot \theta^\perp)^2) x \cdot \theta^\perp} \right]_{\theta_1}^{\theta_0} \\ \hspace{15em} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad \text{si } x \in \cup_i(r\theta_i, \theta_i^\perp) \setminus \{r\theta_i\}, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

d) Si $\Gamma = \Gamma_d(\theta, [s_0, s_1])$, avec $\theta = \theta_{\min}, \theta_{\max}$. On pose $\eta_{[u_0, u_1]}(u) := \begin{cases} 1 & \text{si } u = u_1, \\ -1 & \text{si } u = u_0. \end{cases}$ Alors :

$$A[\Gamma](x; \Omega) = \begin{cases} \Omega^{-2} (M_0[\psi, -1] + \psi'(0) \log \Omega) \\ \quad \times P(\theta, x \cdot \theta) \eta_\Theta(\theta) \eta_{[s_0, s_1]}(x \cdot \theta) \frac{x \cdot \theta^\perp}{1 + (x \cdot \theta^\perp)^2} \\ \hspace{15em} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad \text{si } x \in \cup_i(s_i \theta, \theta^\perp), \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On fixe $N = 4$ et on tronque les termes du théorème. On obtient :

$$C_{\text{alg}}(x; \Omega) = \sum_{\substack{\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^* \\ x = z^*}} (C_{\text{alg}, \Gamma, 2}(x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-3})) \\ + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_x^*} \sum_{\substack{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^* \\ x \cdot \theta^* = s^*}} \left(C_{\text{alg}, \Gamma, 1, 0}^*(x; \Omega) + \mathcal{O}\left(\Omega^{-1 - \frac{1}{\rho^*}}\right) \right),$$

$$C_{\text{osc}}(x; \Omega) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x^*, \Gamma \neq \Gamma_b(x, \delta\Theta) \\ \varphi|_\Gamma \equiv \Phi \neq 0}} (C_{\text{osc}, \Gamma, 1, 1}(x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-3})) \\ + \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_x^*} \sum_{\substack{(\theta^*, s^*) \in \Gamma_x^* \\ \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0}} \left(C_{\text{osc}, \Gamma, 1, 0, 1}^*(x; \Omega) + \mathcal{O}\left(\Omega^{-2 - \frac{1}{\rho^*}}\right) \right).$$

Les termes issus de courbes à phase constante sont déterminés par Proposition C.1 :

$$C_{\text{alg},\Gamma,2}(x; \Omega) = -\kappa_{\Gamma,2}\Omega^{-2}(M_0[\psi, -1] + \psi'(0) \log \Omega),$$

$$C_{\text{osc},\Gamma,1,1}(x; \Omega) = -\kappa_{\Gamma,1}\Omega^{-1}\frac{\psi(1)}{\Phi\Omega} \cos(\Phi\Omega);$$

les termes issus de points critiques isolés sont déterminés à par Propositions C.3 à C.6 :

$$C_{\text{alg},\Gamma,1,0}^*(x; \Omega) = -(1 + \mathbb{1}_{0 < \ell^* < |\Gamma|})K(\rho^*)[P](\theta^*, s^*)s_{1,0}^*T^*\varphi \\ \times \left(M_0[\psi, -\frac{1}{\rho^*}] + \mathbb{1}_{\rho^*=1}\psi'(0) \log \Omega \right) \Omega^{-1-\frac{1}{\rho^*}},$$

$$C_{\text{osc},\Gamma,1,0,1}^*(x; \Omega) = -(1 + \mathbb{1}_{0 < \ell^* < |\Gamma|})K(\rho^*)[P](\theta^*, s^*)\psi(1)T^*\varphi \\ \Omega^{-1-\frac{1}{\rho^*}} \frac{1}{\varphi(\theta^*, s^*)\Omega} S_{10}^* \cos(\varphi(\theta^*, s^*)\Omega + \alpha_{10}^* - \frac{\pi}{2}),$$

où $S_{10}^* \cos(\varphi(\theta^*, s^*)\Omega + \alpha_{10}^* - \frac{\pi}{2})$ s'obtient à partir de $s_{10}^*(\Omega)$, en retranchant $\frac{\pi}{2}$ à l'argument des cosinus et sinus. \square

4.3. Inversion de Radon de la projection réflexive. Le Corollaire suivant s'intéresse à l'inversion de Radon appliquée au réflectogramme P : on examine le cas du filtre de Ram-Lak, obtenu par troncature fréquentielle du filtre d'inversion de Radon.

Corollaire 4.6. *Soient les hypothèses du Théorème 4.4, avec ψ_Ω le filtre de Ram-Lak, i.e. $\psi(\sigma) = |\sigma| \mathbb{1}_{[-1,1]}(\sigma)$. On pose*

$$\mathcal{S}_0 := E_{\mathcal{G}}^* \cap (\mathcal{S}_a \cup \mathcal{S}_c) \subset \mathcal{S}.$$

Alors

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} A[\Gamma](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) = \begin{cases} \mathcal{O}(\Omega^{-1.5}), & \text{si } x \in \mathcal{S}_0, \\ \mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega), & \text{si } x \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0, \\ \mathcal{O}(\Omega^{-2}), & \text{si } x \notin \mathcal{S}. \end{cases}$$

Démonstration. Pour ce choix particulier de filtre : $\psi^{(k-1)}(0) = \delta_{1k}$, $\psi(1) = 1$. D'autre part, pour $\Re z > -1$, $M[\psi, z] = \int_0^1 \sigma^z d\sigma = \frac{1}{z+1}$, égalité utilisée pour étendre $M[\psi, z]$ en une fonction méromorphe. On a donc $M_0[\psi, -1] = 0$ et $M_0[\psi, z] = \frac{1}{z+1}$ lorsque $z \neq -1$; en particulier $M_0[\psi, -0.5] = 2$. Le développement obtenu par le Corollaire 4.5 fournit clairement les ordres indiqués. \square

Dans les Figures 12-15, on schématise les différents types de contributions principales pour le filtre de Ram-Lak, à partir de Corollaire 4.5 ; elles sont écrites sous la forme d'annotations des courbes de \mathcal{G} . En pratique, reporter ce type d'annotations dans le réflectogramme permet d'énumérer simplement toutes les contributions à prendre en compte.

4.4. Discussion. Le Corollaire 4.6 fournit une quantification asymptotique ponctuelle de ce que représente une inversion de Radon régularisée appliquée au réflectogramme P . Il indique les zones que l'on peut espérer intense par rapport au reste de la reconstruction. On obtient en général ($E_{\mathcal{G}}^* \setminus \mathcal{S}$) un résultat d'ordre Ω^{-2} . Mais, sur l'ensemble \mathcal{S}_0 , obtenu à partir de portions convexes régulières de la scène (\mathcal{S}_a), et de portions de cercles (\mathcal{S}_c), on s'attend à un résultat plus intense, d'ordre $\Omega^{-1.5}$. Enfin, on obtient une intensité "intermédiaire", d'ordre $\Omega^{-2} \log \Omega$, sur $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$, construit à partir des points singuliers (\mathcal{S}_b), et de droites aux extrémités ($\mathcal{T}_a \cup \mathcal{T}_b \cup \mathcal{T}_c \cup \mathcal{T}_d$). Voir Proposition 3.16 pour une description précise de $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c, \mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_d$.

Par rapport à la scène initiale $\partial\mathcal{S}$, on s'attend à mettre en évidence des portions convexes régulières et des points singuliers : $\mathcal{S}_a \cup \mathcal{S}_b \subset \partial\mathcal{S}$. À cela s'ajoutent des *artefacts* : arcs de cercles liés à la troncature en l'espace des projections (\mathcal{S}_c), droites liées à la troncature en l'espace et en l'angle du réflectogramme ($\mathcal{T}_c \cup \mathcal{T}_d$), et droites liées à la géométrie de la scène et aux sauts de texture ($\mathcal{T}_a \cup \mathcal{T}_b$). Comme nous le verrons dans les cas canoniques, les droites artefacts peuvent tromper la perception de la scène, mais peuvent parfois l'améliorer : elles réalisent de la complétion.

Ce corollaire a été obtenu pour un choix particulier de filtre ψ . On pourrait examiner d'autres choix, et l'on pourrait annuler ou amplifier certains termes du développement (4.1), en réglant les moments et les dérivées aux bords du filtre ψ . La question du choix du filtre ψ , en tenant compte de ce type de contraintes, pourrait faire l'objet de travaux futurs.

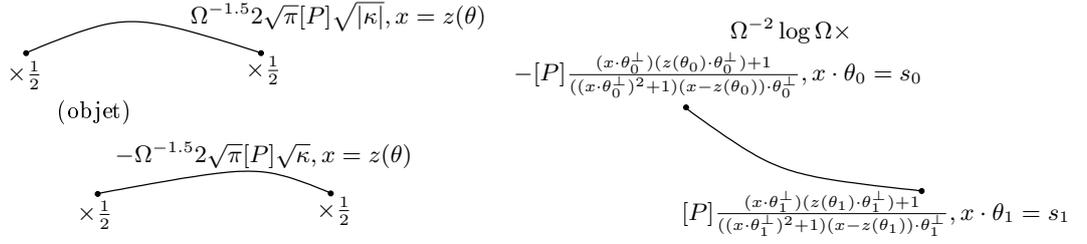


FIGURE 12. Contributions d'une courbe $\Gamma = \Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1])$ pour le filtre de Ram-Lak. À gauche : contribution de $(\theta, s) \in \Gamma$ en $x = z(\theta) \in \mathcal{S}_a$, selon que l'objet est au-dessus ou en-dessous de Γ dans P . À droite : contribution d'une extrémité $(\theta, s) \in \Gamma$ en $x \in \mathcal{T}_a \setminus \{z(\theta)\}$ tel que $x \cdot \theta = s$.

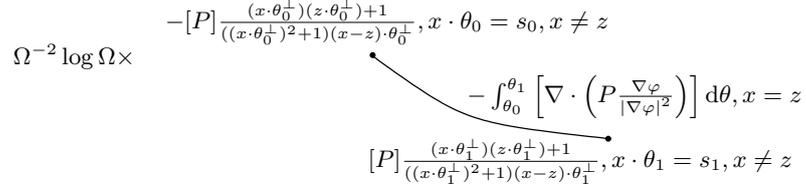


FIGURE 13. Contributions d'une courbe $\Gamma = \Gamma_b(z, [\theta_0, \theta_1])$ pour le filtre de Ram-Lak : contribution de Γ en $x = z \in \mathcal{S}_b$, et contributions des extrémités $(\theta, s) \in \Gamma$ en $x \in \mathcal{T}_b \setminus \{z\}$ tel que $x \cdot \theta = s$.

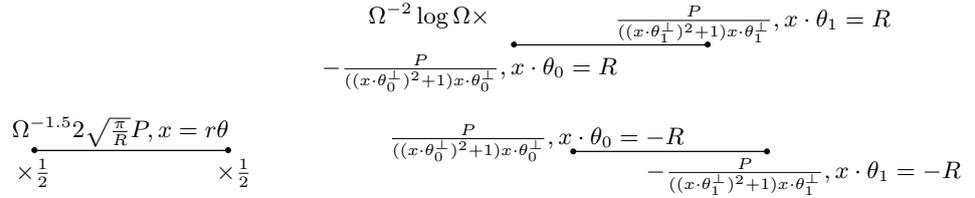


FIGURE 14. Contributions d'une courbe $\Gamma = \Gamma_c(r, [\theta_0, \theta_1])$ pour le filtre de Ram-Lak. À gauche : contribution de $(\theta, s) \in \Gamma$ en $x = r\theta \in \mathcal{S}_c$. À droite : contribution d'une extrémité $(\theta, s) \in \Gamma$ en $x \in \mathcal{T}_c \setminus \{r\theta\}$ tel que $x \cdot \theta = s$ (selon $r = \pm R$).

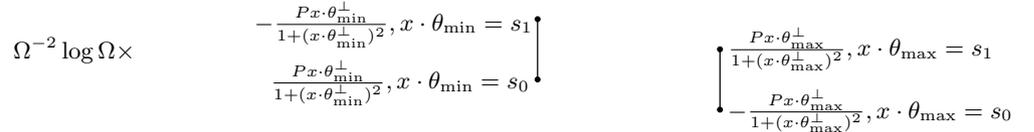


FIGURE 15. Contributions d'une courbe $\Gamma = \Gamma_d(\theta, [s_0, s_1])$ pour le filtre de Ram-Lak : contributions des extrémités $(\theta, s) \in \Gamma$ en $x \in \mathcal{T}_d$ tel que $x \cdot \theta = s$ (selon $\theta = \theta_{\min}, \theta_{\max}$).

5. BANC D'ESSAI

On étudie des cas canoniques de tomographie réflective, à la lumière des résultats de cet article. En plus, on montre la pertinence de l'approximation asymptotique à l'aide de résultats numériques.

5.1. Généralités.

5.1.1. *Théorie.* Pour spécifier un test, on doit préciser la géométrie ∂O , la physique f , la plage angulaire Θ , et la demi-largeur d'écran R . Le réflectogramme P s'en déduit, puis la reconstruction $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega]$ est déterminée dès que le filtre ψ est fixé. Concernant l'expérience, on considère dans cette section une scène sur fond noir, en supposant :

$$f|_{\partial W} = 0, f|_{\partial S} > 0, \quad (\text{et } \partial W = \{|x| = \tilde{R}\}, \text{ avec } \tilde{R} \gg R).$$

Concernant le filtrage, on considère le cas du filtre de Ram-Lak ; on appliquera donc les Corollaires 4.5 et 4.6. Chaque cas test sera spécifié en ajoutant plus d'hypothèses sur $(\Theta, R, \partial S, f|_{\partial S})$. On en déduira l'ensemble des courbes \mathcal{G} puis l'asymptotique de reconstruction heuristique $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega]$.

Pour simplifier, on tiendra compte du support de P et de l'éventuelle 2π -périodicité. En effet, en examinant la décomposition (3.2), on voit que si $P = 0$ sur un morceau Σ , alors pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}$ avec $\Gamma \subset \partial\Sigma$ de type c) ou d), Γ ne contribue pas ; ceci permet de supprimer de tels Γ de \mathcal{G} puisqu'ils ne jouent aucun rôle. De même, sous des hypothèses de 2π -périodicité, les courbes de type d) peuvent être supprimées de \mathcal{G} , tandis que certaines courbes de type a), b) ou c) peuvent être "recollées", ce qui annule l'effet de certaines extrémités. (On peut aussi poser tous les calculs, et remarquer qu'effectivement, certaines contributions se compensent, et certaines sont nulles.)

5.1.2. *Validation numérique.* On accompagne les résultats théoriques de tests numériques.

Pour calculer numériquement RFBP, on utilise le schéma numérique d'ordre 5 présenté dans l'Annexe D : on calcule $\mathcal{H}_\Omega(x) = \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) + \mathcal{O}(\Omega^{-5})$. En particulier, $\mathcal{H}_\Omega(x)$ et $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x)$ coïncident à l'ordre 2.

Les tests présentés illustrent la tomographie réflective. Pour chaque exemple, on calcule la reconstruction RFBP sur un rectangle, avec fréquence Ω fixée. Le point de reconstruction x parcourt une grille de points de la forme : $x = x_{ij} := x_0 + (ih, jh)$, $0 \leq i \leq n_1 - 1$, $0 \leq j \leq n_2 - 1$; $h > 0$ est le côté d'une maille, et x_0 est le coin sud-ouest de la grille. On choisit Ω et h vérifiant $\Omega = \frac{\pi}{1.2h}$. Le résultat d'un tel calcul est une matrice : $[\mathcal{H}_\Omega(x_{ij})]$, que l'on représente sous la forme d'une image. On constatera que cette image est qualitativement en accord avec l'analyse asymptotique.

En plus, on vérifie numériquement l'exactitude de certains développements asymptotiques : ordres dominants et constantes asymptotiques. Pour cela, pour différentes valeurs de x , ou différentes valeurs de Ω à différentes échelles, on compare la reconstruction calculée $\mathcal{H}_\Omega(x)$ avec la valeur prédite par l'asymptotique théorique de $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x)$.

5.2. **Objet convexe régulier.** On détermine l'ordre dominant de la tomographie réflective d'un objet convexe régulier.

5.2.1. *Théorie.* On suppose que ∂S est le bord d'un objet convexe S régulier, de courbure $\kappa > 0$; plus précisément $\partial S = \{\gamma(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$, où γ est une fonction régulière 2π -périodique, telle que $\dot{\gamma}(\theta) = \frac{-1}{\kappa(\theta)}\theta^\perp$ avec $\kappa(\theta) > 0$. On suppose que l'écran est assez grand pour observer ∂S et que l'on tourne sur un tour complet : $\partial S \subset \{|x| < \rho\}$ avec $\rho < R$ et $\Theta = S^1$. On suppose que f est aussi régulière que nécessaire et que $\theta \mapsto f(\theta, \cdot)$ est 2π -périodique. La forme du réflectogramme P est représenté à gauche de la Figure 16.

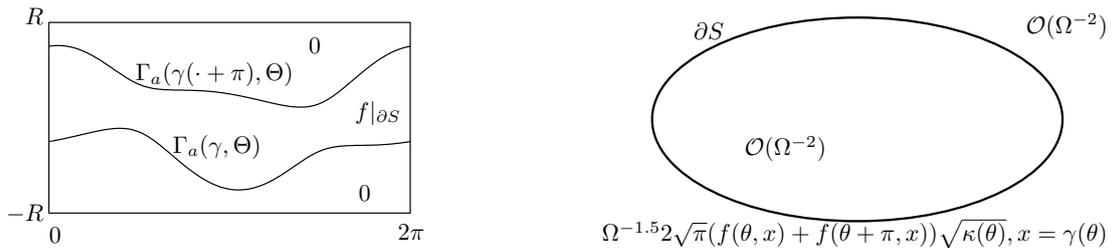


FIGURE 16. Cas d'un convexe $\partial S = \{\gamma(\theta), \theta\}$ de courbure $\kappa(\theta)$. À gauche : réflectogramme P . À droite : asymptotique de l'heuristique $\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega]$.

