Le couplage de Landau phonon-roton revisité pour l'hélium 4 liquide et étendu aux gaz de fermions superfluides

Yvan Castin, Alice Sinatra et Hadrien Kurkjian*

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, Sorbonne Universités, Collège de France, Paris, France
**TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Antwerpen, België*

PACS 03.75.Kk – Dynamique des condensats ; excitations collectives et hydrodynamiques, écoulement superfluide

Résumé –Aussi bien dans l'hélium liquide que dans les gaz d'atomes froids fermioniques de spin 1/2, il existe dans la phase superfluide deux types distincts d'excitations, les phonons d'une part, les rotons ou les excitations fermioniques par brisure de paire, qui présentent une bande d'énergie interdite, d'autre part. Dans la limite des grandes longueurs d'onde, en reprenant, corrigeant et généralisant la théorie de Landau et Khalatnikov initialement développée pour l'hélium [ZhETF **19**, 637 (1949)], nous obtenons des expressions universelles de couplages à trois et quatre corps entre ces deux types d'excitations. Nous en déduisons les taux d'amortissement correspondants des phonons à basse température, et les comparons à ceux d'origine purement phononique, pour ouvrir la voie à une observation expérimentale.

Introduction. – Un superfluide spatialement homogène de particules en interaction à courte portée, lorsqu'il est refroidi à une température T suffisamment basse, admet comme seuls degrés de liberté microscopiques les excitations phononiques. Dans cette limite universalisante, tous les superfluides de ce type se réduisent à un gaz de phonons en interaction faible, que les particules sous-jacentes soient bosoniques ou fermioniques, en interaction faible ou en interaction forte. L'amortissement des phonons dépend alors uniquement de leur relation de dispersion au voisinage du nombre d'onde nul (pente et dérivée troisième) et de leur couplage non linéaire, déduit de la seule équation d'état du système grâce à l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov [1].

En réalité, dans les expériences, la température n'est pas toujours suffisamment basse pour qu'on puisse réduire la dynamique à celle des phonons, et d'autres excitations élémentaires viennent enrichir le problème. Nous pensons ici aux rotons dans le cas de l'hélium 4 liquide et aux excitations fermioniques de type BCS (par brisure des paires de Cooper) dans les gaz atomiques de fermions froids de spin 1/2, excitations que nous appellerons génériquement γ et qui présentent dans les deux cas une bande d'énergie interdite de largeur $\Delta > 0$. De façon remarquable, comme l'ont montré Landau et Khalatnikov, le couplage des phonons ϕ aux rotons, et plus généralement à toutes les excitations à bande interdite comme nous le verrons, ne dépend à l'ordre dominant en température que de quelques paramètres de la relation de dispersion de ces dernières, à savoir la valeur du minimum Δ et sa position k_0 dans l'espace des nombres d'onde k, leurs dérivées par rapport à la densité, ainsi que la masse effective m_* des excitations γ au voisinage de $k = k_0$. Cependant, nous avons découvert que l'expression du couplage $\phi - \gamma$ donnée dans la référence [1] n'est pas exacte, fait qui semble être passé inaperçu. L'objectif du présent travail est de compléter le résultat de Landau et Khalatnikov, et d'en déduire quantitativement l'amortissement des phonons dû au couplage $\phi-\gamma$ en fonction de la température, ce qui est *a priori* non trivial dans les systèmes en interaction forte considérés ici. Notre étude est ici restreinte au régime faiblement collisionnel $\omega_{\mathbf{q}}\tau_\gamma \gg 1$ et $\omega_{\mathbf{q}}\tau_\phi \gg 1$, où $\omega_{\mathbf{q}}$ est la pulsation propre du mode de phonon de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ considéré, et τ_γ et τ_ϕ sont les temps de collision typiques respectivement d'une quasi-particule γ thermique et d'un phonon ϕ thermique. Elle pourrait être directement étendue au régime hydrodynamique $\omega_{\mathbf{q}}\tau_\gamma \lesssim 1$ ou $\omega_{\mathbf{q}}\tau_\phi \lesssim 1$ à l'aide d'équations cinétiques [2]. Une vérification expérimentale de nos résultats semble tout à fait à portée de main, soit dans l'hélium 4 liquide, en prolongement des travaux récents de la référence [3], soit dans les gaz de fermions froids spatialement homogènes que la révolution des pièges à fond plat [4] permet désormais de préparer au laboratoire [5].

Landau-Khalatnikov revisité. – Rappelons brièvement l'argumentation de la référence [1] pour obtenir le couplage phonon-roton dans l'hélium 4 liquide ou, par extension de notre fait, le couplage phonon-excitation fermionique dans un gaz non polarisé de fermions de spin 1/2. On traite d'abord en première quantification le cas d'un roton seul ou d'une excitation fermionique seule, considéré(e) comme une quasi-particule γ de position $\mathbf{r}$, de quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et de spin $s = 0$ ou $s = 1/2$. Dans un superfluide homogène de densité ρ, son hamiltonien vaut simplement $\epsilon(\mathbf{p}, \rho)$, fonction de $\mathbf{p}$ invariante par rotation telle que $p \mapsto \epsilon(\mathbf{p}, \rho)$ soit la relation de dispersion de la quasi-particule γ. En présence d'ondes sonores (c'est-à-dire de phonons), le superfluide acquiert une densité $\rho(\mathbf{r})$ et une vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ non nulle qui dépendent de la position. Si la longueur d'onde des phonons est suffisamment grande devant la longueur de cohérence de la quasi-particule γ (sa longueur d'onde thermique de de Broglie $\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_* k_B T}\right)^{1/2}$) et la pulsation des phonons est suffisamment faible devant son énergie « interne » Δ, on peut utiliser une approximation d'homogénéité locale et prendre comme hamiltonien de la quasi-particule γ :

$$\mathcal{H} = \epsilon(\mathbf{p}, \rho(\mathbf{r})) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

