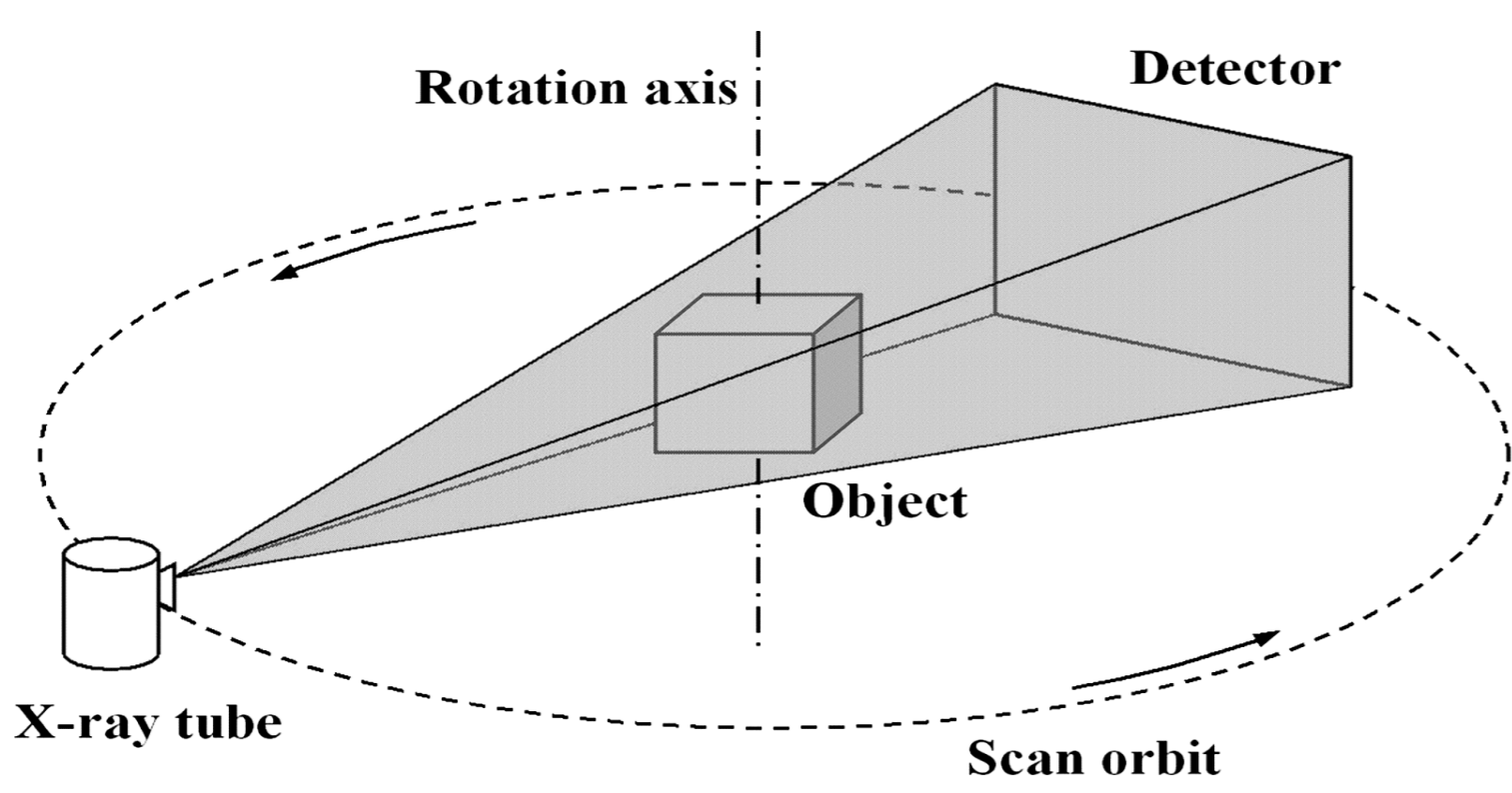


Résumé

Dans cet article, on considère le problème de reconstruction en tomographie 3D à rayons X en utilisant une approche bayésienne avec un modèle a priori hiérarchique (HHBM: Haar based Hierarchical Bayesian Method). La loi de Student généralisée est utilisée pour imposer la structure parcimonieuse des coefficients de la transformation multi-niveaux de Haar sur le volume. Des comparaisons avec l'état de l'art sont présentées, montrant que la méthode proposée donne des résultats de reconstruction plus précis et une convergence plus rapide. Des résultats sont fournis pour montrer l'efficacité du modèle proposé pour une reconstruction avec un nombre limité de projections.

Tomographie à rayon X



Le modèle direct:

$$g = Hf + \epsilon$$

où ϵ représente le bruit, et la matrice H correspond à l'opérateur de projection.

Modèle mathématique:

(a) Projection: $g = Hf$

(b) Rétroprojection: $f = H^t g$

(c) Rétroprojection filtrée: $f = H^t(H^t H)^{-1} g$

Méthodes de régularisation:

$$\hat{f} = \arg \min_f \left\{ \|g - Hf\|_2^2 + \lambda R(f) \right\}$$

$$R(f) = \|Df\|_2^2 \Rightarrow \text{QR}$$

$$R(f) = \|f\|_1 \Rightarrow \text{LASSO}$$

$$R(f) = \|Df\|_1 \Rightarrow \text{TV}$$

Estimation du JMAP

Loi a posteriori conjointe