Puisque $P(\theta, s) = 0$ pour $\rho < s < R$, il n'est pas nécessaire de considérer les courbes de type c) ; et par périodicité en θ , il n'est pas nécessaire de considérer les courbes de type d). En les éliminant de \mathcal{G} , alors les courbes de \mathcal{G} proviennent uniquement des hyperplans d'appui de S :

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_a(\gamma, \Theta), \Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), \Theta)\},$$

Évidemment, $\mathcal{S}_a = \partial S$ et $\mathcal{S}_b, \mathcal{T}_b, \mathcal{S}_c, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_d$ sont vides. Dans D , $P > 0$ est régulière périodique entre les courbes de \mathcal{G} , $P = 0$ en-dessous de $\Gamma_a(\gamma, \Theta)$, et au-dessus de $\Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), \Theta)$. Par périodicité \mathcal{T}_a ne joue aucun rôle. La reconstruction est $\mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$ sur $\partial S \cap E_{\mathcal{G}}^*$, et est $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$ sur $E_{\mathcal{G}}^* \setminus \partial S$. Plus en détails, pour $x = \gamma(\theta_x) \in \partial S \cap E_{\mathcal{G}}^*$, avec $\theta_x \in \Theta$, $A[\Gamma_a(\gamma, \Theta)](x; \Omega) = 2\sqrt{\pi}\Omega^{-1.5}f(\theta_x, x)\sqrt{\kappa(\theta_x)} + \mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$ et $A[\Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), \Theta)](x; \Omega) = 2\sqrt{\pi}\Omega^{-1.5}f(\theta_x + \pi, x)\sqrt{\kappa(\theta_x)} + \mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$. Au total, on obtient (voir Figure 16) :

$$\Omega^{1.5}\mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}(f(\theta_x, x) + f(\theta_x + \pi, x))\sqrt{\kappa(\theta_x)} + \mathcal{O}(1), & \text{si } x \in \partial S \cap E_{\mathcal{G}}^*, \\ \mathcal{O}(\Omega^{-0.5}), & \text{si } x \in E_{\mathcal{G}}^* \setminus \partial S. \end{cases}$$

Il s'agit d'une sorte de formule d'inversion. Asymptotiquement, à une constante multiplicative près, indépendante de la scène considérée, on reconstruit la moyenne des valeurs prises par la physique f sur les bords de la silhouette de l'objet (sur les hyperplans d'appui), pondérée par la racine carrée de la courbure de l'objet. En particulier, si f est contrastée (varie), la reconstruction est contrastée. De plus, l'intervention de la courbure tend à accentuer les zones les plus courbées.

5.2.2. *Contrôle qualité.* Soit l'ellipse $\partial S = \{\mathcal{E}(t) = m + (a \cos t, b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, de centre $m = (0.5, 0.2)$, d'axes $a = 1$, $b = 0.5$, et d'excentricité $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. On pose $f|_{\partial S} = 1$. La fonction γ est une autre paramétrisation de ∂S : $\gamma(\theta) = \mathcal{E}(t(\theta))$, avec $t(\theta)$ vérifiant l'équation :

$$\dot{\mathcal{E}}(t(\theta)) \cdot \theta = -a \sin t(\theta) \cos \theta + b \cos t(\theta) \sin \theta = 0.$$

À un multiple de π près : $t(\theta) \equiv t_0(\theta)$, où l'on a posé :

$$t_0(\theta) := \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a} \tan \theta), & \text{si } |\cos \theta| > 0.7, \\ \arctan(\frac{a}{b} \tan(\theta + \frac{\pi}{2})) - \frac{\pi}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule donc $\mathcal{E}(t_0(\theta))(\theta) \cdot \theta$ et $\mathcal{E}(t_0(\theta) + \pi)(\theta) \cdot \theta$; la plus petite des deux valeurs donne $s_1(\theta) = \gamma(\theta) \cdot \theta$, et la plus grande des deux valeurs donne $s_2(\theta) = \gamma(\theta + \pi) \cdot \theta$. Le réflectogramme P pour ce test est tracé sur la Figure 16. Les courbes $\Gamma_a(\gamma, [0, 2\pi])$ et $\Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), [0, 2\pi])$ sont paramétrées par s_1 et s_2 . On applique donc ici le schéma numérique de calcul de RFBP, à partir d'un seul morceau Π , délimité par s_1 et s_2 , sur $[\theta_0, \theta_1] = [0, 2\pi]$.

Sur la Figure 17, on a tracé $\mathcal{H}_{\Omega}(x)$, avec x parcourant les $x_{ij} = (-1 + ih, -1 + jh) \in [-1, 2] \times [-1, 1]$, pour $h = 2^{-6}$ et $\Omega = \frac{\pi}{1.2h}$. On constate que \mathcal{H}_{Ω} est bien une reconstruction heuristique de ∂S : l'ellipse apparaît plus intense.

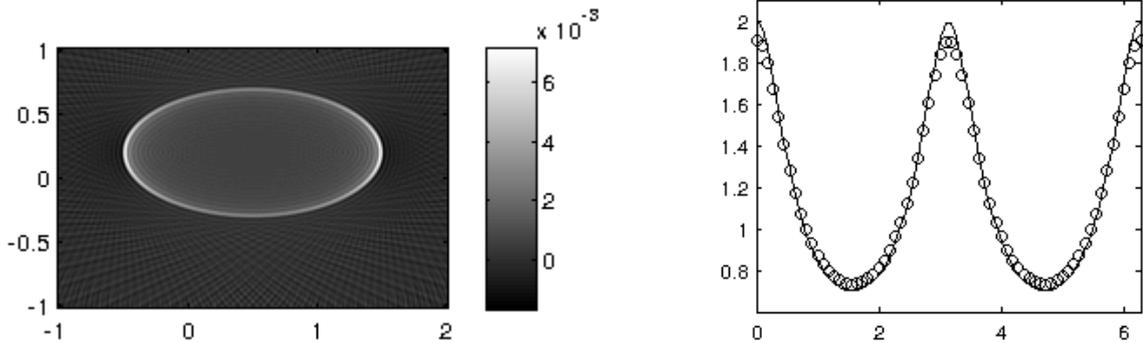


FIGURE 17. Cas de l'ellipse \mathcal{E} de courbure κ . À gauche, reconstruction \mathcal{H}_{Ω} pour $\Omega = \frac{2^6\pi}{1.2}$. À droite, (o) $\frac{\Omega^{1.5}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{H}_{\Omega} \circ \mathcal{E}$ avec $\Omega = 2^{10}$, et (-) asymptotique $\sqrt{\kappa}$.

Plus quantitativement, en $x = \gamma(\theta) = \mathcal{E}(t)$, la courbure de ∂S en x est $\kappa(\theta) = \frac{b}{a^2} \frac{1}{(1 - e^2 \cos^2 t)^{3/2}}$. À droite de la Figure 17, on a tracé, en fonction de $t \in [0, 2\pi]$: $\frac{\Omega^{1.5}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{H}_{\Omega}(\mathcal{E}(t))$ pour $\Omega = 2^{10}$, et son asymptotique théorique $\sqrt{\kappa(\theta)}$. Ce graphique confirme numériquement : $\frac{\Omega^{1.5}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](\gamma(\theta)) \sim$

$\sqrt{\kappa(\theta)}$. À gauche de la Figure 18, on a posé $x = \gamma(\theta) = \mathcal{E}(t) \in \partial S$ avec $t = \frac{\pi}{4}$, puis on a tracé $\frac{\Omega^{1.5}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{H}_\Omega(x) - \sqrt{\kappa(\theta)}$ en fonction de $\log_2 \Omega$, pour $\Omega = 2^i, 0 \leq i \leq 15$. On observe, comme attendu : $\frac{\Omega^{1.5}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - \sqrt{\kappa(\theta)} = \mathcal{O}(1)$. Enfin, à droite de la Figure 18, on a posé $x = (1, 1) \notin \partial S$, et on a tracé $\Omega^2 \mathcal{H}_\Omega(x)$, pour $\Omega = 2^i, 0 \leq i \leq 15$, en fonction de $\log_2 \Omega$. Les résultats vont dans le sens de $\Omega^2 \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \mathcal{O}(1)$.



FIGURE 18. Cas de l'ellipse \mathcal{E} de courbure κ . À gauche, $\frac{\Omega^{1.5}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{H}_\Omega(x) - \sqrt{\kappa}$ en fonction de $\log_2 \Omega$, pour $x \in \partial S$ fixé. À droite, $\Omega^2 \mathcal{H}_\Omega(x)$ en fonction de $\log_2 \Omega$, pour $x \notin \partial S$ fixé.

5.3. Polygone strictement convexe. On détermine l'ordre dominant de la tomographie réfective d'un polygone strictement convexe (et uniforme).

5.3.1. Théorie. On suppose que ∂S est un polygone strictement convexe à n sommets : $\partial S = (a_1, \dots, a_n)$ (parcouru dans cet ordre dans le sens trigonométrique), strictement contenu dans le disque $|x| < R$. On tourne sur un tour complet : $\Theta = \mathbb{S}^1$. On suppose que $f|_{\partial S} = 1$; en particulier, chaque image $s \mapsto P(\theta, s)$ est binaire et présente exactement deux discontinuités : voir Figure 19. Pour simplifier les notations, on étendra l'indexation par périodicité : $\bullet_{i+kn} = \bullet_i, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n$. La longueur du côté $[a_{i-1}, a_i]$ est notée $\ell_i := |a_i - a_{i-1}|$; la normale à ce côté, pointant vers l'intérieur du polygone, est $\theta_{g,i} := \left(\frac{a_i - a_{i-1}}{\ell_i}\right)^\perp$.

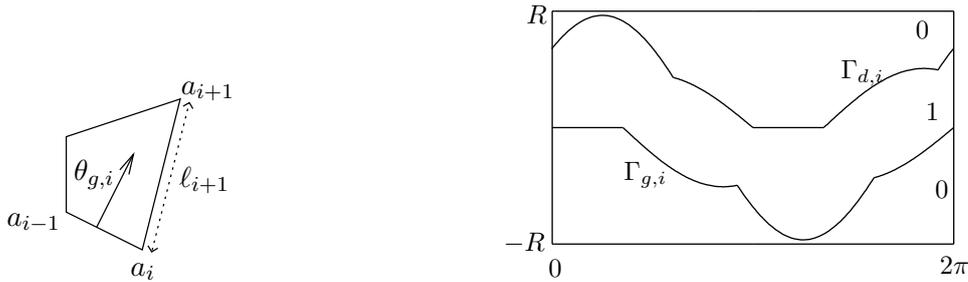


FIGURE 19. À gauche : polygone convexe (a_1, a_2, \dots, a_n) . À droite : silhouette P associée.

Comme précédemment, on élimine certaines courbes de \mathcal{G} en exploitant la périodicité et le support de P ; on obtient \mathcal{G} , constitué de $2n$ courbes de type b) : $\mathcal{G} = \{\Gamma_{g,i}, \Gamma_{d,i}, 1 \leq i \leq n\}$, où $\Gamma_{g,i} = \Gamma(a_i, \Theta_{g,i})$ avec $\Theta_{g,i} := [\theta_{g,i}, \theta_{g,i+1}]$, et $\Gamma_{d,i} = \Gamma(a_i, \Theta_{d,i})$ avec $\Theta_{d,i} := \Theta_{g,i} + \pi$. Le long de $\Gamma_{g,i}$, resp. $\Gamma_{d,i}$, a_i est projeté au niveau de la discontinuité de gauche, resp. droite, des projections. Évidemment, $\mathcal{S}_a, \mathcal{T}_a, \mathcal{S}_c, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_d$ sont vides, et donc aucun point n'est exclu de l'étude : $E_{\mathcal{G}}^* = \mathbb{R}^2$. D'autre part, $\mathcal{S}_b = \{a_i, 1 \leq i \leq n\}$ est l'ensemble des sommets, et $\mathcal{T}_b = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (a_i, a_{i+1})$ est l'ensemble des droites contenant les côtés du polygone ∂S ; sur la Figure 20, \mathcal{S}_b est en gras et \mathcal{T}_b est en pointillés. Sur $\mathcal{T}_b \supset \mathcal{S}_b$, la reconstruction est $\mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega)$; sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{T}_b$, elle est $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$. On va préciser le développement sur \mathcal{T}_b .

Examinons les contributions algébriques de $\Gamma_{g,i}$. Le support de $A[\Gamma_{g,i}]$ est constitué des droites contenant les côtés du polygone adjacents au sommet a_i : $x \in (a_{i-1}, a_i) \cup (a_i, a_{i+1})$. Si $x = a_i \in \mathcal{S}_b$,

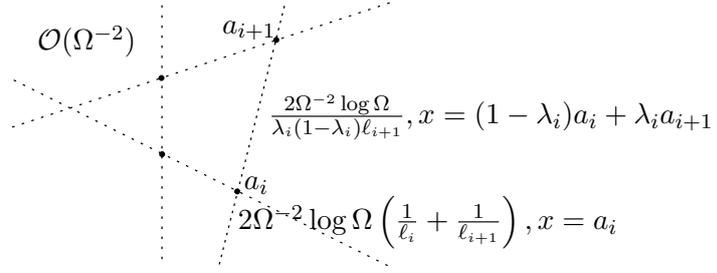


FIGURE 20. Géométrie et asymptotique de la reconstruction pour le polygone de la Figure 19.

on obtient :

$$\begin{aligned} A[\Gamma_{g,i}](x; \Omega) &= \Omega^{-2} \log \Omega \int_{\Theta_{g,i}} \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} d\theta + \mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega), \text{ avec } \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{a_i \cdot \theta^\perp}{(a_i \cdot \theta^\perp)^2 + 1}, \\ &= \Omega^{-2} \log \Omega \left(\frac{a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp}{(a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)^2 + 1} - \frac{a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp}{(a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp)^2 + 1} \right) + \mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega), \quad x = a_i. \end{aligned}$$

Si $x \in (a_{i-1}, a_i) \setminus \{a_i\}$, on obtient (extrémité gauche de $\Gamma_{g,i}$) :

$$A[\Gamma_{g,i}](x; \Omega) = \Omega^{-2} \log \Omega \frac{(x \cdot \theta_{g,i}^\perp)(a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp) + 1}{((x \cdot \theta_{g,i}^\perp)^2 + 1)(x - a_i) \cdot \theta_{g,i}^\perp} + \mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega), \quad x \in (a_{i-1}, a_i) \setminus \{a_i\}.$$

Si $x \in (a_i, a_{i+1}) \setminus \{a_i\}$, on obtient (extrémité droite de $\Gamma_{g,i}$) :

$$A[\Gamma_{g,i}](x; \Omega) = -\Omega^{-2} \log \Omega \frac{(x \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)(a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp) + 1}{((x \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)^2 + 1)(x - a_i) \cdot \theta_{g,i+1}^\perp} + \mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega), \quad x \in (a_i, a_{i+1}) \setminus \{a_i\}.$$

On fait de même pour $\Gamma_{d,i}$. On montre que l'on obtient les mêmes contributions; donc la somme des contributions de $\Gamma_{g,i}$ et $\Gamma_{d,i}$ est obtenue en doublant celles de $\Gamma_{g,i}$. Il reste à additionner l'ensemble des contributions $2A[\Gamma_{g,i}]$ pour $1 \leq i \leq n$.

- Soit $x \in \mathcal{T}_b \setminus \mathcal{S}_b : x \in (a_i, a_{i+1}) \setminus \{a_i, a_{i+1}\}$, $1 \leq i \leq n$; on suppose que (a_i, a_{i+1}) est la seule droite de \mathcal{T}_b contenant x , comme sur la Figure 20. En coordonnées barycentriques,

$$x = (1 - \lambda_i)a_i + \lambda_i a_{i+1}, \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

On obtient alors en x deux contributions, celle en provenance de $\Gamma_{g,i} \cup \Gamma_{d,i}$ en tant que point de $(a_i, a_{i+1}) \setminus \{a_i\}$, et celle en provenance de $\Gamma_{g,i+1} \cup \Gamma_{d,i+1}$ en tant que point de $(a_i, a_{i+1}) \setminus \{a_{i+1}\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{2 \log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= \frac{(x \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)(a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp) + 1}{((x \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)^2 + 1)\lambda_i \ell_{i+1}} + \frac{(x \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)(a_{i+1} \cdot \theta_{g,i+1}^\perp) + 1}{((x \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)^2 + 1)(1 - \lambda_i)\ell_{i+1}} + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{1}{\lambda_i(1 - \lambda_i)\ell_{i+1}} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Sur la droite contenant l'arête $[a_i, a_{i+1}]$, excepté aux sommets a_i et a_{i+1} (et en d'éventuels points appartenant à (a_j, a_{j+1}) avec $i \neq j$), la constante asymptotique obtenue est inversement proportionnelle à la longueur ℓ_{i+1} de l'arête, est strictement positive si, et seulement si, x appartient à l'arête, et décroît comme $\mathcal{O}(\lambda_i^{-2})$ quand la distance (normalisée) λ_i de x au sommet a_i tend vers l'infini. Elle explose comme λ_i^{-1} , resp. $(1 - \lambda_i)^{-1}$, quand le point x approche le sommet a_i , resp. a_{i+1} .