Le dernier terme est un effet Doppler reflétant la différence des énergies dans le repère du laboratoire et dans le repère en mouvement avec le superfluide [1]. Pour une faible perturbation phononique du superfluide, on développe le hamiltonien jusqu'au second ordre en les fluctuations de densité $\delta\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) - \rho$:

$$\mathcal{H} \simeq \epsilon(\mathbf{p}, \rho) + \partial_\rho \epsilon(\mathbf{p}, \rho)\delta\rho(\mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\partial_\rho^2 \epsilon(\mathbf{p}, \rho)\delta\rho^2(\mathbf{r}) \tag{2}$$

en oubliant provisoirement la non-commutation de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$. Les phonons sont les quasi-particules bosoniques associées au développement de $\delta\rho(\mathbf{r})$ et de $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sur les modes propres des équations de l'hydrodynamique quantique linéarisées autour de la solution homogène au repos :

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{V}^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{0}} \rho_q (\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{q}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{V}^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{0}} \mathbf{v}_{\mathbf{q}} (\hat{b}_{\mathbf{q}} - \hat{b}^\dagger_{-\mathbf{q}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{4}$$

Les opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}$ annihilent et créent donc un phonon de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$, et satisfont aux relations de commutation habituelles $[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}'}] = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}$. On a pris ici des conditions aux limites périodiques dans une boîte cubique de volume $\mathcal{V}$, et on rappelle l'expression de la pulsation propre $\omega_{\mathbf{q}} = cq$ et des coefficients modaux $\rho_q = \left(\frac{\hbar\rho q}{2mc}\right)^{1/2}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\hbar c}{2m\rho q}\right)^{1/2} \mathbf{q}$, où m est la masse d'une particule du superfluide et c la vitesse du son.

Dans le cas d'un nombre arbitraire de quasi-particules γ, nous passons en seconde quantification et récrivons l'équation (2) sous la forme [1] [2]

$$\begin{aligned}\hat{H} = &\sum_{\mathbf{k},\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \\ &+ \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\sigma} \frac{\mathcal{A}_1(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}')}{\mathcal{V}^{1/2}} (\hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \text{h.c.}) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \\ &+ \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}',\sigma} \frac{\mathcal{A}_2(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}')}{\mathcal{V}} \hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'+\mathbf{q}'} \\ &\times [\hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}'} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}(\hat{b}_{-\mathbf{q}'} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \text{h.c.})]\end{aligned} \tag{5}$$

où $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ et $\hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}$ sont les opérateurs bosoniques (rotons, $s = 0$, $\sigma = 0$) ou fermioniques ($s = 1/2$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$) d'annihilation et de création d'une quasi-particule γ de vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ dans la composante de spin σ, obéissant aux relations de commutation ou d'anticommutation habituelles. La première somme au second membre de l'équation (5) représente l'énergie des quasi-particules γ dans le superfluide non perturbé, avec la notation abrégée $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon(\hbar\mathbf{k}, \rho)$. La seconde somme, qui provient du terme Doppler et du terme linéaire en $\delta\rho$ dans l'équation (2), décrit des processus inélastiques d'absorption ou d'émission d'un phonon par une quasi-particule γ, caractérisés par l'amplitude

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}') = \rho_q \frac{\partial_\rho \epsilon_{\mathbf{k}} + \partial_\rho \epsilon_{\mathbf{k}'}}{2} + \mathbf{v}_{\mathbf{q}} \cdot \frac{\hbar\mathbf{k} + \hbar\mathbf{k}'}{2} \tag{6}$$

où $\mathbf{q}$ et $\mathbf{k}$ sont les vecteurs d'onde du phonon et de la quasi-particule γ incidents, et $\mathbf{k}'$ le vecteur d'onde de la quasi-particule γ émergente. L'écriture invariante par échange de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ dans l'équation (6) provient de l'écriture symétrisée des différents termes, de la forme $[f(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{p})]/2$, qui assure que la forme quantique correcte de l'équation (2), avec $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ opérateurs canoniquement conjugués, est hermitienne. La troisième somme dans l'équation (5), provenant des termes quadratiques en $\delta\rho$ dans l'équation (2), représente la diffusion élastique directe d'un phonon sur une quasi-particule γ, décrite par l'amplitude elle aussi symétrisée

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}') = \rho_q \rho_{q'} \frac{\partial_\rho^2 \epsilon_{\mathbf{k}} + \partial_\rho^2 \epsilon_{\mathbf{k}'}}{2} \tag{7}$$

où les vecteurs d'onde primés sont ceux des quasi-particules émergentes. Elle décrit aussi des processus d'absorption et d'émission à deux phonons, négligeables ici. Comme l'avait bien compris la référence [1], l'amplitude effective de la diffusion élastique $\phi - \gamma$ s'obtient en ajoutant à l'amplitude directe celle des processus d'absorption-émission et d'émission-absorption à un phonon traités au

1. Dans un gaz de fermions de spin 1/2, la différence des nombres d'excitations fermioniques $\uparrow$ et $\downarrow$ est conservée lorsque la différence des nombres de particules $\uparrow$ et $\downarrow$ l'est, ce qui est le cas ici et explique pourquoi σ est conservé dans l'équation (5).

2. La mise des termes $\hat{b}\hat{b}^\dagger$ sous forme normale conduit à un déplacement d'énergie des quasi-particules γ que nous absorbons dans une redéfinition des $\epsilon_{\mathbf{k}}$.

second ordre de la théorie des perturbations :

$$\mathcal{A}_2^{\rm eff}(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}') = \mathcal{A}_2(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}') + \frac{\mathcal{A}_1(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathcal{A}_1(\mathbf{k}',\mathbf{q}';\mathbf{k}'+\mathbf{q}')}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}+\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} + \frac{\mathcal{A}_1(\mathbf{k}-\mathbf{q}',\mathbf{q}';\mathbf{k})\mathcal{A}_1(\mathbf{k}-\mathbf{q}',\mathbf{q};\mathbf{k}')}{\epsilon_{\mathbf{k}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}'}-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}} \quad (8)$$

Jusqu'à présent, ceci est en accord avec la théorie de Landau et Khalatnikov, si ce n'est que la dérivée première de Δ par rapport à ρ dans l'équation (6) a été négligée dans la référence [1], car on la pensait à l'époque anormalement faible dans l'hélium 4 à pression nulle.