- Soit $x \in \mathcal{T}_b \setminus \mathcal{S}_b$ qui appartient à exactement deux droites (a_i, a_{i+1}) et (a_j, a_{j+1}) avec $i \neq j$. Il faut sommer la contribution des deux arêtes :

$$x = (1 - \lambda_i)a_i + \lambda_i a_{i+1} = (1 - \lambda_j)a_j + \lambda_j a_{j+1}, \text{ avec } \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad i \neq j,$$

$$\frac{\Omega^2}{2 \log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \frac{1}{\lambda_i(1 - \lambda_i)\ell_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_j(1 - \lambda_j)\ell_{j+1}} + \mathcal{O}(1).$$

- Enfin, soit un sommet $x \in \mathcal{S}_b : x = a_i$, $1 \leq i \leq n$. On obtient en x trois contributions, celle en provenance de $\Gamma_{g,i} \cup \Gamma_{d,i}$ en tant que point critique a_i , celle en provenance de $\Gamma_{g,i-1} \cup \Gamma_{d,i-1}$ en

tant que point de $(a_{i-1}, a_i) \setminus \{a_{i-1}\}$, et celle en provenance de $\Gamma_{g,i+1} \cup \Gamma_{d,i+1}$ en tant que point de $(a_i, a_{i+1}) \setminus \{a_{i+1}\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{2 \log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= \frac{a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp}{(a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)^2 + 1} - \frac{a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp}{(a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp)^2 + 1} \\ &+ \frac{(a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp)(a_{i-1} \cdot \theta_{g,i}^\perp) + 1}{((a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp)^2 + 1)\ell_i} \\ &+ \frac{(a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)(a_{i+1} \cdot \theta_{g,i+1}^\perp) + 1}{((a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp)^2 + 1)\ell_{i+1}} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Comme $a_{i-1} \cdot \theta_{g,i}^\perp = a_i \cdot \theta_{g,i}^\perp + \ell_i$ et $a_{i+1} \cdot \theta_{g,i+1}^\perp = a_i \cdot \theta_{g,i+1}^\perp - \ell_{i+1}$, on obtient simplement :

$$\frac{\Omega^2}{2 \log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](a_i) = \frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} + \mathcal{O}(1).$$

En somme, pour un polygone strictement convexe uniforme, la tomographie réflective met en évidence les droites contenant les côtés. En plus, vues les expressions asymptotiques, en sélectionnant les valeurs positives de la reconstruction ($\max(\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x), 0)$), alors on met en évidence uniquement le polygone lui-même ! Il s'agit là d'un cas où l'ensemble \mathcal{T}_b complète convenablement l'ensemble \mathcal{S}_b : $\mathcal{T}_b \setminus \mathcal{S}_b$ apporte une information pertinente pour pouvoir extraire l'objet dans la reconstruction.

5.3.2. *Contrôle qualité.* On suppose que ∂S est le triangle (a_1, a_2, a_3) avec $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}, \frac{-1}{\sqrt{3}-1})$, et $a_3 = (0, 1)$. La silhouette P s'obtient à l'aide des normales intérieures, représentées ici par les angles $\theta_{g,1} = 0$, $\theta_{g,2} = \frac{\pi}{3}$ et $\theta_{g,3} = \frac{5\pi}{4}$.

À gauche de la Figure 21, on a tracé $\mathcal{H}_\Omega(x)$, avec x parcourant les $x_{ij} = (-1 + ih, -2 + jh) \in [-1, 3] \times [-2, 2]$, pour $h = 2^{-5}$ et $\Omega = \frac{\pi}{1.2h}$. On constate que les valeurs intenses positives de \mathcal{H}_Ω forment une reconstruction de ∂S . À droite de la Figure 21, on met en évidence l'asymptotique le

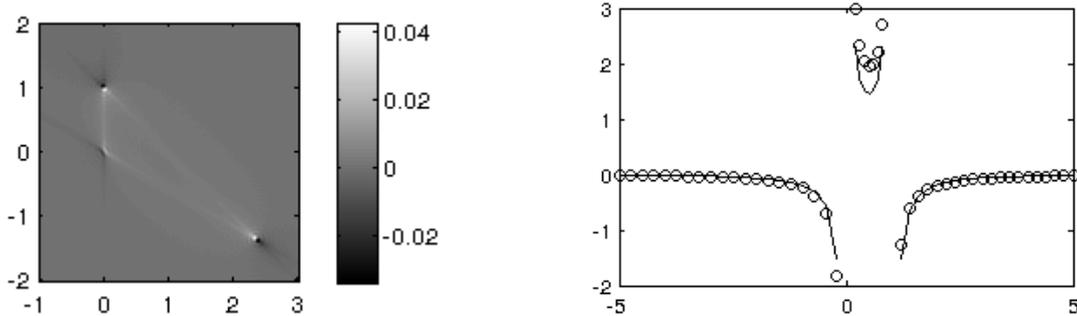


FIGURE 21. Cas du triangle (a_1, a_2, a_3) . À gauche, reconstruction \mathcal{H}_Ω pour $\Omega = \frac{2^5 \pi}{1.2}$. À droite, (o) $\lambda \mapsto \frac{\Omega^2 \mathcal{H}_\Omega((1-\lambda)a_2 + \lambda a_1)}{2 \log \Omega}$ avec $\Omega = 2^{15}$, et (-) asymptotique ponctuelle $\lambda \mapsto \frac{1}{(1-\lambda)\lambda|a_1 - a_2|}$.

long de la droite (a_1, a_2) : $\frac{\Omega^2 \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x)}{2 \log \Omega} \sim \frac{1}{(1-\lambda)\lambda|a_1 - a_2|}$, pour $x = (1-\lambda)a_2 + \lambda a_1$, $\lambda \in [-5, 0.2] \cup [0.2, 0.8] \cup [1.2, 5]$.

À gauche de la Figure 22, on met en évidence l'asymptotique au sommet a_1 : $\frac{\Omega^2 \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](a_1)}{2} - (\frac{1}{|a_1 - a_2|} + \frac{1}{|a_1 - a_3|}) \log \Omega = \mathcal{O}(1)$. Enfin, à droite de la Figure 22, on teste l'asymptotique en un point fixé sur la droite (a_1, a_2) : $x = (1-\lambda)a_2 + \lambda a_1, \lambda = 0.1$; on obtient : $\frac{\Omega^2 \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x)}{2} - \frac{1}{(1-\lambda)\lambda|a_1 - a_2|} \log \Omega = \mathcal{O}(1)$.

5.4. **Concavité.** On examine le cas d'un objet présentant une concavité, avec des sauts.



FIGURE 22. Cas du triangle (a_1, a_2, a_3) . À gauche, $\frac{\Omega^2 \mathcal{H}_\Omega(a_1)}{2} - \left(\frac{1}{|a_1 - a_2|} + \frac{1}{|a_1 - a_3|}\right) \log \Omega$ en fonction de $\log_2 \Omega$. À droite, $\frac{\Omega^2 \mathcal{H}_\Omega(0.9a_2 + 0.1a_1)}{2} - \frac{\log \Omega}{0.9 \cdot 0.1 |a_1 - a_2|}$ en fonction de $\log_2 \Omega$.

5.4.1. *Théorie.* On suppose $\Theta = \mathbb{S}^1$ et $R > 1$. On considère un objet ∂S qui a la forme d'un croissant, obtenu par réunion du morceau de parabole $\mathcal{P} = \left\{ \left(\frac{t^2 - 1}{2}, t \right), -1 \leq t \leq 1 \right\}$, et du demi-cercle $\mathcal{C} = \{|x| = 1, x_1 \leq 0\}$: $\partial S = \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$; voir Figure 23. On fixe $t_0 \in (-1, 1)$ et trois valeurs (distinctes) f_1, f_2, f_3 ; puis on définit $f|_{\partial S}$: pour $y \in \mathcal{C}$, $f(\theta, y) = f_1$; pour $y = \left(\frac{t^2 - 1}{2}, t \right) \in \mathcal{P}$, $f(\theta, y) = f_2$ si $-1 < t < t_0$, et $f(\theta, y) = f_3$ si $t_0 \leq t < 1$. Ainsi, le long de ∂S , $f|_{\partial S}$ saute aux points de raccord de \mathcal{P} et \mathcal{C} : $z_1 = (0, 1)$ et $z_{-1} = (0, -1)$, et en un point de la concavité : $z_0 = \left(\frac{t_0^2 - 1}{2}, t_0 \right)$. L'angle entre l'horizontale et la corde $(z_0, z_{\pm 1})$ est $\alpha_{\pm 1} - \frac{\pi}{2} := \arctan \frac{2}{t_0 \pm 1}$. Le réflectogramme est à droite de la Figure 23. Sur cet exemple, on ne peut pas espérer reconstruire exactement la concavité : en remplaçant \mathcal{P} par la ligne polygonale (z_{-1}, z_0, z_1) , avec $f = f_2$ sur $[z_{-1}, z_0]$ et $f = f_3$ sur $[z_0, z_1]$, alors on obtiendrait exactement le même réflectogramme.

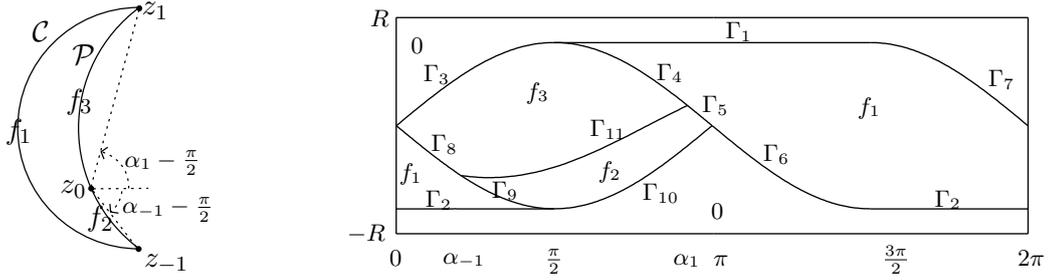


FIGURE 23. À gauche : croissant $\partial S = \mathcal{C} \cup \mathcal{P}$ et sa physique $f|_{\partial S}$. À droite : réflectogramme P associé.

Là encore, il suffit de focaliser sur les courbes de type a) ou b). On obtient 11 courbes, créées par la portion convexe \mathcal{C} et les points de coins et/ou saut z_0, z_{-1} et z_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \{ & \Gamma_1 := \Gamma_a(\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta), [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]), \Gamma_2 := \Gamma_a(\theta \mapsto -(\cos \theta, \sin \theta), [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]), \\ & \Gamma_3 := \Gamma_b(z_1, [0, \frac{\pi}{2}]), \Gamma_4 := \Gamma_b(z_1, [\frac{\pi}{2}, \alpha_1]), \Gamma_5 := \Gamma_b(z_1, [\alpha_1, \pi]), \Gamma_6 := \Gamma_b(z_1, [\pi, \frac{3\pi}{2}]), \\ & \Gamma_7 := \Gamma_b(z_{-1}, [-\frac{\pi}{2}, 0]), \Gamma_8 := \Gamma_b(z_{-1}, [0, \alpha_{-1}]), \Gamma_9 := \Gamma_b(z_{-1}, [\alpha_{-1}, \frac{\pi}{2}]), \\ & \Gamma_{10} := \Gamma_b(z_{-1}, [\frac{\pi}{2}, \pi]), \Gamma_{11} := \Gamma_b(z_0, [\alpha_{-1}, \alpha_1]) \}. \end{aligned}$$

L'étude n'exclut aucun point : $E_{\mathcal{G}}^* = \mathbb{R}^2$. $\mathcal{S}_a = \mathcal{C}$ est la portion convexe de la scène, et $\mathcal{T}_a = \{x_2 = \pm 1\}$ contient ses tangentes aux extrémités. $\mathcal{S}_b = \{z_0, z_1, z_{-1}\}$ contient les trois points de coins/saut, et $\mathcal{T}_b = \{x_2 = \pm 1\} \cup \{x_1 = 0\} \cup (z_0, z_1) \cup (z_0, z_{-1})$: \mathcal{T}_b contient \mathcal{T}_a , les cordes $(z_0, z_{\pm 1})$, et la droite $x_1 = 0$, qui est tangente à l'enveloppe convexe de ∂S . $\mathcal{S}_c, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_d$ sont vides. La reconstruction est $\mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$ sur \mathcal{C} , $\mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega)$ sur $\mathcal{T}_b \setminus \mathcal{C}$, et $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{T}_b)$. Sur la Figure 24, $\mathcal{S}_a \cup \mathcal{S}_b$ est en gras, \mathcal{T}_b en pointillés, et quelques contributions sont indiquées. Nous focalisons sur quelques contributions modèles.

- Sur la partie convexe : pour $x \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= A[\Gamma_1](x; \Omega) + A[\Gamma_2](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-1.5}) \\ &= \begin{cases} \Omega^{-1.5}(2\sqrt{\pi}f_1 + \mathcal{O}(1)), & \text{si } x = (0, \pm 1), \\ \Omega^{-1.5}(4\sqrt{\pi}f_1 + \mathcal{O}(1)), & \text{si } x \in \mathcal{C} \setminus \{(0, \pm 1)\}. \end{cases} \end{aligned}$$

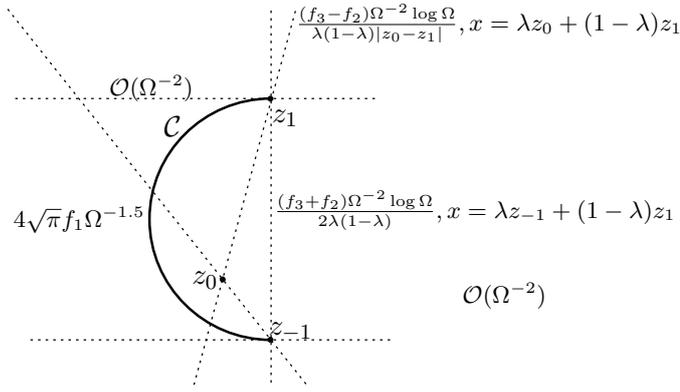


FIGURE 24. Géométrie et asymptotique de la reconstruction pour le croissant de la Figure 23.

- Sur une droite tangente à une extrémité de \mathcal{C} : $x_2 = 1$, représentée dans le réfectogramme par les points $(\frac{\pi}{2}, 1)$ et $(\frac{3\pi}{2}, -1)$. Pour $x = (x_1, 1)$ avec $x_1 \neq 0$ tel que $x \notin (z_0, z_{-1})$, alors les différentes contributions se compensent :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= \sum_{i \in \{1, 2, 3, 4, 6\}} A[\Gamma_i](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) \\ &= \Omega^{-2} \log \Omega \frac{f_1 + f_1 - f_3 + (f_3 - f_1) - f_1}{(x_1^2 + 1)x_1} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) \\ &= \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad x = (x_1, 1), x_1 \neq 0, x \notin (z_0, z_{-1}). \end{aligned}$$

- Sur la droite qui complète ∂S pour en faire un convexe : $x_1 = 0$, représentée dans le réfectogramme par les points $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ et $(2\pi, 0)$. Pour $x = (0, x_2)$, avec $x_2 \neq \pm 1$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= \sum_{i \in \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}} A[\Gamma_i](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) \\ &= \Omega^{-2} \log \Omega \frac{2(f_3 + f_2)}{1 - x_2^2} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) \quad x = (0, x_2), |x_2| \neq 1 \\ &= \Omega^{-2} \log \Omega \frac{f_3 + f_2}{2\lambda(1 - \lambda)} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad x = \lambda z_{-1} + (1 - \lambda)z_1. \end{aligned}$$

- Sur une corde issue du point de saut : (z_0, z_1) . Pour $x = \lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1$, avec $x \notin \mathcal{C}$ et $\lambda \notin \{0, 1\}$, on lit les contributions dans le réfectogramme en $(\theta, s) = (\alpha_1, z_0 \cdot \alpha_1 = z_1 \cdot \alpha_1)$; alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= \sum_{i \in \{4, 5, 11\}} A[\Gamma_i](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) \\ &= \Omega^{-2} \log \Omega \frac{f_3 - f_2}{\lambda(1 - \lambda)|z_0 - z_1|} + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad x = \lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1, x \notin \mathcal{C} \cup \{z_0\}. \end{aligned}$$

- Enfin, en $x = z_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) &= \sum_{i \in \{4, 5, 8, 9, 11\}} A[\Gamma_i](x; \Omega) + \mathcal{O}(\Omega^{-2}) \\ &= \Omega^{-2} \log \Omega (f_3 - f_2) \left(\frac{1}{|z_0 - z_1|} - \frac{1}{|z_0 - z_{-1}|} \right) + \mathcal{O}(\Omega^{-2}), \quad x = z_0. \end{aligned}$$

Au final, on s'attend à une reconstruction intense sur la partie convexe \mathcal{C} , sur la droite d'appui $x_1 = 0$, et sur les cordes $(z_0, z_{\pm 1})$. Sur ces droites, la constante asymptotique change de signe en traversant l'un des points critiques $z_0, z_{\pm 1}$; et elle indique que l'information la plus intense devrait se trouver près de ces points critiques $z_0, z_{\pm 1}$.

5.4.2. *Contrôle qualité.* On pose $t_0 = -0.5$, $f_1 = 0.5$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3.5$. À gauche de la Figure 25, on a tracé la reconstruction $\mathcal{H}_\Omega(x)$ sur une grille de pas $h = 2^{-6}$, avec $\Omega = \frac{\pi}{1.2h}$; pour une meilleure lisibilité, on a effectué au préalable un changement d'échelle. L'allure obtenue est en accord avec la géométrie asymptotique de la Figure 24.

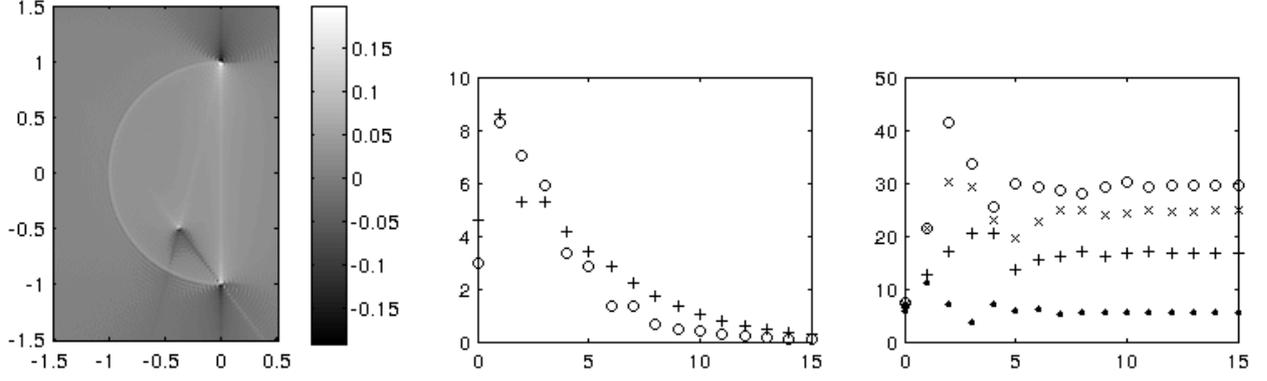


FIGURE 25. Cas du croissant. À gauche, reconstruction $r \circ \mathcal{H}_\Omega$ pour $\Omega = \frac{2^6\pi}{1.2}$, où $r(u) := \text{sign}(u)\sqrt{|u|}$ change l'échelle. Au centre, en fonction de $\log_2 \Omega$: (o) $\Omega^{1.5}\mathcal{H}_\Omega(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}) - 4\sqrt{\pi}f_1$, (+) $\Omega^{1.5}\mathcal{H}_\Omega(0, 1) - 2\sqrt{\pi}f_1$. À droite, en fonction de $\log_2 \Omega$: (o) $\Omega^2\mathcal{H}_\Omega(0.3z_1 + 0.7z_0) - \frac{(f_3-f_2)\log \Omega}{0.3 \cdot 0.7|z_0-z_1|}$, (+) $\Omega^2\mathcal{H}_\Omega(0.3z_1 + 0.7z_{-1}) - \frac{(f_3+f_2)\log \Omega}{2 \cdot 0.3 \cdot 0.7}$, (.) $\Omega^2\mathcal{H}_\Omega(-1, 1)$, (x) $\Omega^2\mathcal{H}_\Omega(z_0) - \left(\frac{f_3-f_2}{|z_0-z_1|} - \frac{f_3-f_2}{|z_0-z_{-1}|}\right) \log \Omega$.

Au centre de la Figure 25, on contrôle l'asymptotique en deux points du demi-cercle \mathcal{C} : pour $x = (\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})$, $\Omega^{1.5}\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - 4\sqrt{\pi}f_1 = \mathcal{O}(1)$, et pour $x = (0, 1)$, $\Omega^{1.5}\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - 2\sqrt{\pi}f_1 = \mathcal{O}(1)$. À droite de la Figure 25, on observe les asymptotiques dans différentes situations :

- $\Omega^2\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - \frac{f_3-f_2}{\lambda(1-\lambda)|z_0-z_1|} \log \Omega = \mathcal{O}(1)$ pour $x = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_0 \in (z_0, z_1)$, $\lambda = 0.7$;
- $\Omega^2\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - \frac{f_3+f_2}{2\lambda(1-\lambda)} \log \Omega = \mathcal{O}(1)$ pour $x = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_{-1} \in (z_{-1}, z_1)$, $\lambda = 0.7$;
- $\Omega^2\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) = \mathcal{O}(1)$ pour $x = (-1, 1) \in \{x_2 = 1\}$;
- $\Omega^2\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - \left(\frac{f_3-f_2}{|z_0-z_1|} - \frac{f_3-f_2}{|z_0-z_{-1}|}\right) \log \Omega = \mathcal{O}(1)$ pour $x = z_0$.

5.5. **Occultations.** On étudie un cas canonique de tomographie réflexive avec des occultations.

5.5.1. *Théorie.* Soient $r_1, r_2 > 0$ et $d > \frac{r_1+r_2}{2}$. On suppose que $\partial S = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est réunion des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, de rayons et centres respectifs r_1, r_2 et $z_1 = (-d, 0)$, $z_2 = (d, 0)$; voir Figure 26. Soient $f_1, f_2 > 0$ deux nombres distincts. On suppose : $f|_{\mathcal{C}_i} = f_i$, $\Theta = \mathbb{S}^1$, et $R > d + \max(r_1, r_2)$.

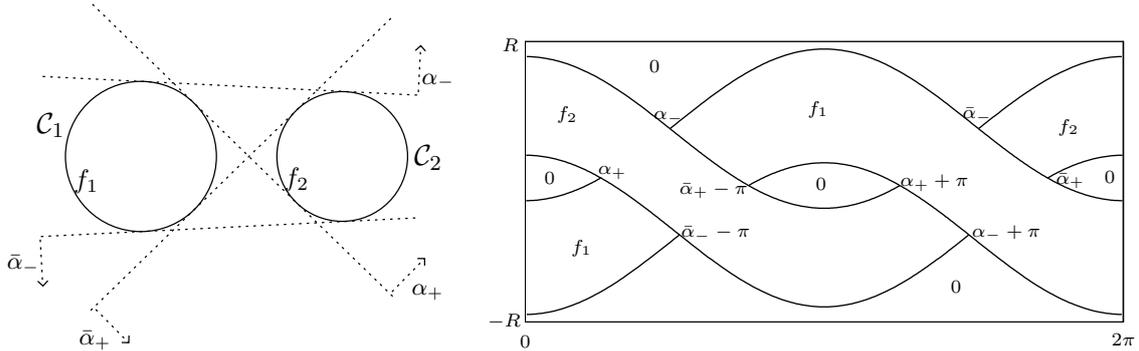


FIGURE 26. À gauche : scène composée de deux cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ avec physique f_1, f_2 . À droite : reflectogramme P associé. Les intersections des courbes de type a), en les angles indiqués à droite, correspondent aux tangentes communes à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, tracées en pointillés à gauche.

Après élimination des courbes de type c) ou d), les courbes de \mathcal{G} sont définies à l'aide des quatre droites tangentes aux deux cercles à la fois : les droites de type $D_\alpha = (z_1 + r_1\alpha, \alpha^\perp)$, où α est l'un des angles $\alpha_\pm = \left(\frac{r_1 \pm r_2}{2d}, \sqrt{1 - \left(\frac{r_1 \pm r_2}{2d}\right)^2}\right)$, $\bar{\alpha}_\pm = \left(\frac{r_1 \pm r_2}{2d}, -\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 \pm r_2}{2d}\right)^2}\right)$. Les courbes de \mathcal{G} sont en effet de la forme $\Gamma_\alpha(z, [\theta_0, \theta_1])$, où z parcourt un morceau de cercle et les θ_i sont orthogonaux à l'une des tangentes communes D_α . Ici, $E_\mathcal{G}^* = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}_a = \partial S = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ contient toute la scène,

$\mathcal{T}_a = \cup_{\alpha=\alpha_{\pm}, \bar{\alpha}_{\pm}} D_{\alpha}$ contient les tangentes communes à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , $\mathcal{S}_b, \mathcal{T}_b, \mathcal{S}_c, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_d$ sont vides. Au final, la reconstruction est $\mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$ sur ∂S , $\mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega)$ sur $\mathcal{T}_a \setminus \partial S$, et $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\partial S \cup \mathcal{T}_a)$. On précise quelques constantes asymptotiques modèles, résumées sur la Figure 27.

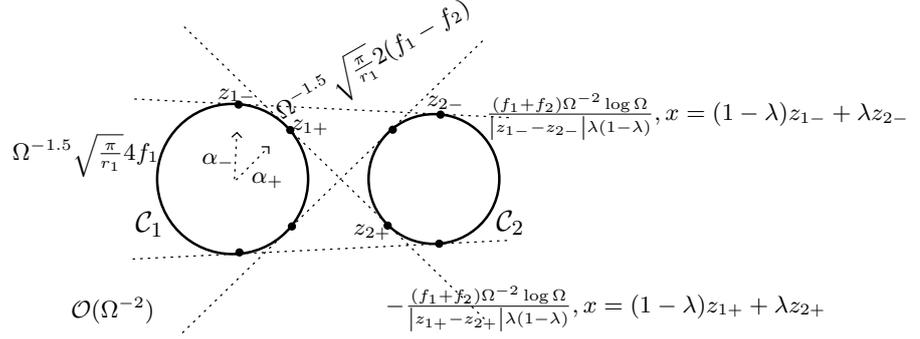


FIGURE 27. Géométrie et asymptotiques de reconstruction pour la scène de Figure 26.

- Sur ∂S , pour des raisons de symétrie, on focalise sur $x = z_1 + r_1 \beta \in \mathcal{C}_1$ avec $\beta \in [0, \pi]$. Pour $\beta \in [0, \alpha_+] \cup (\alpha_-, \pi]$, la situation en x est complètement similaire à celle où le convexe \mathcal{C}_1 serait seul (sans occultation). Pour $\beta \in (\alpha_+, \alpha_-)$, à cause de l'occultation de \mathcal{C}_1 par \mathcal{C}_2 pour les angles $\theta \in [\alpha_+, \alpha_-]$, une seule courbe de \mathcal{G} contribue (au lieu de deux sans occultation), et la pondération à considérer devient $f_1 - f_2$. Enfin, pour $\beta = \alpha_{\pm}$, on obtient trois contributions de type extrémités, avec pondérations f_1, f_1 et $f_1 - f_2$. Au total :

$$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{\pi}} \Omega^{1.5} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = \begin{cases} 4f_1 + \mathcal{O}(1), & \text{si } \beta \in [0, \alpha_+] \cup (\alpha_-, \pi], \\ 2(f_1 - f_2) + \mathcal{O}(1), & \text{si } \beta \in (\alpha_+, \alpha_-), \\ 3f_1 - f_2 + \mathcal{O}(1), & \text{si } \beta = \alpha_{\pm}, \end{cases} \quad \text{pour } x = z_1 + r_1 \beta.$$

- La droite D_{α_-} , tangente à l'enveloppe convexe de ∂S , intersecte \mathcal{C}_1 , resp. \mathcal{C}_2 , en $z_{1-} = z_1 + r_1 \alpha_-$, $z_{2-} = z_2 + r_2 \alpha_-$. Soit $x = (1 - \lambda)z_{1-} + \lambda z_{2-} \in D_{\alpha_-}$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que D_{α_-} est la seule droite de \mathcal{T}_a qui contient x . On lit les contributions en provenance des intersections des courbes de \mathcal{G} , aux angles α_- et $\alpha_- + \pi$. Après simplification :

$$\frac{\Omega^2}{\log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = \frac{f_1 + f_2}{|z_{1-} - z_{2-}| \lambda(1 - \lambda)} + \mathcal{O}(1), \quad x = (1 - \lambda)z_{1-} + \lambda z_{2-}.$$

Cette expression explose quand x approche l'un des points de contact z_{1-}, z_{2-} et au contraire, elle tend vers zéro quand x s'en éloigne. On voit également qu'elle est positive lorsque x est dans l'enveloppe convexe de ∂S ($0 < \lambda < 1$), et négative sinon.

Remarque. Cette expression, l'expression sur la droite de complétion du croissant en un convexe, et l'expression sur une droite contenant un côté d'un polygone, sont de la même forme. ■

- La droite D_{α_+} est tangente à \mathcal{C}_1 , resp. \mathcal{C}_2 , en $z_{1+} = z_1 + r_1 \alpha_+$, $z_{2+} = z_2 - r_2 \alpha_+$; elle pénètre dans l'enveloppe convexe de ∂S . Soit $x = (1 - \lambda)z_{1+} + \lambda z_{2+} \in D_{\alpha_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que D_{α_+} est la seule droite de \mathcal{T}_a qui contient x . On lit les contributions en provenance des intersections des courbes de \mathcal{G} , aux angles α_+ et $\alpha_+ + \pi$. Après simplification :

$$\frac{\Omega^2}{\log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = -\frac{f_1 + f_2}{|z_{1+} - z_{2+}| \lambda(1 - \lambda)} + \mathcal{O}(1), \quad x = (1 - \lambda)z_{1+} + \lambda z_{2+}$$

On obtient une expression similaire à celle de la droite D_{α_-} , mais avec un signe moins. En particulier, l'artefact obtenu ici est négatif dans l'enveloppe convexe de ∂S , mais est positif à l'extérieur.

Au final, on reconstruit ici les objets convexes de la scène, avec comme artefacts les tangentes communes aux objets. Les constantes asymptotiques donnent des informations supplémentaires, comme le signe et le comportement des artefacts.

5.5.2. *Contrôle qualité.* On considère les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de centres $z_1 = (-2, 0)$ et $z_2 = (2, 0)$, de rayons $r_1 = 1.5$ et $r_2 = 1.3$, et intensités $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$. La reconstruction \mathcal{H}_{Ω} avec $\Omega = \frac{2^5 \pi}{1.2}$, représentée à gauche de la Figure 28, est fidèle à la Figure 27. À droite de la Figure 28, on contrôle l'asymptotique le long d'une droite artefact : $\frac{\Omega^2}{\log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](\lambda z_{2+} + (1 - \lambda)z_{1+}) \sim -\frac{f_1 + f_2}{|z_{1+} - z_{2+}| \lambda(1 - \lambda)}$, en traçant chacun des membres pour $\lambda \in [-5, -0.2] \cup [0.2, 0.8] \cup [1.2, 5]$, avec $\Omega = 2^{15}$.

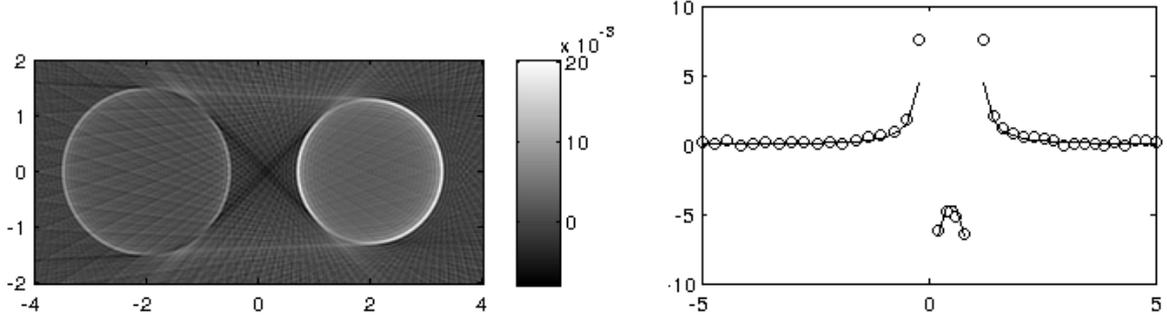


FIGURE 28. Cas des cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . À gauche, reconstruction \mathcal{H}_Ω pour $\Omega = \frac{2^5\pi}{1.2}$. À droite, en fonction de λ : (o) $\frac{\Omega^2}{\log \Omega} \mathcal{H}_\Omega(\lambda z_{2+} + (1-\lambda)z_{1+})$ avec $\Omega = 2^{15}$, (-) asymptotique $-\frac{f_1+f_2}{|z_{1+}-z_{2+}|\lambda(1-\lambda)}$.

À gauche de la Figure 29, on met numériquement en évidence les asymptotiques de la forme $\Omega^{1.5} \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - \sqrt{\frac{\pi}{r_1}} C = o(1)$, pour $x \in \mathcal{C}_1$, et C une constante asymptotique associée. À droite de la Figure 29, on met en évidence les asymptotiques de la forme $\Omega^2 \mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](x) - C \log \Omega = \mathcal{O}(1)$, avec x fixé sur l'une des tangentes (z_{1+}, z_{2+}) et (z_{1-}, z_{2-}) , et C une constante associée.