L'expression (8), issue d'une approximation d'homogénéité locale, n'a de sens qu'à l'ordre dominant dans une limite de basse énergie (elle ne vaut aussi que sur la couche d'énergie, c'est-à-dire pour des processus de diffusion conservant l'énergie totale $\epsilon_{\mathbf{k}}+\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{k}'}+\hbar\omega_{\mathbf{q}'}$, avec $\mathbf{k}' = \mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'$, ce qui a permis d'écrire le second dénominateur comme dans (8), l'hydrodynamique quantique n'étant qu'une théorie effective [6]). Nous passons donc à la limite $T\to 0$ avec les lois d'échelle

$$q \approx T, k-k_0 \approx T^{1/2} \quad (9)$$

qui reflètent le fait que l'énergie thermique typique d'un phonon est $\hbar cq \approx k_BT$ et l'énergie cinétique effective typique $\epsilon_{\mathbf{k}}-\Delta$ d'une quasi-particule γ est $\approx k_BT$, puisqu'on dispose du développement

$$\epsilon_{\mathbf{k}} \underset{k\to k_0}{=} \Delta + \frac{\hbar^2(k-k_0)^2}{2m_*} + O(k-k_0)^3 \quad (10)$$

Les amplitudes de couplage $\mathcal{A}_1$ et les dénominateurs d'énergie dans l'équation (8) doivent être développés jusqu'aux corrections relatives d'ordre T, c'est-à-dire jusqu'à l'ordre $T^{3/2}$ pour $\mathcal{A}_1$ et T^2 pour les dénominateurs d'énergie, q' se déduisant de $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}'/q'$ par conservation de l'énergie. [3] [4] En revanche, il suffit de développer l'amplitude $\mathcal{A}_2$ à l'ordre dominant T. Nous obtenons ainsi le résultat central de l'article, l'amplitude de couplage effective élastique $\phi-\gamma$ à l'ordre dominant en température : [5]

$$\mathcal{A}_2^{\rm eff}(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}') \underset{T\to 0}{\sim} \frac{\hbar q}{mc\rho}\left\{\frac{1}{2}\rho^2\Delta'' + \frac{(\hbar\rho k_0')^2}{2m_*} + \frac{\hbar^2k_0^2}{2m_*} \times\left\{\left(\frac{\rho\Delta'}{\hbar ck_0}\right)^2 uu' + \frac{\rho\Delta'}{\hbar ck_0}\left[(u+u')\left(uu'-\frac{\rho k_0'}{k_0}\right)+\frac{2m_*c}{\hbar k_0}w\right] + \frac{m_*c}{\hbar k_0}(u+u')w + u^2u'^2 - \frac{\rho k_0'}{k_0}(u^2+u'^2)\right\}\right\} \quad (11)$$

Ici, Δ', k_0', Δ'' sont les dérivées premières et seconde de Δ et k_0 par rapport à ρ, et $u = \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}}{qk}$, $u' = \frac{\mathbf{q}'\cdot\mathbf{k}}{q'k}$, $w = \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}'}{qq'}$ sont les cosinus des angles entre les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$. Dans le résultat de la référence [1], les termes en Δ' ont été négligés, comme nous l'avons dit plus haut, mais le dernier terme entre les accolades intérieures dans l'équation (11), contenant le facteur $\rho k_0'/k_0$, a été carrément oublié. [6]

Taux d'amortissement. – Une application directe de l'expression (11) est le calcul par règle d'or de Fermi du taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\rm el}$ des phonons de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ par diffusion élastique sur les quasi-particules γ. Les quasi-particules γ sont à l'équilibre thermique, avec des nombres moyens d'occupation de Bose ou de Fermi $\bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}} = [\exp(\epsilon_{\mathbf{k}}/k_BT)-(-1)^{2s}]^{-1}$, de même que les phonons dans les modes $\mathbf{q}'$ autres que $\mathbf{q}$, avec les nombres moyens d'occupation de Bose $\bar{n}_{b,\mathbf{q}'} = [\exp(\hbar\omega_{q'}/k_BT)-1]^{-1}$; le mode $\mathbf{q}$ contient initialement un nombre arbitraire $n_{b,\mathbf{q}}$ de phonons. En incluant la contribution du processus de perte $\mathbf{q}+\mathbf{k}\to\mathbf{q}'+\mathbf{k}'$ et du processus inverse de gain $\mathbf{q}'+\mathbf{k}'\to\mathbf{q}+\mathbf{k}$, avec les facteurs d'amplification bosonique associés, on trouve après sommation sur $\mathbf{k}$, $\mathbf{q}'$, σ et passage à la limite thermodynamique que $\frac{\rm d}{{\rm d}t}n_{b,\mathbf{q}} = -\Gamma_{\mathbf{q}}^{\rm el}(n_{b,\mathbf{q}}-\bar{n}_{b,\mathbf{q}})$ avec [7]

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\rm el} = \frac{2\pi}{\hbar}(2s+1)\int\frac{{\rm d}^3k{\rm d}^3q'}{(2\pi)^6}\left[\mathcal{A}_2^{\rm eff}(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}')\right]^2 \times\delta(\epsilon_{\mathbf{k}}+\hbar\omega_{\mathbf{q}}-\epsilon_{\mathbf{k}'}-\hbar\omega_{\mathbf{q}'})\frac{\bar{n}_{b,\mathbf{q}'}\bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}'}[1+(-1)^{2s}\bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}}]}{\bar{n}_{b,\mathbf{q}}} \quad (12)$$

et $\mathbf{k}' = \mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'$. Comme notre théorie de basse énergie ne vaut qu'à $k_BT \ll \Delta$, le gaz de quasi-particules γ est non

3. Il vient $q-q' = \frac{\hbar(k-k_0)q(u-u')}{m_*c}[1+\frac{\hbar(k-k_0)u'}{m_*c}]+\frac{\hbar q^2(u-u')^2}{2m_*c}+O(T^{5/2})$ où u et u' sont définis après l'équation (11).