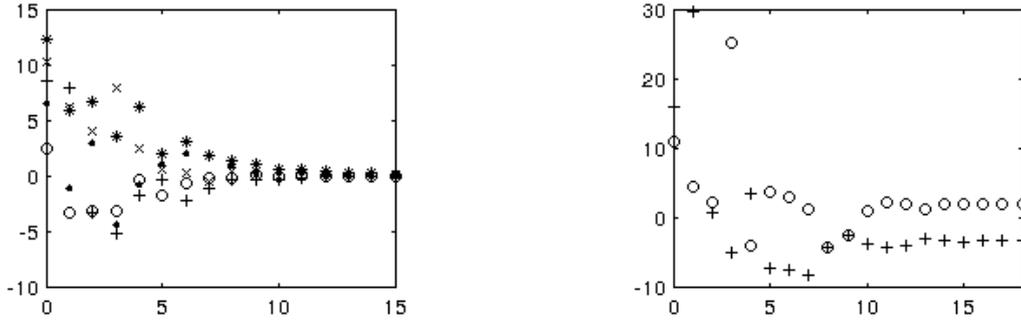


FIGURE 29. Cas des cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . À gauche, en fonction de $\log_2 \Omega$, $\Omega^{1.5} \mathcal{H}_\Omega(x) - \sqrt{\frac{\pi}{r_1}} C$, $x = z_1 + r_1 \beta \in \mathcal{C}_1$ avec : (o) $\beta = \frac{2\pi}{3}$, $C = 4f_1$, (+) $\beta = \frac{\alpha_+}{2}$, $C = 4f_1$, (.) $\beta = \alpha_-$, $C = 3f_1 - f_2$, (x) $\beta = \alpha_+$, $C = 3f_1 - f_2$, (*) $\beta = \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}$, $C = 2(f_1 - f_2)$. À droite, en fonction de $\log_2 \Omega$, $\Omega^2 \mathcal{H}_\Omega(x) - C \log \Omega$, pour : (o) $x = 0.3z_{1-} + 0.7z_{2-}$, $C = \frac{f_1+f_2}{0.3 \cdot 0.7 |z_{1-} - z_{2-}|}$, (+) $x = 0.3z_{1+} + 0.7z_{2+}$, $C = \frac{-(f_1+f_2)}{0.3 \cdot 0.7 |z_{1+} - z_{2+}|}$.

5.6. Troncature angulaire. On étudie un cas canonique de tomographie réflective en angle limité.

5.6.1. Théorie. On suppose que la scène est un cercle : $\partial S = \{\gamma(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$, avec $\gamma(\theta) = (-2, 0) - 3\theta$ d'intensité $f|_{\partial S} = 1$, avec un écran assez grand : $R = 5.5$. Mais, on suppose que l'on tourne autour de l'objet sur une portion limitée : l'angle de projection θ parcourt $\Theta = [0, \frac{\pi}{3}]$. Le réflectogramme P est représenté sur la Figure 30.

On peut éliminer de \mathcal{G} les courbes qui n'intersectent pas l'intérieur du support de P . Mais, contrairement aux cas précédents, la périodicité est perdue, donc on ne peut pas éliminer de l'étude toutes les courbes de type d). Il reste à examiner les contributions des courbes de :

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_a(\gamma, \Theta), \Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), \Theta), \Gamma_d(0, [-5, 1]), \Gamma_d(\frac{\pi}{3}, [-4, 2])\}.$$

L'étude contient tous les points : $E_{\mathcal{G}}^* = \mathbb{R}^2$. On reconstruit deux portions limitées du convexe ∂S , avec des artefacts le long des tangentes aux extrémités : $\mathcal{S}_a = \{\gamma(\theta), \gamma(\theta + \pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]\}$, $\mathcal{T}_a = \{x_1 = -5\} \cup \{x_1 = 1\} \cup \{\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = -4\} \cup \{\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = 2\} = \mathcal{T}_d$. Ici, $\mathcal{S}_b, \mathcal{T}_b, \mathcal{S}_c, \mathcal{T}_c$ sont vides. On obtient une reconstruction d'ordre $\mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$ sur \mathcal{S}_a , $\mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega)$ sur $\mathcal{T}_a \setminus \mathcal{S}_a$, et $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$ sinon. À droite de la Figure 30, \mathcal{S}_a est en gras, et \mathcal{T}_a est en pointillés. On précise quelques contributions canoniques.

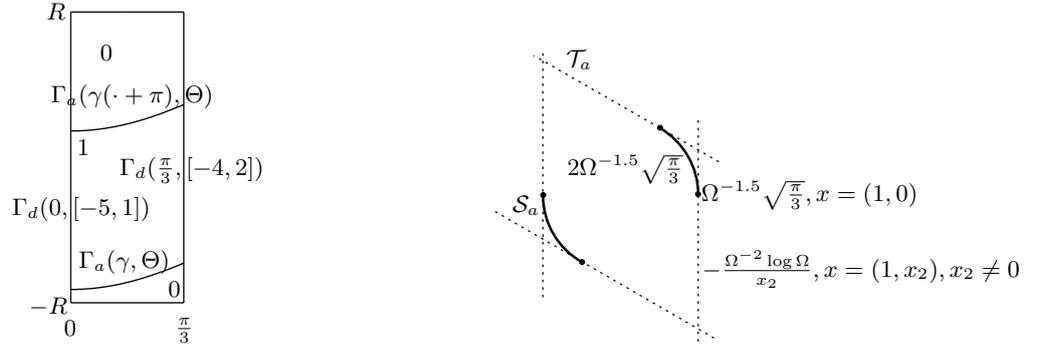


FIGURE 30. À gauche : réflectogramme P d'un cercle, limité an angle. À droite : géométrie et asymptotique de la reconstruction heuristique associée.

- Sur \mathcal{S}_a , en $x = \gamma(\alpha)$, avec $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\pi, \pi + \frac{\pi}{3}]$, on obtient une seule contribution, à cause de la limitation en angle :

$$\Omega^{1.5}\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](\gamma(\alpha)) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} + \mathcal{O}(1), & \text{si } \alpha \in (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\pi, \pi + \frac{\pi}{3}), \\ \sqrt{\frac{\pi}{3}} + \mathcal{O}(1), & \text{si } \alpha \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \pi + \frac{\pi}{3}\}. \end{cases}$$

- Sur \mathcal{T}_a , en $x = (1, x_2)$ avec $x_2 \neq 0$ tel que $x_1 = 1$ est la seule droite de \mathcal{T}_a contenant x , on somme les contributions de $A[\Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), \Theta)]$ et $A[\Gamma_d(0, [-5, 1])]$, obtenues en $(\theta, s) = (0, 1)$ dans le réflectogramme :

$$\frac{\Omega^2}{\log\Omega}\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](1, x_2) = \frac{-1}{(1+x_2^2)x_2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} + \mathcal{O}(1) = -\frac{1}{x_2} + \mathcal{O}(1).$$

Ici, la réduction de la plage angulaire réduit la reconstruction de l'objet aux parties visibles sur les bords des silhouettes, et ajoute des artefacts sur les tangentes aux bords des morceaux reconstruits.

5.6.2. *Contrôle qualité.* À gauche de la Figure 31, pour $\Omega = \frac{2^4\pi}{1.2}$, la reconstruction \mathcal{H}_Ω a la forme prévue par l'asymptotique. À droite de cette Figure, on obtient numériquement l'asymptotique sur $\gamma : \Omega^{1.5}\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](\gamma(\alpha)) - C\sqrt{\frac{\pi}{3}} = \mathcal{O}(1)$ pour $\alpha = \frac{\pi}{6}, 0$, $C = 2, 1$; ainsi que l'asymptotique sur un artefact : $\Omega^2\mathcal{R}^*[P \star \psi_\Omega](1, x_2) + \frac{\log\Omega}{x_2} = \mathcal{O}(1)$ pour $x_2 = 0.5$.

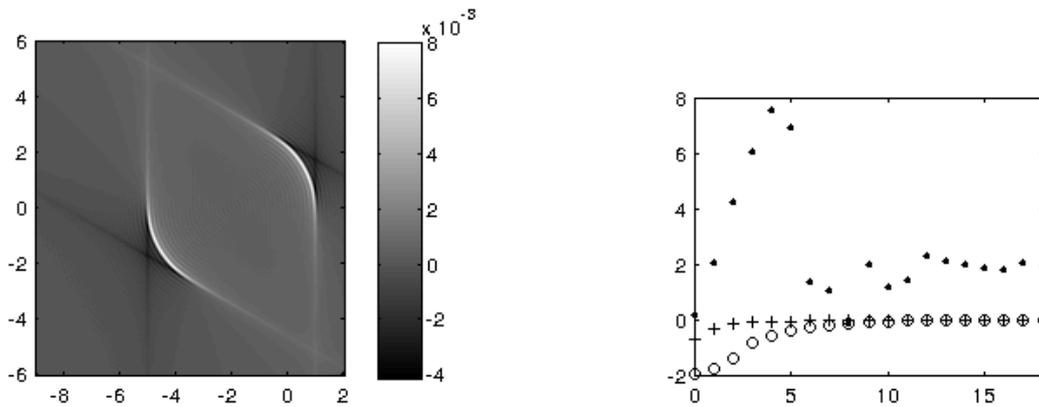


FIGURE 31. Cas de troncature angulaire. À gauche, reconstruction \mathcal{H}_Ω pour $\Omega = \frac{2^4\pi}{1.2}$. À droite, en fonction de $\log_2 \Omega$: $\Omega^{1.5}\mathcal{H}_\Omega(\gamma(\alpha)) - C\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ pour (o) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $C = 2$, (+) $\alpha = 0$, $C = 1$, et (.) $\Omega^2\mathcal{H}_\Omega(1, x_2) + \frac{\log\Omega}{x_2}$ pour $x_2 = 0.5$.

5.7. **Troncature spatiale.** On étudie un cas canonique de tomographie réfléctive d'un objet coupé par le capteur.

5.7.1. *Théorie.* On suppose que la scène est un cercle : $\partial S = \{\gamma(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$, avec $\gamma(\theta) = (-2, 0) - 3\theta$ d'intensité $f|_{\partial S} = 1$, et que le tour est complet : $\Theta = S^1$. Mais, on suppose $R = 4$, ce qui tronque la projection de l'objet ∂S pour certains angles. Le réflectogramme P est représenté sur la Figure 32.

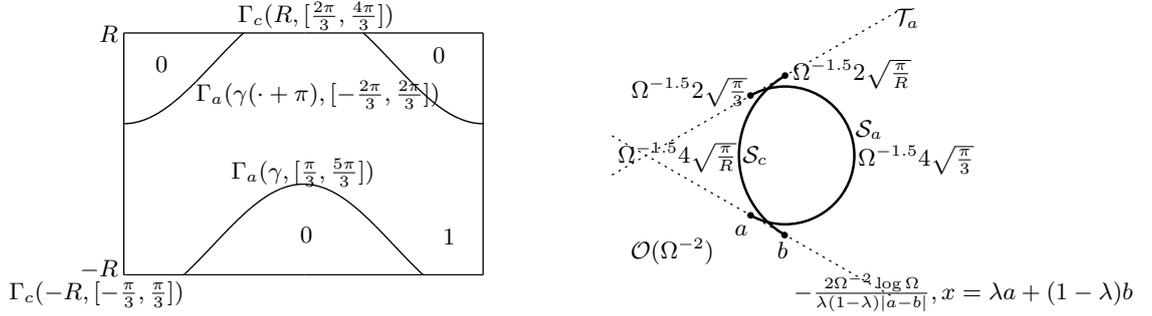


FIGURE 32. À gauche : réflectogramme P d'un cercle, avec limitation en espace. À droite : géométrie et asymptotique de la reconstruction heuristique associée.

Par périodicité, il n'est pas nécessaire de considérer les courbes de type d). Mais, à cause de la troncature en espace, on doit prendre en considération des courbes de type c) : celles qui intersectent l'intérieur du support de P . Il reste ainsi à examiner les contributions de :

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_a(\gamma, [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]), \Gamma_a(\gamma(\cdot + \pi), [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]), \Gamma_c(-4, [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]), \Gamma_c(4, [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}])\}.$$

Alors $E_{\mathcal{G}}^* = \mathbb{R}^2$. La reconstruction principale, d'ordre $\mathcal{O}(\Omega^{-1.5})$, contient une portion de la scène : $\mathcal{S}_a = \{\gamma(\theta), \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]\}$, et une portion de cercle artefact : $\mathcal{S}_c = \{-4(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]\}$. Les tangentes aux extrémités de ces morceaux sont données par $\mathcal{T}_a = \{\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = -4\} \cup \{\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = -4\} = \mathcal{T}_c$. Dans $\mathcal{T}_a \setminus (\mathcal{S}_a \cup \mathcal{S}_c)$, la reconstruction est $\mathcal{O}(\Omega^{-2} \log \Omega)$. Enfin, la reconstruction est $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{S}_a \cup \mathcal{S}_c \cup \mathcal{T}_a)$. On donne quelques contributions modèles.

- Pour $x = \gamma(\theta) \in \mathcal{S}_a \setminus \mathcal{S}_c$, la reconstruction vérifie :

$$\Omega^{1.5} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](\gamma(\theta)) = \begin{cases} 4\sqrt{\frac{\pi}{3}} + \mathcal{O}(1), & \text{si } \theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}), \\ 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} + \mathcal{O}(1), & \text{si } \theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}. \end{cases}$$

- Pour $x = -R\theta \in \mathcal{S}_c \setminus \mathcal{S}_a$,

$$\Omega^{1.5} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](-R\theta) = \begin{cases} 4\sqrt{\frac{\pi}{R}} + \mathcal{O}(1), & \text{si } \theta \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), \\ 2\sqrt{\frac{\pi}{R}} + \mathcal{O}(1), & \text{si } \theta \in \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}. \end{cases}$$

- Pour $x \in \mathcal{T}_a$ vérifiant : $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, avec $\theta := (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $a := \gamma(\theta)$ et $b := -R\theta$. On suppose que $\{x \cdot \theta = -R\}$ est la seule droite de \mathcal{T}_a contenant x . En lisant les contributions en $(\theta, s) = (\pi/3, -R)$ et $(\theta, s) = (4\pi/3, R)$ dans le réflectogramme, on obtient après simplifications :

$$\frac{\Omega^2}{\log \Omega} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = -\frac{2}{\lambda(1-\lambda)|a-b|} + \mathcal{O}(1), \quad x = \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Ici, la troncature liée au capteur réduit la reconstruction de l'objet. Le morceau disparu est remplacé par un arc de cercle. À cela s'ajoutent des droites artefacts, tangentes à la fois à l'objet et à cet arc de cercle ; avec une constante asymptotique dont la forme a déjà été discutée.

5.7.2. *Contrôle qualité.* À gauche de la Figure 33, pour $\Omega = \frac{2^4\pi}{1.2h}$, la reconstruction \mathcal{H}_{Ω} a la forme prévue par l'asymptotique. À droite de cette Figure, on vérifie numériquement l'asymptotique sur la portion de cercle artefact : $\Omega^{1.5} \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](-R \cos \alpha, -R \sin \alpha) - C\sqrt{\frac{\pi}{R}} = \mathcal{O}(1)$ pour $\alpha = -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$, $C = 4, 2$; ainsi que l'asymptotique sur une droite artefact : $\Omega^2 \mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](\lambda a + (1-\lambda)b) + \frac{2 \log \Omega}{\lambda(1-\lambda)|a-b|} = \mathcal{O}(1)$ pour $\lambda = 0.5$.

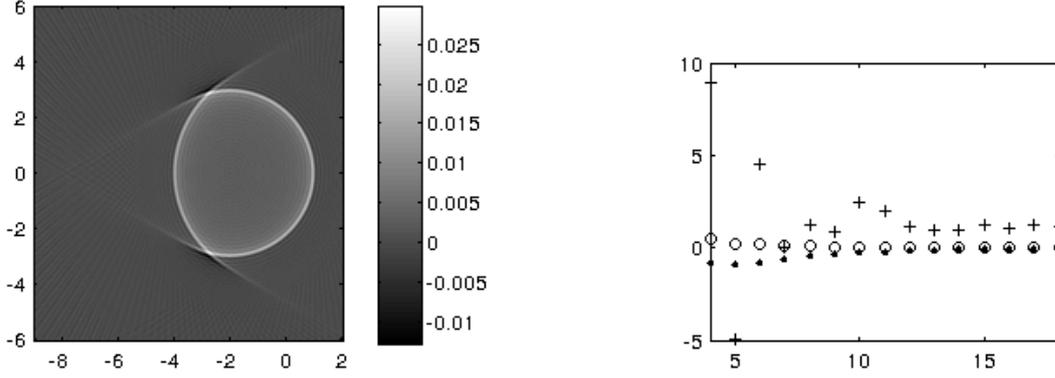


FIGURE 33. Cas de troncature spatiale. À gauche, reconstruction \mathcal{H}_Ω pour $\Omega = \frac{2^4\pi}{1.2}$. À droite, en fonction de $\log_2 \Omega$: $\Omega^{1.5}\mathcal{H}_\Omega(-R\alpha) - C\sqrt{\frac{\pi}{R}}$ pour (o) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $C = 4$, (.) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $C = 2$, et (+) $\Omega^2\mathcal{H}_\Omega(0.5a + 0.5b) + \frac{2\log \Omega}{0.5-0.5|a-b|}$.

6. CONCLUSION

6.1. Synthèse. Ces travaux constituent une consolidation mathématique de la tomographie réfléctive, à l'aide d'une analyse asymptotique. Les résultats obtenus permettent de relier la géométrie de la scène à imager avec la reconstruction heuristique, par l'intermédiaire des courbes de singularité du jeu de données. Les ordres de reconstruction les plus élevés apparaissent sur les ensembles suivants.

- Sur des portions convexes de la scène, et sur des points isolés comme des coins ; ces parties sont associées à des courbes de singularité. Cet ensemble est pertinent : il est inclus dans l'ensemble des points à reconstruire.
- Sur des droites, associées à des points d'intersection de courbes de singularité ; ces droites peuvent servir de complétion pour les ensembles précédents et être en partie pertinentes, mais sont en général des artefacts.
- Sur des arcs de cercles, artefacts issus de la troncature spatiale.

Nous avons présenté et illustré numériquement différents exemples canoniques : objet convexe ou non, objet régulier ou avec coins, texture régulière ou avec saut, scène avec ou sans occultation ; et nous avons illustré l'impact de la limitation en angle ou en espace. Plus généralement, les résultats de cet article apportent une forme de justification/quantification de la tomographie réfléctive, pour de nombreuses configurations possibles.

6.2. Perspectives. Pour aller plus loin sur le plan mathématique, une piste à explorer est celle de l'écriture d'un développement asymptotique uniforme, au lieu de ponctuel ; voir par exemple [4]. Cela permettrait d'avoir une expression asymptotique pour l'ensemble de la reconstruction, au lieu de la reconstruction calculée en un point. Une autre piste à explorer est celle de l'analyse microlocale : déterminer les ensembles de singularité d'une reconstruction par tomographie réfléctive, dans l'esprit de [6, 10]. On peut s'attendre à ce que les ensembles d'ordre les plus élevés susmentionnés jouent un rôle fondamental dans une telle analyse.

Concernant les applications, nous avons obtenu différents résultats structurels et quantitatifs sur le volume de données et sur la reconstruction heuristique associée. L'auteur espère qu'ils ouvriront la voie pour perfectionner les reconstructions de tomographie réfléctive, ou pour accélérer les algorithmes de calculs.

ANNEXE A. ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DE FOURIER

Nous présentons la formule de type phase stationnaire utilisée pour déterminer l'asymptotique mono-fréquentielle. Elle est basée sur le résultat suivant, issu de [5] :

Théorème A.1. *Soit $\lambda > 0$. Soit f une fonction N fois continûment différentiable sur $[a, b]$. Soit φ une fonction dérivable telle que $\varphi' : x \mapsto (x - a)^{\rho_a - 1}(b - x)^{\rho_b - 1}\varphi_1(x)$ avec $\rho_a, \rho_b \geq 1$ et φ_1 une*

fonction strictement positive qui est N fois continûment différentiable sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda\varphi(x)}dx = A(\lambda) + B(\lambda),$$

$$A(\lambda) = e^{i\lambda\varphi(a)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!\rho_a} \Gamma\left(\frac{n+1}{\rho_a}\right) k^{(n)}(0) e^{i\pi\frac{n+1}{2\rho_a}} \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_a}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_a}}\right),$$

$$\text{avec } u^{\rho_a} := \varphi(x) - \varphi(a), k(u) := f(x) \frac{dx}{du},$$

$$B(\lambda) = -e^{i\lambda\varphi(b)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!\rho_b} \Gamma\left(\frac{n+1}{\rho_b}\right) l^{(n)}(0) e^{-i\pi\frac{n+1}{2\rho_b}} \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_b}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_b}}\right),$$

$$\text{avec } v^{\rho_b} := \varphi(b) - \varphi(x), l(v) := f(x) \frac{dx}{dv}.$$

On en déduit l'expression d'une transformée en cosinus (avec un déphasage) :

Corollaire A.2. Soit $\lambda > 0$. Soit f une fonction N fois continûment différentiable sur un intervalle $[a, b]$. Soit φ une fonction, supposée assez régulière, et telle que les solutions $\alpha_j, 1 \leq j \leq J-1$ de $\varphi\varphi'(x) = 0$ dans (a, b) déterminent une partition de $[a, b]$: $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_J = b$. Sur chaque $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, on suppose $\varepsilon_j\varphi'(x) = (x - \alpha_j)^{\rho_j-1}(\alpha_{j+1} - x)^{\rho_{j+1}-1}\varphi_j(x)$, avec $\varphi_j > 0$ sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, $\rho_j \geq 1$ l'ordre d'annulation de $\varphi - \varphi(\alpha_j)$, et $\varepsilon_j = \text{sign } \varphi^{(\rho_j)}(\alpha_j) = (-1)^{\rho_{j+1}-1} \text{sign } \varphi^{(\rho_{j+1})}(\alpha_{j+1})$. Soit une constante réelle C . Alors

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda\varphi(x) + C)dx = \sum_{j=0}^J M_j(\lambda), \quad \text{avec } M_j(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} K_j^n \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_j}} s_j^n(\lambda) + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_j}}\right),$$

correspondant à la contribution du point critique α_j , $K_j^n = \frac{1}{n!\rho_j} \Gamma\left(\frac{n+1}{\rho_j}\right)$, et les fonctions $s_j^n(\lambda)$ déterminées par les relations (A.1), (A.2), et (A.3).

Démonstration. On se ramène au Théorème sur chaque $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$:

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda\varphi(x) + C)dx = \sum_{j=0}^{J-1} \Re e^{i\varepsilon_j C} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(x) e^{i\lambda\varepsilon_j\varphi(x)} dx;$$

sur le morceau $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, il ne reste ainsi que les contributions des bornes α_j et α_{j+1} :

$$A_j(\lambda) = \Re e^{i\varepsilon_j C} e^{i\lambda\varepsilon_j\varphi(\alpha_j)} \sum_{n=0}^{N-1} K_j^n k_j^{(n)}(0) e^{i\pi\frac{n+1}{2\rho_j}} \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_j}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_j}}\right),$$

$$\text{avec } u^{\rho_j} := \varepsilon_j(\varphi(x) - \varphi(\alpha_j)), k_j(u) := f(x) \frac{dx}{du},$$

$$B_j(\lambda) = -\Re e^{i\varepsilon_j C} e^{i\lambda\varepsilon_j\varphi(\alpha_{j+1})} \sum_{n=0}^{N-1} K_{j+1}^n l_j^{(n)}(0) e^{-i\pi\frac{n+1}{2\rho_{j+1}}} \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_{j+1}}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_{j+1}}}\right),$$

$$\text{avec } v^{\rho_{j+1}} := \varepsilon_j(\varphi(\alpha_{j+1}) - \varphi(x)), l_j(v) := f(x) \frac{dx}{dv},$$

et donc :

$$A_j(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} K_j^n k_j^{(n)}(0) \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_j}} \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + \varepsilon_j\pi\frac{n+1}{2\rho_j} + C\right) + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_j}}\right),$$

$$B_j(\lambda) = -\sum_{n=0}^{N-1} K_{j+1}^n l_j^{(n)}(0) \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_{j+1}}} \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_{j+1}) - \varepsilon_j\pi\frac{n+1}{2\rho_{j+1}} + C\right) + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{N}{\rho_{j+1}}}\right).$$

La contribution de l'extrémité gauche $a = \alpha_0$, resp. droite $b = \alpha_J$, est $M_0(\lambda) = A_0(\lambda)$, resp. $M_J(\lambda) = B_{J-1}(\lambda)$. La contribution globale d'un point intérieur $\alpha_j, 1 \leq j \leq J-1$ est $M_j(\lambda) = A_j(\lambda) + B_{j-1}(\lambda)$. Chaque $M_j(\lambda)$ a la forme attendue, avec :

$$s_0^n(\lambda) := k_0^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(a) + \frac{\varepsilon_0(n+1)\pi}{2\rho_0} + C\right), \quad (\text{A.1})$$

$$s_J^n(\lambda) := -l_{J-1}^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(b) - \frac{\varepsilon_{J-1}(n+1)\pi}{2\rho_J} + C\right), \quad (\text{A.2})$$

$$s_j^n(\lambda) := k_j^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + \frac{\varepsilon_j\pi(n+1)}{2\rho_j} + C\right) - l_{j-1}^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) - \frac{\varepsilon_{j-1}\pi(n+1)}{2\rho_j} + C\right), 1 \leq j \leq J-1.$$

Pour simplifier $s_j^n(\lambda), 1 \leq j \leq J-1$, on montre d'abord que $k_j^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}l_{j-1}^{(n)}(0)$. On pose

$$\psi_1(x) := \frac{\varepsilon_j\varphi'(x)}{(x - \alpha_j)^{\rho_j-1}} = \frac{\varepsilon_{j-1}\varphi'(x)}{(\alpha_j - x)^{\rho_j-1}}, \quad \psi_0(x) := \frac{\varepsilon_j(\varphi(x) - \varphi(\alpha_j))}{(x - \alpha_j)^{\rho_j}} = \frac{\varepsilon_{j-1}(\varphi(\alpha_j) - \varphi(x))}{(\alpha_j - x)^{\rho_j}}.$$

Alors sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, $\frac{dx}{du} = \rho_j \frac{\psi_0(x(u))^{1-\frac{1}{\rho_j}}}{\psi_1(x(u))}$ et sur $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, $\frac{dx}{dv} = -\rho_j \frac{\psi_0(x(v))^{1-\frac{1}{\rho_j}}}{\psi_1(x(v))}$. En posant $F_0(x) := \rho_j f(x) \frac{\psi_0(x)^{1-\frac{1}{\rho_j}}}{\psi_1(x)}$, et $F_{n+1}(x) := \rho_j F'_n(x) \frac{\psi_0(x)^{1-\frac{1}{\rho_j}}}{\psi_1(x)}$, on montre (récurrence) : $k_j^{(n)}(u) = F_n(x(u))$, et $l_{j-1}^{(n)}(v) = (-1)^{n-1}F_n(x(v))$, d'où $k_j^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}l_{j-1}^{(n)}(0)$ en choisissant $u = v = 0$. On a donc :

$$s_j^n(\lambda) = k_j^{(n)}(0) \left[\cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + \frac{\varepsilon_j\pi(n+1)}{2\rho_j} + C\right) + (-1)^n \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) - \frac{\varepsilon_{j-1}\pi(n+1)}{2\rho_j} + C\right) \right],$$

et donc

$$(1 \leq j \leq J-1), \quad s_j^n(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \rho_j \text{ pair, } n \text{ impair,} \\ 2k_j^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + \frac{\varepsilon_j(n+1)\pi}{2\rho_j} + C\right) & , \rho_j \text{ pair, } n \text{ pair,} \\ -2k_j^{(n)}(0) \sin\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + C\right) \sin\frac{\varepsilon_j(n+1)\pi}{2\rho_j} & , \rho_j \text{ impair, } n \text{ impair,} \\ 2k_j^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + C\right) \cos\frac{(n+1)\pi}{2\rho_j} & , \rho_j \text{ impair, } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

□

Ce résultat donne la forme asymptotique de $\int_a^b f(x) \cos(\lambda\varphi(x) + C) dx$, à l'aide de contributions en provenance uniquement des bornes $\alpha_0 = a$ et $\alpha_J = b$ de l'intervalle et des points critiques intérieurs $\alpha_j, 1 \leq j \leq J-1$. Pour chacun de ces points α_j , la contribution du terme d'indice $0 \leq n \leq N-1$ de la somme est

$$K_j^n \lambda^{-\frac{n+1}{\rho_j}} s_j^n(\lambda).$$

La structure de ce terme dépend de la forme de $s_j^n(\lambda)$ qui est une fonction : oscillante, constante, voire identiquement nulle.

A.1. Point intérieur de phase nulle mais non stationnaire. Soit $\alpha_j, 1 \leq j \leq J-1$, un point intérieur d'annulation de phase avec phase non stationnaire : $\varphi(\alpha_j) = 0$ et $\varphi'(\alpha_j) \neq 0$, i.e. $\rho_j = 1$, alors pour tout entier n , on obtient $s_j^{(n)}(\lambda) = 0$: un tel point α_j ne contribue pas (et, en fait, n'est pas critique).

A.2. Point critique intérieur d'annulation de phase et de ses dérivées. Soit un point intérieur $\alpha_j, 1 \leq j \leq J-1$ en lequel la phase s'annule et les dérivées s'annulent jusqu'à l'ordre $\rho_j - 1 \geq 1$: $\varphi(\alpha_j) = \varphi'(\alpha_j) = \dots = \varphi^{(\rho_j-1)}(\alpha_j) = 0$. Les fonctions s_j^n sont alors constantes.

Si ρ_j est pair, alors $s_j^n(\lambda) = 2k_j^{(n)}(0) \cos\left(\frac{\varepsilon_j(n+1)\pi}{2\rho_j} + C\right) \mathbb{1}_{n=2p}$: seuls les termes d'indice $n = 2p$ pair contribuent. Cette contribution est nulle si le cos est nul : $\frac{\varepsilon_j(n+1)\pi}{2\rho_j} + C = (2m+1)\frac{\pi}{2}$.

Si ρ_j est impair, alors $s_j^n(\lambda) = 2k_j^{(n)}(0) [\cos\frac{(n+1)\pi}{2\rho_j} \cos(C) \mathbb{1}_{n=2p} - \varepsilon_j \sin\frac{(n+1)\pi}{2\rho_j} \sin(C) \mathbb{1}_{n=2p+1}]$. Si $C = m\pi$, seuls les termes d'indice pair contribuent, tandis que si $C = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, seuls les termes d'indice impair contribuent. Par ailleurs, la contribution d'un terme d'indice pair $n = 2p$ s'annule si $n = (2m+1)\rho_j - 1$, tandis que celle d'un terme d'indice impair $n = 2p+1$ s'annule si $n = 2m\rho_j - 1$.

A.3. Point critique intérieur avec dérivées de phase nulles, mais phase non nulle. Soit un point intérieur $\alpha_j, 1 \leq j \leq J-1$ en lequel la phase ne s'annule pas, mais les dérivées s'annulent jusqu'à l'ordre $\rho_j - 1 \geq 1$: $\varphi(\alpha_j) \neq 0$ et $\varphi'(\alpha_j) = \dots = \varphi^{(\rho_j-1)}(\alpha_j) = 0$. Les fonctions s_j^n sont génériquement oscillantes.

Si ρ_j est pair, $s_j^n = 2k_j^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(\alpha_j) + \frac{\varepsilon_j(n+1)\pi}{2\rho_j} + C\right) \mathbb{1}_{n=2p}$: seuls les termes d'indice n pair contribuent.

Si ρ_j est impair, $s_j^n = 2k_j^{(n)}(0)[\cos\frac{(n+1)\pi}{2\rho_j} \cos(\lambda\varphi(\alpha_j) + C) \mathbb{1}_{n=2p} - \varepsilon_j \sin\frac{(n+1)\pi}{2\rho_j} \sin(\lambda\varphi(\alpha_j) + C) \mathbb{1}_{n=2p+1}]$. Ici, la contribution du terme d'indice pair $n = 2p$ s'annule si $n = (2m+1)\rho_j - 1$, tandis que celle du terme d'indice impair $n = 2p+1$ s'annule si $n = 2m\rho_j - 1$.

A.4. Bornes. Si la phase s'annule en la borne inférieure a : $\varphi(a) = 0$, les s_0^n sont constantes : $s_0^n = k_0^{(n)}(0) \cos\left(\frac{\varepsilon_0\pi(n+1)}{2\rho_0} + C\right)$, constante qui vaut 0 si n vérifie $\frac{\varepsilon_0\pi(n+1)}{2\rho_0} + C = (2m+1)\frac{\pi}{2}$. De manière similaire, si la phase s'annule en b : $\varphi(b) = 0$, $s_J^n = -l_{J-1}^{(n)}(0) \cos\left(-\frac{\varepsilon_{J-1}\pi(n+1)}{2\rho_J} + C\right)$ est constante, constante qui vaut 0 si $-\frac{\varepsilon_{J-1}\pi(n+1)}{2\rho_J} + C = (2m+1)\frac{\pi}{2}$.

Si $\varphi(a) \neq 0$, $s_0^n = k_0^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(a) + \frac{\varepsilon_0(n+1)\pi}{2\rho_0} + C\right)$ est en général oscillante. De même, si $\varphi(b) \neq 0$, $s_J^n = -l_{J-1}^{(n)}(0) \cos\left(\lambda\varphi(b) - \frac{\varepsilon_{J-1}\pi(n+1)}{2\rho_J} + C\right)$ est en général oscillante.

A.5. Synthèse. Le développement asymptotique de $\int_a^b f \cos(\lambda\varphi + C)$ est une superposition de contributions provenant des bornes, et des points intérieurs d'annulation de la dérivée de phase. Chaque contribution effective est de la forme $K\lambda^{-\kappa}s(\lambda)$ avec K et $\kappa > 0$ des constantes, et s une fonction ; la constante κ est de la forme $\kappa = \frac{n+1}{\rho}$ avec $n \geq 0$ un entier, et $\rho - 1 \geq 0$ l'ordre d'annulation de la dérivée de phase.

ANNEXE B. ASYMPTOTIQUE PAR TRANSFORMATIONS DE MELLIN

L'asymptotique multi-fréquentielle a été obtenue à l'aide de la méthode des transformées de Mellin, présentée abondamment dans [4] et ses références. Nous en rappelons les grandes lignes.

Définition B.1. La transformée de Mellin d'une fonction localement intégrable f est définie, lorsque celà a un sens, par :

$$M[f, z] = \int_0^\infty f(t)t^{z-1}dt.$$

Si $f(t) = \mathcal{O}_{t \rightarrow 0}(t^{-\alpha})$ et $f(t) = \mathcal{O}_{t \rightarrow \infty}(t^{-\beta})$, avec $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, alors l'intégrale $M[f, z]$ est absolument convergente et est holomorphe dans la bande $\alpha < \Re z < \beta$.

Proposition B.2. *Sous les hypothèses de la définition, dans une bande $\alpha < \Re z < \beta$ de convergence absolue, si $\alpha < c < C < \beta$, alors :*

$$\sup\{|M[f; x + iy]|, x \in [c, C]\} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$$

À titre d'exemple, on trouve dans les tables :

- la fonction d'Euler $M[e^{-t}, z] = \Gamma(z)$ converge absolument et est holomorphe dans $0 < \Re z$;
- $M[e^{it}, z] = \lim_{T \rightarrow \infty} M[e^{it} \mathbb{1}_{[0, T]}, z] = e^{i\frac{\pi}{2}z} \Gamma(z)$, égalités valables pour $0 < \Re z < 1$.