4. L'erreur relative commise par l'hydrodynamique quantique utilisée ici est d'ordre T^2, puisqu'on néglige les corrections en q^3 à $\omega_{\mathbf{q}} = cq$ et en $q^{5/2}$ à ρ_q et $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}$. Nous nous attendons à ce que l'approximation d'homogénéité locale introduise aussi une erreur relative d'ordre T^2. Aussi les corrections d'ordre relatif T mentionnées dans le texte devraient-elles être exactes.

5. Ce résultat (11), et plus généralement nos expressions pour les taux d'amortissement, valent même dans le cas $k_0 = 0$ (réalisé physiquement dans la limite CBE d'un gaz de fermions), à condition de les prolonger par continuité.

6. Les auteurs de la référence [1] posent directement $k = k_0$ dans le calcul de $\mathcal{A}_2^{\rm eff}(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}',\mathbf{q}')$, ce qui *a priori* ne tient pas compte de la loi d'échelle (9) mais ce qui est justifié *a posteriori* par notre calcul puisque le résultat final (11) ne dépend pas de k à l'ordre considéré. Compte tenu de leur hypothèse $\Delta' = 0$ et de l'approximation quadratique (10), ils peuvent alors poser $\partial_\rho\epsilon_{\mathbf{k}} = 0$ dans l'expression de $\mathcal{A}_1(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}+\mathbf{q})$, mais *pas* $\partial_\rho\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} = 0$ puisque $|\mathbf{k}+\mathbf{q}| \neq k_0$; c'est pourtant bien ce qu'ils font.

7. Nous avons utilisé la relation bien connue sur la loi de Bose ou de Fermi, $1+(-1)^{2s}\bar{n} = e^{\epsilon/k_BT}\bar{n}$, ainsi que la conservation de l'énergie.

dégénéré et $\bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}} \simeq \exp(-\epsilon_{\mathbf{k}}/k_BT) \ll 1$ au numérateur de l'équation (12). En prenant la limite $T \to 0$ à $\hbar cq/k_BT$ fixé et en posant $\mathcal{A}_2^{\text{eff}} = \frac{\hbar\omega_q}{\rho} f$, où la quantité sans dimension f dépend seulement des cosinus des angles, nous obtenons l'équivalent

$$\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{el}} \underset{T\to 0}{\sim} (2s+1)\frac{\mathrm{e}^{-\Delta/k_BT}}{(2\pi)^{9/2}}\frac{k_0^2 q^4 c}{\rho^2}(m_* k_BT)^{1/2} I \qquad (13)$$

où l'intégrale $I = \int \mathrm{d}^2\Omega_{\mathbf{k}} \int \mathrm{d}^2\Omega_{\mathbf{q}'} f^2(u,u',w)$ sur les angles solides de direction $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}'$ ne dépend pas de $\frac{\mathbf{q}}{q}$.[8]

Nous procédons de même pour le calcul du taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{inel}}$ des phonons de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ par les processus inélastiques d'absorption $\mathbf{q}+\mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ ou d'émission $\mathbf{k}' \to \mathbf{q}+\mathbf{k}$ par les quasi-particules γ à l'équilibre thermique. La règle d'or de Fermi conduit à

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{inel}} = \frac{2\pi}{\hbar}(2s+1)\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}[\mathcal{A}_1(\mathbf{k},\mathbf{q};\mathbf{k}')]^2 \times \delta(\hbar\omega_{\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'})(\bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}} - \bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}'}) \qquad (14)$$

avec $\mathbf{k}' = \mathbf{k}+\mathbf{q}$. Le caractère non dégénéré des quasi-particules γ noté plus haut, joint à la conservation de l'énergie, permet d'écrire $\bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}} - \bar{n}_{\gamma,\mathbf{k}'} \simeq \exp(-\epsilon_{\mathbf{k}}/k_BT)/(1+\bar{n}_{b,\mathbf{q}})$. Cependant, la conservation de l'énergie conduit ici à une loi d'échelle sur k différente de celle de l'équation (9) car elle contraint le nombre d'onde k à être sur un flanc de la relation de dispersion des quasi-particules γ, à une distance non nulle de k_0 même dans la limite de basse énergie des phonons : lorsque $q \to 0$ à $\mathbf{k}$ fixé, le Dirac dans l'équation (14) devient

$$\delta(\hbar\omega_{\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'}) \underset{q\to 0}{\sim} (\hbar cq)^{-1}\delta\left(1 - u\frac{\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}k}}{\hbar c}\right) \qquad (15)$$

Ceci impose à la vitesse de groupe $\frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}k}$ de la quasi-particule γ incidente d'être supérieure en valeur absolue à celle c des phonons, ce qui n'est pas sans rappeler le critère de Landau et restreint les nombres d'onde k à une partie D de $\mathbb{R}^+$. Dans la limite de faible q, $q \ll k\,\forall k \in D$ contribuant significativement à l'équation (14), mais sans rien supposer sur le rapport $\hbar cq/k_BT$, nous écrivons $\mathcal{A}_1$ dans l'équation (6) à l'ordre dominant $q^{1/2}$ en q et obtenons, après intégration sur la direction de $\mathbf{k}$, l'expression suivante

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{inel}} \simeq \frac{(2s+1)\rho}{4\pi mc}\int_D \frac{\mathrm{d}k k^2}{|\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}k}|}\frac{\mathrm{e}^{-\epsilon_{\mathbf{k}}/k_BT}}{1+\bar{n}_{b,\mathbf{q}}}\left|\partial_\rho\epsilon_k + \frac{\hbar^2c^2k}{\rho\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}k}}\right|^2 \qquad (16)$$

$$\underset{T\to 0}{\sim} \frac{(2s+1)\rho k_*^2}{4\pi\hbar^2 mc^3}\left|\partial_\rho\epsilon_{k_*} + \frac{\hbar ck_*}{\rho\eta_*}\right|^2 \frac{k_BT\mathrm{e}^{-\epsilon_{k_*}/k_BT}}{1+\bar{n}_{b,\mathbf{q}}} \qquad (17)$$

dont nous avons donné en seconde ligne un équivalent lorsque $T \to 0$ à $\hbar cq/k_BT$ fixé, k_* étant l'élément de la frontière de D ($\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}k}|_{k=k_*} = \eta_*\hbar c$, $\eta_* = \pm$) d'énergie ϵ_k minimale (dans le cas dégénéré où il existe plusieurs tels k_*, il faut sommer leurs contributions). Comme $\epsilon_{k_*} > \Delta$, le taux d'amortissement élastique l'emporte sur le taux inélastique dans la limite mathématique $T \to 0$; nous verrons cependant qu'aux températures expérimentalement accessibles, ce n'est pas toujours le cas.

Pour être complets, nous donnons aussi un équivalent à basse température du taux d'amortissement des quasi-particules γ de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ par les phonons à l'équilibre thermique, avec $k - k_0 = O(T^{1/2})$ comme dans l'équation (9) :

$$\hbar\Gamma_{\mathbf{k}}^{\gamma\phi} \underset{T\to 0}{\sim} \frac{\pi}{42}\frac{(k_BT)^7}{(\hbar c\rho^{1/3})^6} I \qquad (18)$$

où le facteur $2s+1$ n'apparaît plus mais où I est la même intégrale angulaire que dans l'équation (13). Cet équivalent résulte bien entendu des diffusions élastiques : en dessous d'une certaine température, k est assez proche de k_0 et les processus d'émission $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}+\mathbf{k}'$ sont interdits par la conservation de l'énergie, ceux d'absorption $\mathbf{k}+\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{k}'$ ne conservent l'énergie que pour[9] $q \geq q_* \simeq 2m_*c/\hbar$ donc sont réduits par un facteur $\mathrm{e}^{-\hbar\omega_{q_*}/k_BT}$. L'expression (18) permet de vérifier que les figures à venir sont bien dans le régime faiblement collisionnel $\omega_{\mathbf{q}}\tau_\gamma \gg 1$. En effet, à basse température, la densité des quasi-particules γ est $O(\mathrm{e}^{-\Delta/k_BT})$, les interactions entre elles deviennent négligeables, et leur temps de collision thermique se réduit à $\tau_\gamma \simeq 1/\Gamma_{\mathbf{k}}^{\gamma\phi}$. De même, nous avons vérifié que $\omega_{\mathbf{q}}\tau_\phi \gg 1$ sur les figures.

Application à l'hélium. – Dans l'hélium 4 liquide à très basse température ($k_BT \ll mc^2, \Delta$), des mesures précises de l'équation d'état (liant ρ à la pression) et de la relation de dispersion des rotons à différentes pressions ont été effectuées. Ceci permet d'accéder aux paramètres k_0, Δ et leurs dérivés, ainsi qu'à m_*. La vitesse du son mesurée est en excellent accord avec la relation thermodynamique $mc^2 = \rho\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\rho}$, où μ est le potentiel chimique du liquide à température nulle. Ceci nous permet de représenter les taux d'amortissement des phonons en fonction de la température, pour une valeur fixée de la pulsation $\omega_{\mathbf{q}}$, voir la figure 1. À la valeur élevée de la pression choisie, la relation de dispersion des phonons est concave à faible q, ce qui à basse température rend énergétiquement interdit le processus d'amortissement à trois phonons $\phi \leftrightarrow \phi\phi$ de Beliaev-Landau [6–11] et rend dominant celui à quatre phonons $\phi\phi \leftrightarrow \phi\phi$ de Landau-Khalatnikov [1]. La valeur élevée de la pulsation $\omega_{\mathbf{q}}$ choisie, accessible expérimentalement [12,13], conduit à des taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}$ pas trop faibles, donc à des longueurs d'atténuation du son $2c/\Gamma_{\mathbf{q}}$ assez courtes pour être mesurées dans des cellules centimétriques. Comme on le voit sur la figure 1, l'amortissement du son est en fait dominé par les processus à quatre phonons jusqu'à une température de $T \simeq 0,6$ K ; travailler

8. Le calcul donne $I/(4\pi)^2 = (\frac{\hbar^2k_0^2}{2m_*mc^2})^2[\frac{1}{25} - \frac{4\alpha}{15} + \frac{28}{45}\alpha^2 + \frac{2\beta^2}{9} + A(\frac{2}{9} - \frac{4\alpha}{3}) + A^2 + 4\beta B(\frac{1}{15} - \frac{\alpha}{9}) + B^2(\frac{2}{15} - \frac{4\alpha}{9} + \frac{2\alpha^2}{3} + \frac{4\beta^2}{3}) + \frac{4\beta}{9}B^3 + \frac{B^4}{9}]$, avec $\alpha = \frac{\rho k_0'}{k_0}$, $\beta = \frac{m_*c}{\hbar k_0}$, $A = \frac{m_*\rho^2\Delta''}{(\hbar k_0)^2} + \alpha^2$, $B = \frac{\rho\Delta'}{\hbar ck_0}$.

9. La valeur de q_* donnée est exacte dans la limite $k \to k_0 > 2m_*c/\hbar$ lorsque la relation de dispersion des phonons est linéaire et celle des quasi-particules γ est parabolique.