On remarque que le membre de droite de la dernière égalité permet de prolonger $M[e^{it}, z]$ en une fonction holomorphe sur $0 < \Re z$. Plus généralement, avec des hypothèses supplémentaires sur f , il est possible de prolonger analytiquement la transformée de Mellin à l'extérieur d'une bande de convergence absolue. Par exemple, sans entrer dans les détails : si f est *oscillante*, resp. à *décroissance algébrique et monotone*, à l'infini, alors $M[f, z]$ peut être étendue en une fonction holomorphe, resp. méromorphe, dans un demi-plan à droite, et l'on peut déterminer son comportement le long des verticales.

La formule de Parseval transforme l'intégrale réelle d'un produit de fonctions, en une intégrale d'un produit de transformées de Mellin, sur une ligne verticale :

Théorème B.3 (Formule de Parseval). *Soient des fonctions f et h , et un réel c tels que :*

- (i) *f et h sont localement intégrables,*

- (ii) $M[f, 1 - z]$ et $M[h, z]$ convergent absolument dans une même bande $\alpha < \Re z < \beta$,
- (iii) $\Re z = c$ est une droite dans cette bande : $\alpha < \Re z = c < \beta$,
- (iv) $y \mapsto M[f, 1 - c - iy]$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Alors :

$$\int_0^\infty f(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M[f, 1 - z]M[h, z]dz.$$

Définition B.4. Lorsque celà a un sens, la h -transform de f est :

$$\lambda > 0 \mapsto \int_0^\infty f(t)h(\lambda t)dt.$$

Pour obtenir un développement asymptotique de la h -transform de f , avec $\lambda \rightarrow \infty$, on applique la formule de Parseval à $f(t)$ et $h(\lambda t)$ (avec $M[h(\lambda t), z] = \lambda^{-z}M[h(t), z]$). Puis, on repousse la ligne verticale d'intégration, vers une ligne située plus à droite. Pour justifier ce procédé par théorème des résidus, et dominer le reste, ceci nécessite en général de déterminer les prolongements analytiques de $M[f, 1 - z]$ et $M[h, z]$, ainsi que leur comportement le long des droites verticales :

Théorème B.5 (Asymptotique de la h -transform de f). *Soient f, h et c satisfaisant les hypothèses de la formule de Parseval. On pose $P(z) = M[f, 1 - z]M[h, z]$. Soit $C > c$. Si*

- (i) $P(z)$ est méromorphe dans une bande contenant $c < \Re z < C$,
- (ii) $P(z)$ possède un nombre fini de pôles dans la bande $c < \Re z < C$, et la droite $\Re z = C$ ne contient pas de pôles de $P(z)$,
- (iii) $\sup\{|P(x + iy)|, x \in [c, C]\} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$,
- (iv) $y \mapsto P(C + iy)$ est intégrable sur \mathbb{R} ,

alors pour $\lambda > 0$, la h -transform de f vérifie :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)h(\lambda t)dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \lambda^{-z}P(z)dz = - \sum_{c < \Re z < C} \text{Res}(\lambda^{-z}P(z)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \lambda^{-z}P(z)dz, \\ &= - \sum_{c < \Re z < C} \text{Res}(\lambda^{-z}P(z)) + \mathcal{O}_{\lambda \rightarrow \infty}(\lambda^{-C}), \end{aligned}$$

où la somme porte sur les pôles de $P(z)$.

Les deux résultats suivants précisent deux prolongements utilisés dans la preuve de Proposition 4.3.

Proposition B.6. *Soit f une fonction régulière sur $[0, \infty)$, nulle sur $[1, \infty)$. Alors $M[f, 1 - z]$ converge absolument dans $\Re z < 1$, et s'étend en une fonction méromorphe dans le plan complexe. Ses pôles sont les entiers $j \geq 1$ tels que $f^{(j-1)}(0) \neq 0$; un tel pôle est simple et de résidu $-\frac{f^{(j-1)}(0)}{(j-1)!}$. Enfin, si $c < C < k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\sup\{|M[f; 1 - x - iy]|, x \in [c, C]\} = \mathcal{O}_{y \rightarrow \pm\infty}(|y|^{-k}).$$

Démonstration. La bande de convergence absolue provient des comportements de f en 0 et en $+\infty$. Le prolongement méromorphe s'obtient à partir du développement de Taylor de f en 0. Enfin, par intégration par parties successives (et continuation unique), on a aussi $M[f, 1 - z] = \frac{M[f^{(k)}, k+1-z]}{(z-1)\dots(z-k)}$. Par Proposition B.2, on déduit le comportement à l'infini dans la bande $c \leq \Re z \leq C$. \square

Proposition B.7. *Soient des réels $\eta \geq 1, \omega \neq 0, \alpha$, et $g(t) = t^{-\eta} \cos(\omega t + \alpha) \mathbb{1}_{t \geq 1}$. Alors $M[g, z]$ est holomorphe dans $\Re z < \eta$. $M[g, z]$ s'étend en une fonction holomorphe dans le plan complexe, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous $c < C < k + \eta$,*

$$\sup\{|M[g; x + iy]|, x \in [c, C]\} = \mathcal{O}_{y \rightarrow \pm\infty}(|y|^k).$$

Démonstration. On pose $g_{\eta,\alpha} := g$. Dans $\Re z < \eta$, $M[g_{\eta,\alpha}, z]$ converge absolument, est holomorphe, et par proposition B.2, $\sup\{|M[g_{\eta,\alpha}; x + iy]|, x \in [c, C]\} = \mathcal{O}_{y \rightarrow \pm\infty}(1)$. On étend $M[g_{\eta,\alpha}, z]$ par intégration par parties :

$$M[g_{\eta,\alpha}, z] = -\frac{\cos(\omega + \alpha - \frac{\pi}{2})}{\omega} - \frac{-\eta - z - 1}{\omega} M[g_{\eta+1,\alpha-\pi/2}, z];$$

on étend le membre de gauche à partir du membre de droite qui est holomorphe dans $\Re z < 1 + \eta$. Puis, on itère pour obtenir l'extension dans $\Re z < k + \eta$. À chaque itération, un facteur z sort, ce qui permet de montrer la croissance en $\mathcal{O}(|y|^k)$ sur $x \in [c, C]$. \square

ANNEXE C. CALCULS DE TERMES DOMINANTS

On précise quelques expressions permettant d'obtenir les termes dominants des développements asymptotiques ; pour une courbe à phase constante, puis pour un point critique isolé.

Proposition C.1. *Soient $\Gamma \in \mathcal{G}$, $x \in E_{\mathcal{G}}$, $\lambda > 0$, $j \geq 1$.*

a) *Si $\Gamma = \Gamma_a(z, \delta\Theta)$, de normale ν_{Σ} telle que $\nu_{\Sigma} \cdot (0, 1) < 0$, et si $z(\theta), \theta \in \delta\Theta$, parcourt un morceau de cercle de centre x , de rayon $|\Phi| > 0$ où $\varphi(\theta, s) \equiv \Phi$ le long de Γ , alors*

$$h_{\Gamma,1}(x; \lambda) = \lambda^{-1} \kappa_{\Gamma,1} s_{\Gamma,1}(\lambda), \quad s_{\Gamma,1}(\lambda) = \sin(\lambda\Phi), \quad \kappa_{\Gamma,1} = -\int_{\delta\Theta} [P] d\theta.$$

b) *Si $\Gamma = \Gamma_b(z^*, \delta\Theta)$, avec $x = z^*$, de normale ν_{Σ} telle que $\nu_{\Sigma} \cdot (0, 1) < 0$, alors $h_{\Gamma,1} = 0$ et*

$$h_{\Gamma,2}(x; \lambda) = \lambda^{-2} \kappa_{\Gamma,2} s_{\Gamma,2}(\lambda), \quad s_{\Gamma,2}(\lambda) = -1, \quad \kappa_{\Gamma,2} = \int_{\delta\Theta} \left[\nabla \cdot \left(P \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} \right) \right] d\theta.$$

c) *Si $\Gamma = \Gamma_c(r, \delta\Theta)$ et $x = 0$, alors*

$$h_{\Gamma,1}(x; \lambda) = \lambda^{-1} \kappa_{\Gamma,1} s_{\Gamma,1}(\lambda), \quad s_{\Gamma,1}(\lambda) = -\sin(\lambda r), \quad \kappa_{\Gamma,1} = -\text{sign}(r) \int_{\delta\Theta} P d\theta.$$

Démonstration. a) C_{Φ} et Γ sont tangentes donc les normales $\nabla \varphi$ et ν_{Σ} sont colinéaires, et comme $\nabla \varphi \cdot (0, 1)$ et $\nu_{\Sigma} \cdot (0, 1)$ ont même signe, alors $\nabla \varphi \cdot \nu_{\Sigma} = |\nabla \varphi| = \sqrt{1 + (x \cdot \theta^{\perp})^2} = \sqrt{1 + (z(\theta) \cdot \theta^{\perp})^2} = \frac{d\ell}{d\theta}$ donc $H_{\Gamma,1} = -[P] \frac{d\theta}{d\ell}$, puis $\kappa_{\Gamma,1} = -\int_{\Gamma} [P] \frac{d\theta}{d\ell} d\ell$.

b) $H_{\Gamma,2} = \left[\nabla \cdot \left(P \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} \right) \right] \frac{\nabla \varphi \cdot \nu_{\Sigma}}{|\nabla \varphi|^2}$, avec, de manière similaire à a), $\frac{\nabla \varphi \cdot \nu_{\Sigma}}{|\nabla \varphi|^2} = \frac{1}{|\nabla \varphi|} = \frac{d\theta}{d\ell}$, d'où $\kappa_{\Gamma,2} = \int_{\Gamma} \left[\nabla \cdot \left(P \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} \right) \right] \frac{d\theta}{d\ell} d\ell$.

c) $\nu_{\Sigma} = (0, \text{sign}(r))$ et $\nabla \varphi = (0, -1)$, alors $H_{\Gamma,1} = P \frac{\nabla \varphi \cdot \nu_{\Sigma}}{|\nabla \varphi|^2} = -P \text{sign}(r) \frac{d\theta}{d\ell}$, d'où $\kappa_{\Gamma,1}$. \square

Proposition C.2. *Soient $x \in E_{\mathcal{G}}^*$, $\Gamma \in \mathcal{G}^*$, et $(\theta^*, s^*) = (\theta(\ell^*), s(\ell^*)) \in \Gamma$, un point critique avec ordre fini $\rho^* \geq 1$. On pose $\varepsilon^* = \text{sign} \tilde{\varphi}^{(\rho^*)}(\ell^*)$, $T^* \varphi = \left(\frac{\nabla \varphi \cdot \nu_{\Sigma}}{|\nabla \varphi|^2} \right) (\theta^*, s^*) \frac{1}{|\tilde{\varphi}^{(\rho^*)}(\ell^*)|^{1/\rho^*}}$, et $K(\rho^*) = \frac{(\rho^*)!^{1/\rho^*} \Gamma(1/\rho^*)}{\rho^*}$.*

1. *Si (θ^*, s^*) est une extrémité de Γ , i.e. $\ell^* \in \{0, |\Gamma|\}$, alors :*

$$h_{\Gamma,1}^*(x; \lambda) = -K(\rho^*) [P](\theta^*, s^*) \lambda^{-1 - \frac{1}{\rho^*}} s_{1,0}^*(\lambda) T^* \varphi + \mathcal{O}\left(\lambda^{-1 - \frac{1}{\rho^*}}\right),$$

avec

$$s_{1,0}^*(\lambda) = \begin{cases} \varepsilon^* \sin \frac{\pi}{2\rho^*}, & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) = 0 \text{ et } \ell^* = 0, \\ (-1)^{\rho^*} \varepsilon^* \sin \frac{\pi}{2\rho^*}, & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) = 0 \text{ et } \ell^* = |\Gamma|, \\ \varepsilon^* \sin \frac{\pi}{2\rho^*} \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)) + \cos \frac{\pi}{2\rho^*} \sin(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)), & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0 \text{ et } \ell^* = 0, \\ (-1)^{\rho^*} \varepsilon^* \sin \frac{\pi}{2\rho^*} \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)) + \cos \frac{\pi}{2\rho^*} \sin(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)), & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0 \text{ et } \ell^* = |\Gamma|. \end{cases}$$

2. *Si (θ^*, s^*) est un point intérieur stationnaire de Γ , i.e. $0 < \ell^* < |\Gamma|$ et $\tilde{\varphi}'(\ell^*) = 0$, et alors :*

$$h_{\Gamma,1}^*(x; \lambda) = -2K(\rho^*) [P](\theta^*, s^*) \lambda^{-1 - \frac{1}{\rho^*}} s_{1,0}^*(\lambda) T^* \varphi + \mathcal{O}\left(\lambda^{-1 - \frac{1}{\rho^*}}\right),$$

avec

$$s_{1,0}^*(\lambda) = \begin{cases} \varepsilon^* \sin \frac{\pi}{2\rho^*}, & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) = 0 \text{ et } \rho^* = 2p, \\ 0, & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) = 0 \text{ et } \rho^* = 2p + 1, \\ \varepsilon^* \sin \frac{\pi}{2\rho^*} \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)) + \cos \frac{\pi}{2\rho^*} \sin(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)), & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0 \text{ et } \rho^* = 2p, \\ \cos \frac{\pi}{2\rho^*} \sin(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)), & \text{si } \varphi(\theta^*, s^*) \neq 0 \text{ et } \rho^* = 2p + 1. \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit de préciser $h_{\Gamma,1}^*(x; \lambda) = K_0^* \kappa_{10}^* s_{10}^*(\lambda) \lambda^{-1-\frac{1}{\rho^*}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-1-\frac{1}{\rho^*}}\right)$, à l'aide de la preuve de Proposition 3.12. D'abord, $K_0^* = \frac{\Gamma(1/\rho^*)}{\rho^*}$. Puis, κ_{10}^* s'exprime à partir de $k_{1,0}^* = H_{\Gamma,1}(\theta^*, s^*)^+ \left(\frac{\rho^{*!}}{|\tilde{\varphi}(\rho^*)(\ell^*)|}\right)^{1/\rho^*}$ ou $-I_{1,0}^* = H_{\Gamma,1}(\theta^*, s^*)^- \left(\frac{\rho^{*!}}{|\tilde{\varphi}(\rho^*)(\ell^*)|}\right)^{1/\rho^*}$, avec $H_{\Gamma,1} = -[P] \frac{\nabla\varphi \cdot \nu_\Sigma}{|\nabla\varphi|^2}$. Enfin, s_{10}^* s'obtient immédiatement selon les cas. \square

Proposition C.3. *Sous les hypothèses de la Proposition C.2, avec $\Gamma = \Gamma_a(z, [\theta_0, \theta_1])$, avec normale ν_Σ telle que $\nu_\Sigma \cdot (0, 1) < 0$.*

1. Ou bien $x \in (z(\theta^*), \theta^*)$.

a) Si $x = z(\theta^*)$, alors, $\rho^* = 2$, $s_{1,0}^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sign } \kappa(\theta^*)$, $T^*\varphi = \sqrt{|\kappa(\theta^*)|}$.

b) Si $x \in (z(\theta^*), \theta^*) \setminus \{z(\theta^*), x(\theta^*)\}$, alors $\rho^* = 2$, $T^*\varphi = \sqrt{|\kappa(\theta^*)|}$ et

$$s_{1,0}^*(\lambda) = \text{sign}(\kappa(\theta^*)) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\lambda(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^*) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\lambda(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^*).$$

c) Si $x = x(\theta^*)$ alors $\rho^* \geq 3$, et $s_{1,0}^*$ est de la forme $s_{1,0}^*(\lambda) = S_{10}^* \cos(\lambda(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^* + \alpha_{10}^*)$.

2. Ou bien $\theta^* = \theta_{0,1}$ et $x \notin (z(\theta^*), \theta^*)$. Alors $\rho^* = 1$, $T^*\varphi = \frac{(x \cdot \theta^{*\perp})(z(\theta^*) \cdot \theta^{*\perp}) + 1}{((x \cdot \theta^{*\perp})^2 + 1)|x - z(\theta^*) \cdot \theta^{*\perp}|}$, et

a) si $x \in (z(\theta^*), \theta^{*\perp}) \setminus \{z(\theta^*)\}$, $s_{1,0}^* = \pm \text{sign}(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^{*\perp}$;

b) si $x \notin (z(\theta^*), \theta^*) \cup (z(\theta^*), \theta^{*\perp})$,

$$s_{1,0}^*(\lambda) = \pm \cos(\lambda(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^*) \text{sign}(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^{*\perp}.$$

Démonstration. 1. Cas de phase stationnaire, extrémité ou point intérieur.

a) $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, $\rho^* = 2$, $s_{1,0}^* = \varepsilon^* \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tilde{\varphi}''(\ell^*) = \frac{1}{\kappa(\theta^*)} \dot{\theta}(\ell^*)^2$ avec $\dot{\theta}(\ell^*) = (1 + (z(\theta^*) \cdot \theta^{*\perp})^2)^{-1/2}$, $\varepsilon^* = \text{sign } \kappa(\theta^*)$. $C_{\varphi(\theta^*, s^*)}$ est tangente à Γ en (θ^*, s^*) , alors $\nabla\varphi = \pm |\nabla\varphi| \nu_\Sigma$. Comme $\nu_\Sigma \cdot (0, 1)$ et $\nabla\varphi \cdot (0, 1)$ ont même signe, alors $\nabla\varphi \cdot \nu_\Sigma = |\nabla\varphi| = (1 + (x \cdot \theta^\perp)^2)^{1/2} = (\dot{\theta})^{-1}$, puis $T^*\varphi = \sqrt{|\kappa(\theta^*)|}$.

b) Comme a), mais cette fois, $\varphi(\theta^*, s^*) = (x - z(\theta^*)) \cdot \theta^* \neq 0$.

c) Rien à signaler.