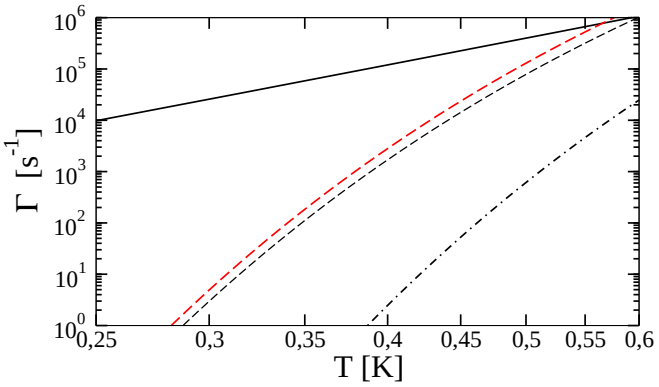

FIGURE 1: Taux d'amortissement des phonons de pulsation $\omega_{\mathbf{q}} = 2\pi \times 165$ GHz ($q = 0,3\text{Å}^{-1}$) dans l'hélium 4 liquide à la pression $P = 20$ bar, en fonction de la température. Trait plein : amortissement purement phononique $\Gamma_{\phi\phi}$ dû aux processus de Landau-Khalatnikov à quatre phonons [1, 6, 15] ; le taux dépend du paramètre de courbure γ tel que $\omega_{\mathbf{q}} = cq[1 + \frac{\gamma}{8}(\frac{\hbar q}{mc})^2 + O(q^4)]$, $\gamma = -6,9$ par interpolation des mesures de $P \mapsto \gamma(P)$ des références [16,17]. Tireté noir/tireté-pointillé : amortissement dû aux processus phonon-roton élastiques/inélastiques, voir l'équation (13)/(16). Tireté rouge : formule originelle de la référence [1] pour le taux d'amortissement élastique phonon-roton. Les différents paramètres des rotons sont déduits des mesures de leur relation de dispersion $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ à différentes pressions [18] : $\Delta/k_B = 7,44$K, $k_0 = 2,05\text{Å}^{-1}$, $m_*/m = 0,11$, $\rho k_0'/k_0 = 0,39$, $\rho\Delta'/\Delta = -1,64$, $\rho^2\Delta''/\Delta = -8,03$, $\rho m_*'/m_* = -4,7$. Dans l'équation (16), l'approximation parabolique (10) a été utilisée (d'où $\epsilon_{k_*}/\Delta \simeq 1,43$). La vitesse du son $c = 346,6$ m/s et le paramètre de Grüneisen $u = \frac{\mathrm{d}\ln c}{\mathrm{d}\ln\rho} = 2,274$, qui intervient dans $\Gamma_{\phi\phi}$, sont déduits de l'équation d'état (A1) de la référence [19]. Les valeurs très faibles de $\frac{\hbar q}{mc} = 0,13$ et de $\frac{k_B T}{mc^2} < 10^{-2}$ justifient notre usage de l'hydrodynamique quantique.

à d'aussi basses températures permettrait d'observer pour la première fois l'amortissement de Landau-Khalatnikov des phonons par les phonons. Les mesures d'atténuation du son de la référence [14] dans l'hélium à 23 bars, à une pulsation plus faible $\omega_{\mathbf{q}} = 2\pi \times 1,1$ GHz, sont en effet limitées à $T > 0,8$ K, où l'amortissement est encore dominé par les rotons.

Application aux fermions. – Dans les gaz d'atomes froids fermioniques, les interactions ont lieu seulement dans l'onde s, entre particules de spin opposé. De portée négligeable, elles sont caractérisées par la longueur de diffusion a, ajustable par résonance de Feshbach [20–25].

Des mesures précises des paramètres k_0 et Δ des excitations fermioniques ont été effectuées à la limite unitaire $a^{-1} = 0$ [26]. L'invariance d'échelle du gaz unitaire [27–29] fait que k_0 est proportionnel au nombre d'onde de Fermi $k_{\mathrm{F}} = (3\pi^2\rho)^{1/3}$, $k_0 \simeq 0,92 k_{\mathrm{F}}$ [26], et Δ est proportionnel à l'énergie de Fermi $\epsilon_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}}^2}{2m}$, $\Delta \simeq 0,44\epsilon_{\mathrm{F}}$ [26], ce qui fixe leurs dérivées par rapport à ρ ; de même, l'équation d'état mesurée à $T = 0$ se réduit à $\mu = \xi\epsilon_{\mathrm{F}}$, où $\xi \simeq 0,376$ [25],

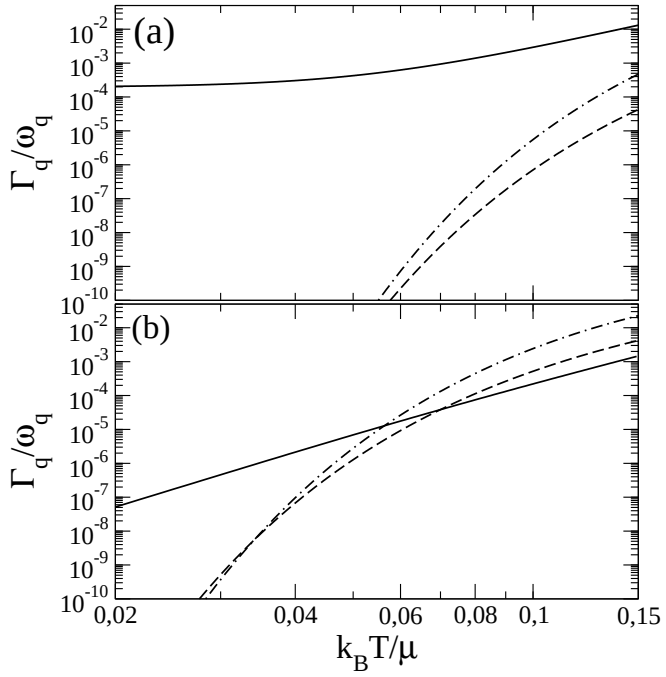

FIGURE 2: Taux d'amortissement des phonons de nombre d'onde $q = mc/2\hbar$ dans un gaz d'atomes froids fermioniques non polarisé, spatialement homogène [5] et à la limite thermodynamique, en fonction de la température. (a) Limite unitaire $a^{-1} = 0$, où la plupart des paramètres des phonons et des quasi-particules fermioniques ont été mesurés (voir le texte). (b) Du côté de la limite de BCS $1/k_{\mathrm{F}}a = -0,389$, ces paramètres sont estimés par la théorie de BCS ($\mu/\epsilon_{\mathrm{F}} \simeq 0,809$, $\Delta/\mu \simeq 0,566$, $\rho\mu'/\mu \simeq 0,602$, $\rho\Delta'/\Delta \simeq 0,815$, $\rho^2\Delta''/\Delta \simeq -0,209$, $u = \frac{\mathrm{d}\ln c}{\mathrm{d}\ln\rho} \simeq 0,303$). Dans les deux cas, le paramètre de courbure γ défini dans la légende de la figure 1 est estimé par la RPA [33]. Trait plein : amortissement phonon-phonon (a) $\phi \leftrightarrow \phi\phi$ de Beliaev-Landau ($\gamma > 0$) selon les équations (121) et (122) de la référence [6] (indépendantes de $|\gamma|$) et (b) $\phi\phi \leftrightarrow \phi\phi$ de Landau-Khalatnikov ($\gamma \simeq -0,30 < 0$) [6,15]. Tireté/tireté-pointillé : processus phonon-quasiparticule fermionique élastiques/inélastiques, selon l'équation (13)/(16). Dans l'équation (16), on a pris pour ϵ_k (a) la forme proposée par la référence [30] (d'où $\epsilon_{k_*}/\Delta \simeq 1,12$) ou (b) celle de la théorie de BCS (d'où $\epsilon_{k_*}/\Delta \simeq 1,14$). μ est le potentiel chimique du gaz à $T = 0$, et les quantités représentées sont en fait l'inverse des facteurs de qualité des modes.

et la température critique vaut $T_c \simeq 0,167\epsilon_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}$ [25]. En revanche, pour la masse effective des excitations fermioniques et leur relation de dispersion à $k - k_0$ non infinitésimal, nous devons nous contenter des résultats d'un développement dimensionnel en $\epsilon = 4-d$, $m_*/m \simeq 0,56$ et $\epsilon_k \simeq \Delta + \frac{\hbar^2(k^2-k_0^2)^2}{8m_* k_0^2}$ [30]. Nous devons aussi faire confiance à la RPA d'Anderson [31,32] lorsqu'elle prédit, à la limite unitaire, une dérivée troisième de la relation de dispersion phononique positive en $q = 0$ [33]. Les taux d'amortissement correspondants des phonons de nombre d'onde $q = mc/2\hbar$ sont représentés en fonction de la tempéra-

ture sur la figure 2a. La contribution dominante est celle des processus à trois phonons $\phi \leftrightarrow \phi\phi$ de Beliaev-Landau, ici énergétiquement autorisés ; elle est calculée dans l'approximation de l'hydrodynamique quantique, où elle est indépendante de la valeur de la dérivée troisième.

Dans la limite de BCS $k_{\mathrm{F}}a \to 0^-$, la branche d'excitation phononique devient concave [34]. Comme on le voit sur la figure 2b, l'amortissement phonon-phonon, qui est maintenant celui de Landau-Khalatnikov mentionné plus haut, est beaucoup plus faible et l'emporte sur l'amortissement $\phi - \gamma$ seulement à très basse température. Aux températures usuelles $T > 0,05\epsilon_{\mathrm{F}}/k_B$ [35], l'amortissement est dominé par les processus inélastiques $\phi - \gamma$, qui l'emportent sur les processus élastiques à cause de la faible valeur de ϵ_{k_*}/Δ (au contraire de l'hélium) ; bien que les facteurs de qualité correspondants $\omega_{\mathbf{q}}/\Gamma_{\mathbf{q}}$ restent impressionnants, les durées de vie $\Gamma_{\mathbf{q}}^{-1}$ des modes sont au plus de l'ordre de la seconde dans un gaz de ^{6}Li de température de Fermi typique $T_{\mathrm{F}} = 1\mu$K, donc n'excèdent pas celles déjà observées dans un condensat de bosons [36]. Nos prédictions sont cependant moins quantitatives que sur la figure 2a, car elles s'appuient sur la théorie approchée de BCS, aussi bien pour l'équation d'état que pour la relation de dispersion des excitations fermioniques $\epsilon_k \simeq \epsilon_k^{\mathrm{BCS}} = [(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)^2 + \Delta_{\mathrm{BCS}}^2]^{1/2}$, [10] et toujours sur la RPA pour la dérivée troisième de ω_q en $q = 0$, dont la valeur précise importe ici. Ceci nous permet d'écorner au passage la référence [37] : même dans l'approximation de BCS, sur laquelle elle s'appuie, son expression de $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\mathrm{inel}}$ est en désaccord avec la nôtre.

Conclusion. – En suppléant l'approche de Landau et Khalatnikov [1] par un développement systématique à basse température, nous avons obtenu ce qui devrait être, à l'ordre dominant, l'expression définitive du couplage phonon-roton dans l'hélium liquide ou, par généralisation de notre fait, du couplage phonon-excitation par brisure de paire dans les gaz fermioniques. Les progrès expérimentaux incessants dans ces systèmes donnent désormais accès aux paramètres microscopiques gouvernant ce couplage et en rendent envisageable une vérification à court terme. Notre résultat permet aussi de préciser dans quel régime de température et de force des interactions l'amortissement purement phononique $\phi\phi \leftrightarrow \phi\phi$ de Landau-Khalatnikov du son dans un superfluide, non observé à ce jour, serait le processus dominant.

Remerciements. – Ce projet a reçu le soutien de la FWO et du programme Horizon 2020 pour la recherche et l'innovation de l'Union Européenne à travers la convention de subvention Marie Skłodowska-Curie No. 665501.

10. Pour $\mu > 0$, la théorie de BCS donne donc $\Delta = \Delta_{\mathrm{BCS}}$, $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = \mu$ et $\frac{m_*}{m} = \frac{\Delta_{\mathrm{BCS}}}{2\mu}$. Pour $\mu < 0$, $\Delta = (\mu^2 + \Delta_{\mathrm{BCS}}^2)^{1/2}$, $k_0 = 0$ et $\frac{m_*}{m} = \frac{(\mu^2+\Delta_{\mathrm{BCS}}^2)^{1/2}}{|\mu|}$.