2. Cas d'extrémité avec phase non stationnaire.

a) $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$ et $\rho^* = 1$, $\tilde{\varphi}'(\ell) = \frac{d\theta}{d\ell}(x - z(\theta)) \cdot \theta^\perp$, avec $\frac{d\theta}{d\ell} > 0$, $\varepsilon^* = \text{sign}(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^{*\perp}$. La normale vérifie $\nu_\Sigma = \pm \frac{d\theta}{d\ell}(-\frac{ds}{d\theta}, 1) = \frac{d\theta}{d\ell}(z(\theta) \cdot \theta^\perp, -1)$ ($\nu_\Sigma \cdot (0, 1) < 0$), puis $T^*\varphi = \frac{(x \cdot \theta^{*\perp}, -1) \cdot (z(\theta^*) \cdot \theta^{*\perp}, -1)}{|(x \cdot \theta^{*\perp}, -1)|^2 |(x - z(\theta^*)) \cdot \theta^{*\perp}|}$. Pour $\theta^* = \theta_0, \theta_1$, $s_{1,0}^*(\lambda) = \varepsilon^*, -\varepsilon^*$.

b) Comme 2.a), mais, $s_{1,0}^*(\lambda) = \pm \varepsilon^* \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*))$, avec $\varphi(\theta^*, s^*) = (x - z(\theta^*)) \cdot \theta^* \neq 0$. \square

Proposition C.4. *Sous les hypothèses de la Proposition C.2, avec $\Gamma = \Gamma_b(z^*, [\theta_0, \theta_1])$, avec normale ν_Σ telle que $\nu_\Sigma \cdot (0, 1) < 0$.*

1. Ou bien $x \in (z^*, \theta^*) \setminus \{z^*\}$. Alors $\rho^* = 2$, $T^*\varphi = \frac{1}{\sqrt{|(x - z^*) \cdot \theta^*|}}$ et

$$s_{1,0}^*(\lambda) = \text{sign}((z^* - x) \cdot \theta^*) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\lambda(x - z^*) \cdot \theta^*) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\lambda(x - z^*) \cdot \theta^*).$$

2. Ou bien $\theta^* = \theta_{0,1}$ et $x \notin (z^*, \theta^*)$. Alors $\rho^* = 1$, $T^*\varphi = \frac{(x \cdot \theta^{*\perp})(z^* \cdot \theta^{*\perp}) + 1}{((x \cdot \theta^{*\perp})^2 + 1)|x - z^* \cdot \theta^{*\perp}|}$, et

a) si $x \in (z^*, \theta^{*\perp}) \setminus \{z^*\}$, $s_{1,0}^* = \pm \text{sign}(x - z^*) \cdot \theta^{*\perp}$;

b) si $x \notin (z^*, \theta^*) \cup (z^*, \theta^{*\perp})$, $s_{1,0}^*(\lambda) = \pm \cos(\lambda(x - z^*) \cdot \theta^*) \operatorname{sign}(x - z^*) \cdot \theta^{*\perp}$.

Démonstration. 1. Cas de phase stationnaire non nulle avec $\rho^* = 2$. Analogue à Proposition C.3.1.b).

Ici, $\tilde{\varphi}''(\ell^*) = -\dot{\theta}(\ell^*)^2(x - z^*) \cdot \theta^*$, $\frac{d\theta}{d\ell} = (1 + (z^* \cdot \theta^{*\perp})^2)^{-1/2}$, $\varepsilon^* = \operatorname{sign}(z^* - x) \cdot \theta^*$, et $\nabla\varphi \cdot \nu_\Sigma = |\nabla\varphi| = (1 + (x \cdot \theta^{*\perp})^2)^{1/2} = \dot{\theta}^{-1}$.

2. Cas d'extrémité avec phase non stationnaire. Analogue à Proposition C.3.2. □

Proposition C.5. *Sous les hypothèses de la Proposition C.2, avec $\Gamma = \Gamma_c(r, [\theta_0, \theta_1])$, avec $r = \pm R$.*

1. Ou bien $x \in (0, \theta^*) \setminus \{0\}$.

a) Si $x = r\theta^*$, $\rho^* = 2$, $T^*\varphi = \frac{\operatorname{sign}(-r)}{\sqrt{R}}$, $s_{1,0}^* = \operatorname{sign}(-r) \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) si $x \in (0, \theta^*) \setminus \{0, r\theta^*\}$, $\rho^* = 2$, $T^*\varphi = \frac{\operatorname{sign}(-r)}{\sqrt{|x \cdot \theta^*|}}$,

$$s_{1,0}^*(\lambda) = \operatorname{sign}(-x \cdot \theta^*) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\lambda(x \cdot \theta^* - r)) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\lambda(x \cdot \theta^* - r)).$$

2. Ou bien $\theta^* = \theta_{0,1}$ et $x \notin (0, \theta^*)$. Alors $\rho^* = 1$, $T^*\varphi = \frac{-\operatorname{sign}(r)}{1+(x \cdot \theta^{*\perp})^2} \frac{1}{|x \cdot \theta^{*\perp}|}$, et

a) si $x \in (r\theta^*, \theta^{*\perp}) \setminus \{r\theta^*\}$, $s_{1,0}^* = \pm \operatorname{sign}(x \cdot \theta^{*\perp})$

b) si $x \notin (r\theta^*, \theta^{*\perp}) \cup (0, \theta^*)$, $s_{1,0}^*(\lambda) = \pm \operatorname{sign}(x \cdot \theta^{*\perp}) \cos(\lambda(x \cdot \theta^* - r))$.

Démonstration. $\Gamma \subset \partial\Sigma$ est de normale $\nu_\Sigma = (0, \operatorname{sign}(r))$, alors $\frac{\nabla\varphi \cdot \nu_\Sigma}{|\nabla\varphi|^2} = \frac{-\operatorname{sign}(r)}{1+(x \cdot \theta^{*\perp})^2}$.

1. Cas de phase stationnaire. $\rho^* = 2$, $\tilde{\varphi}''(\ell^*) = -\dot{\theta}(\ell^*)^2 x \cdot \theta^* = -x \cdot \theta^*$, $\varepsilon^* = \operatorname{sign}(-x \cdot \theta^*)$, $T^*\varphi = \frac{-\operatorname{sign}(r)}{1+(x \cdot \theta^{*\perp})^2} \frac{1}{\sqrt{|x \cdot \theta^*|}}$.

a) $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, $x \cdot \theta^* = r$, $s_{1,0}^* = \varepsilon^* \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $s_{1,0}^*(\lambda) = \varepsilon^* \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*)) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\lambda\varphi(\theta^*, s^*))$, $\varphi(\theta^*, s^*) = x \cdot \theta^* - r \neq 0$.

2. Cas d'extrémité avec phase non stationnaire. $\rho^* = 1$, $\tilde{\varphi}'(\ell^*) = \dot{\theta}(\ell^*) x \cdot \theta^{*\perp} = x \cdot \theta^{*\perp}$, $\varepsilon^* = \operatorname{sign}(x \cdot \theta^{*\perp})$, $T^*\varphi = \frac{-\operatorname{sign}(r)}{1+(x \cdot \theta^{*\perp})^2} \frac{1}{|x \cdot \theta^{*\perp}|}$.

a) $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, $s_{1,0}^* = \pm \varepsilon^*$.

b) $s_{1,0}^*(\lambda) = \pm \varepsilon^* \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*))$, avec $\varphi(\theta^*, s^*) = x \cdot \theta^* - r \neq 0$. □

Proposition C.6. *Sous les hypothèses de la Proposition C.2, avec $\Gamma = \Gamma_d(\theta^*, [s_0, s_1])$, avec $\theta^* = \theta_{\min, \max}$. Alors $s^* \in \{s_0, s_1\}$, $\rho^* = 1$, $T^*\varphi = \frac{\mp x \cdot \theta^{*\perp}}{1+(x \cdot \theta^{*\perp})^2}$ (resp. pour $\theta^* = \theta_{\min, \max}$), et :*

a) si $x \in (s^*\theta^*, \theta^{*\perp})$, $s_{1,0}^* = \mp 1$ (resp. pour $s^* = s_0, s_1$);

b) si $x \notin (s^*\theta^*, \theta^{*\perp})$, $s_{1,0}^*(\lambda) = \mp \cos(\lambda(x \cdot \theta^* - s^*))$ (resp. pour $s^* = s_0, s_1$).

Démonstration. Cas d'extrémité non stationnaire. $\Gamma \subset \partial\Sigma$ est de normale $\nu_\Sigma = (\eta, 0)$, avec $\eta = -1, 1$ si $\theta = \theta_{\min, \max}$. Alors $\frac{\nabla\varphi \cdot \nu_\Sigma}{|\nabla\varphi|^2} = \frac{\eta x \cdot \theta^{*\perp}}{1+(x \cdot \theta^{*\perp})^2}$, $\tilde{\varphi}'(\ell) = -\frac{ds}{d\ell} = -1$, $\varepsilon^* = -1$, et

a) $\varphi(\theta^*, s^*) = 0$, $s_{1,0}^* = -1, 1$ si $s^* = s_0, s_1$;

b) $s_{1,0}^*(\lambda) = \mp \cos(\lambda\varphi(\theta^*, s^*))$ selon $s^* = s_0, s_1$, avec $\varphi(\theta^*, s^*) = x \cdot \theta^* - s^* \neq 0$. □

ANNEXE D. DISCRÉTISATION

On présente le schéma de discrétisation de RFBP utilisé pour les tests numériques du banc d'essai.

L'étape de discrétisation de RFBP est plus difficile qu'elle ne le paraît et nécessite quelques précautions. D'abord, RFBP est une intégrale triple avec un intégrande possédant des discontinuités. De plus, une des dimensions du pavé d'intégration est grande : 2Ω ; ou, de manière équivalente après changement d'échelle, le domaine est un pavé de taille fixée, mais l'intégrande contient un facteur

fortement oscillant : $\cos(\Omega\sigma(x \cdot \theta - s))$. Pour obtenir un résultat précis rapidement, le calcul par force brute (intégration numérique sur tout le pavé) est donc exclu.

On décompose $\Theta \times [-R, R]$ en des morceaux Π tels que $P|_{\Pi}$ régulière, et de la forme suivante :

$$\Pi = \{(\theta, s) : \theta_0 < \theta < \theta_1, s_1(\theta) < s < s_2(\theta)\},$$

où : $[\theta_0, \theta_1] \subset \Theta$, s_1 et s_2 sont deux fonctions régulières. Bien sûr, un tel découpage s'obtient facilement à l'aide des morceaux Σ_i et des courbes de \mathcal{G} . Le but est de décomposer RFBP sous la forme :

$$\mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = \sum_{\Pi} \int_{\Pi} P(\theta, s) \psi_{\Omega}(x \cdot \theta - s) ds d\theta = \sum_{\Pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta) d\theta,$$

avec $P|_{\Pi}$ régulière, et

$$\begin{aligned} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta) &= \int_{s_1(\theta)}^{s_2(\theta)} P(\theta, s) \psi_{\Omega}(x \cdot \theta - s) ds d\theta = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \psi\left(\frac{\sigma}{\Omega}\right) \int_{s_1(\theta)}^{s_2(\theta)} P(\theta, s) e^{-i\sigma s} ds e^{i\sigma x \cdot \theta} d\sigma \\ &= \Re \int_0^1 \psi(\sigma) \int_{s_1(\theta)}^{s_2(\theta)} P(\theta, s) e^{-i\Omega\sigma s} ds e^{i\Omega\sigma x \cdot \theta} d\sigma. \end{aligned}$$

Pour évaluer une intégrale comme $g_{\Pi, \Omega, x}(\theta)$, on utilise souvent la transformée de Fourier rapide (FFT) pour intégrer par rapport à s , et son inverse (IFFT) pour intégrer par rapport à σ .

Pour les tests effectués dans cet article, $P|_{\Pi}$ est constante, et $\psi(\sigma) = |\sigma|$ (Ram-Lak). En utilisant ces hypothèses, on effectue le calcul de $g_{\Pi, \Omega, x}(\theta)$ analytiquement ; on obtient :

$$g_{\Pi, \Omega, x}(\theta) = \frac{P|_{\Pi}}{\Omega} [G(\Omega(x \cdot \theta - s_2(\theta))) - G(\Omega(x \cdot \theta - s_1(\theta)))], \quad \text{avec } G(u) := \frac{\cos u - 1}{u}.$$

La fonction G , prolongée par 0 en 0, est régulière ; donc la fonction $g_{\Pi, \Omega, x}$ aussi. Numériquement, pour plus de précision, pour $|u| < 0.05$, en tirant profit de l'encadrement $1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} \leq \cos u \leq 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \frac{u^8}{8!}$, on approchera $G(u)$ par $-\frac{u}{2} + \frac{u^3}{24} - \frac{u^5}{720}$.

Par régularité de $g_{\Pi, \Omega, x}$, on peut évaluer précisément son intégrale sur $[\theta_0, \theta_1]$ par une formule de quadrature. Avec la méthode de Simpson de pas $h_{\Pi} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{n_{\Pi}}$, d'ordre 4 en h_{Π} , on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{\theta_0}^{\theta_1} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta) d\theta \\ &= \frac{h_{\Pi}}{6} (g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_0) + g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_1)) + \frac{h_{\Pi}}{3} \sum_{i=1}^{n_{\Pi}-1} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_0 + ih_{\Pi}) + \frac{2h_{\Pi}}{3} \sum_{i=0}^{n_{\Pi}-1} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_0 + (i+0.5)h_{\Pi}) + \mathcal{O}(h_{\Pi}^4). \end{aligned}$$

Pour pouvoir mettre en évidence des termes d'ordre $\Omega^{-1.5}, \Omega^{-2} \log \Omega, \Omega^{-2}$, on choisit un pas h_{Π} tel que l'erreur d'intégration numérique $\mathcal{O}(h_{\Pi}^4)$ soit $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$. En choisissant $n_{\Pi} = \lceil \frac{\Omega^{1.25}}{\theta_1 - \theta_0} \rceil$, alors l'erreur du schéma numérique pour le calcul de $\int_{\Pi} P \psi_{\Omega}$ est $\mathcal{O}(h_{\Pi}^4) = \mathcal{O}(\Omega^{-5})$.

Enfin, on applique ce schéma à chaque morceau $\Pi = \{(\theta, s) : \theta_0 < \theta < \theta_1, s_1(\theta) < s < s_2(\theta)\}$, et l'on somme sur les différents morceaux. On obtient RFBP à l'ordre 5 : $\mathcal{R}^*[P \star \psi_{\Omega}](x) = \mathcal{H}_{\Omega}(x) + \mathcal{O}(\Omega^{-5})$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Omega}(x) &= \sum_{\Pi} \frac{h_{\Pi}}{6} (g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_0) + g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_1)) \\ &\quad + \frac{h_{\Pi}}{3} \sum_{i=1}^{n_{\Pi}-1} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_0 + ih_{\Pi}) + \frac{2h_{\Pi}}{3} \sum_{i=0}^{n_{\Pi}-1} g_{\Pi, \Omega, x}(\theta_0 + (i+0.5)h_{\Pi}). \end{aligned}$$

Dans cet article, nous utilisons ce schéma \mathcal{H}_{Ω} pour calculer et tracer RFBP à Ω fixé, sur une grille de points x . Et nous l'utilisons pour comparer RFBP et son asymptotique, pour différentes valeurs de x , et différentes échelles de Ω .

RÉFÉRENCES

- [1] J.-B. Bellet and G. Berginc. Reflective filtered backprojection. *Comptes rendus - Mathématique*, 354 :960–964, 2016.
- [2] G. Berginc, J.-B. Bellet, I. Berechet, and S. Berechet. Optical 3D imaging and visualization of concealed objects. In *SPIE Optical Engineering+ Applications*, pages 99610Q–99610Q. International Society for Optics and Photonics, 2016.
- [3] G. Berginc and M. Jouffroy. Simulation of 3D laser systems. In *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2009 IEEE International, IGARSS 2009*, volume 2, pages 440–444. IEEE, 2009.
- [4] N. Bleistein and R. A. Handelsman. *Asymptotic Expansions of Integrals*. Dover, 1986.
- [5] A. Erdélyi. Asymptotic representations of fourier integrals and the method of stationary phase. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 3(1) :17–27, 1955.
- [6] J. Friel and E. T. Quinto. Characterization and reduction of artifacts in limited angle tomography. *Inverse Problems*, 29(12) :125007, 2013.
- [7] F. Knight, S. Kulkarni, R. Marino, and J. Parker. Tomographic Techniques Applied to Laser Radar Reflective Measurements. *Lincoln Laboratory Journal*, 2(2) :143–160, 1989.
- [8] C. L. Matson and D. E. Mosley. Reflective tomography reconstruction of satellite features—field results. *Appl. Opt.*, 40(14) :2290–2296, May 2001.
- [9] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical methods in image reconstruction*. SIAM, 2001.
- [10] A. G. Ramm and A. I. Zaslavsky. Reconstructing singularities of a function from its radon transform. *Mathematical and computer modelling*, 18(1) :109–138, 1993.

UNIVERSITE DE LORRAINE, INSTITUT ELIE CARTAN DE LORRAINE, UMR 7502, METZ, F-57045, FRANCE,
CNRS, INSTITUT ELIE CARTAN DE LORRAINE, UMR 7502, METZ, F-57045, FRANCE.
E-mail address: jean-baptiste.bellet@univ-lorraine.fr