Références

[1] L. Landau, I. Khalatnikov, « Teoriya vyazkosti Geliya-II », Zh. Eksp. Teor. Fiz. **19**, 637 (1949).
[2] I. M. Khalatnikov, D.M. Chernikova, « Relaxation phenomena in superfluid Helium », Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49**, 1957 (1965).
[3] B. Fåk, T. Keller, M. E. Zhitomirsky, A. L. Chernyshev, « Roton-phonon interaction in superfluid ^{4}He », Phys. Rev. Lett. **109**, 155305 (2012).
[4] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, Z. Hadzibabic, « Bose-Einstein condensation of atoms in a uniform potential », Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013).
[5] B. Mukherjee, Zhenjie Yan, P. B. Patel, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, J. Struck, M. W. Zwierlein, « Homogeneous Atomic Fermi Gases », Phys. Rev. Lett. **118**, 123401 (2017).
[6] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Three-phonon and four phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas », Annalen der Physik, 1600352 (2017).
[7] S. T. Beliaev, « Energy-Spectrum of a Non-ideal Bose Gas », Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 433 (1958).
[8] L. P. Pitaevskii, S. Stringari, « Landau damping in dilute Bose gases », Phys. Lett. A **235**, 398 (1997).
[9] S. Giorgini, « Damping in dilute Bose gases : A mean-field approach », Phys. Rev. A **57**, 2949 (1998).
[10] B. M. Abraham, Y. Eckstein, J. B. Ketterson, M. Kuchnir, J. Vignos, « Sound Propagation in Liquid ^{4}He », Phys. Rev. **181**, 347 (1969).
[11] N. Katz, J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Davidson, « Beliaev Damping of Quasiparticles in a Bose-Einstein Condensate », Phys. Rev. Lett. **89**, 220401 (2002).
[12] N. A. Lockerbie, A. F. G. Wyatt, R. A. Sherlock, « Measurement of the group velocity of 93 GHz phonons in liquid ^{4}He », Solid State Communications **15**, 567 (1979).
[13] W. Dietsche, « Superconducting Al-PbBi tunnel junction as a phonon spectrometer », Phys. Rev. Lett. **40**, 786 (1978).
[14] P. Berberich, P. Leiderer, S. Hunklinger, « Investigation of the lifetime of longitudinal phonons at GHz frequencies in liquid and solid ^{4}He », Journal of Low Temperature Physics **22**, 61 (1976).
[15] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Landau-Khalatnikov phonon damping in strongly interacting Fermi gases », EPL **116**, 40002 (2016).
[16] D. Rugar, J. S. Foster, « Accurate measurement of low-energy phonon dispersion in liquid ^{4}He », Phys. Rev. B **30**, 2595 (1984).
[17] E. C. Swenson, A. D. B. Woods, P. Martel, « Phonon dispersion in liquid Helium under pressure », Phys. Rev. Lett. **29**, 1148 (1972).
[18] M. R. Gibbs, K. H. Andersen, W. G. Stirling, H. Schober, « The collective excitations of normal and superfluid ^{4}He : the dependence on pressure and temperature », J. Phys. Condens. Matter **11**, 603 (1999).
[19] H. J. Maris, D. O. Edwards, « Thermodynamic properties of superfluid ^{4}He at negative pressure », Journal of Low Temperature Physics **129**, 1 (2002).
[20] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas, « Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms », Science **298**, 2179 (2002).
[21] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. Ma-

galhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, C. Salomon, « Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a ^{6}Li Fermi gas », Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).

[22] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm, « Collective excitations of a degenerate gas at the BEC-BCS crossover », Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).

[23] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, W. Ketterle, « Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance », Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).

[24] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », Nature **463**, 1057 (2010).

[25] M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, M. W. Zwierlein, « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », Science **335**, 563 (2012).

[26] A. Schirotzek, Y. Shin, C. H. Schunck, W. Ketterle, « Determination of the superfluid gap in atomic Fermi gases by quasiparticle spectroscopy », Phys. Rev. Lett. **101**, 140403 (2008).

[27] Tin-Lun Ho, « Universal thermodynamics of degenerate quantum gases in the unitarity limit », Phys. Rev. Lett. **92**, 090402 (2004).

[28] T. Enss, R. Haussmann, W. Zwerger, « Viscosity and scale invariance in the unitary Fermi gas », Annals of Physics **326**, 770 (2011).

[29] Y. Castin, F. Werner, « The Unitary Gas and its Symmetry Properties », contribution à l'ouvrage collectif *BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi gas*, Springer Lecture Notes in Physics, dirigé par W. Zwerger (Springer, Berlin, 2011).

[30] Y. Nishida, D. T. Son, « ϵ Expansion for a Fermi gas at infinite scattering length », Phys. Rev. Lett. **97**, 050403 (2006).

[31] P.W. Anderson, « Random-phase approximation in the theory of superconductivity », Phys. Rev. **112**, 1900 (1958).

[32] R. Combescot, M. Y. Kagan, S. Stringari, « Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover », Phys. Rev. A **74**, 042717 (2006).

[33] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover », Phys. Rev. A **93**, 013623 (2016).

[34] M. Marini, F. Pistolesi, G. C. Strinati, « Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions », European Physical Journal B **1**, 151 (1998).

[35] Z. Hadzibabic, S. Gupta, C. A. Stan, C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, K. Dieckmann, W. Ketterle, « Fiftyfold Improvement in the Number of Quantum Degenerate Fermionic Atoms », Phys. Rev. Lett. **91**, 160401 (2003).

[36] F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K. W. Madison, J. Dalibard, « Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate », Phys. Rev. Lett. **88**, 250402 (2002).

[37] Z. Zhang, W. Vincent Liu, « Finite temperature damping of collective modes of a BCS-BEC crossover superfluid », Phys. Rev. A **83**, 023617 (2011).