$$\begin{aligned} p(f, z, v_z, v_\epsilon, v_\xi | g) \\ \propto p(g|f, v_\epsilon) p(f|z, v_\xi) p(z|v_z) p(v_z | \alpha_{z_0}, \beta_{z_0}) \cdot \\ p(v_\epsilon | \alpha_{\epsilon_0}, \beta_{\epsilon_0}) p(v_\xi | \alpha_{\xi_0}, \beta_{\xi_0}) \end{aligned}$$

JMAP

$$\begin{aligned} (\hat{f}, \hat{z}, \hat{v}_z, \hat{v}_\epsilon, \hat{v}_\xi) \\ = \arg \max_{f, z, v_z, v_\epsilon, v_\xi} p(f, z, v_z, v_\epsilon, v_\xi | g) \end{aligned}$$

Optimisation

$$\text{iter} : \hat{f}^{(k+1)} = \hat{f}^{(k)} - \hat{\gamma}_f^{(k)} \nabla \mathcal{J}(\hat{f}^{(k)});$$

$$\text{iter} : \hat{z}^{(k+1)} = \hat{z}^{(k)} - \hat{\gamma}_z^{(k)} \nabla \mathcal{J}(\hat{z}^{(k)});$$

$$\hat{v}_{z_j} = \left(\beta_{z_0} + \frac{1}{2} \hat{z}_j^2 \right) / (\alpha_{z_0} + 3/2);$$

$$\hat{v}_{\epsilon_i} = \left(\beta_{\epsilon_0} + \frac{1}{2} (g_i - [H\hat{f}]_i)^2 \right) / (\alpha_{\epsilon_0} + 3/2);$$

$$\hat{v}_{\xi_j} = \left(\beta_{\xi_0} + \frac{1}{2} (\hat{f}_j - [D\hat{z}]_j)^2 \right) / (\alpha_{\xi_0} + 3/2),$$

$\forall j \in [1, N]$ et $\forall i \in [1, M]$, où

$$\mathcal{J}(f) = \frac{1}{2} \|V_\epsilon^{-1/2} (g - Hf)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|V_\xi^{-1/2} (f - Dz)\|_2^2;$$

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2} \|V_\xi^{-1/2} (f - Dz)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|V_z^{-1/2} z\|_2^2.$$

Résultats numériques

Erreur relative quadratique moyenne (RMSE):

$$\delta_f = \frac{\|\hat{f} - f\|_2^2}{\|f\|_2^2}$$

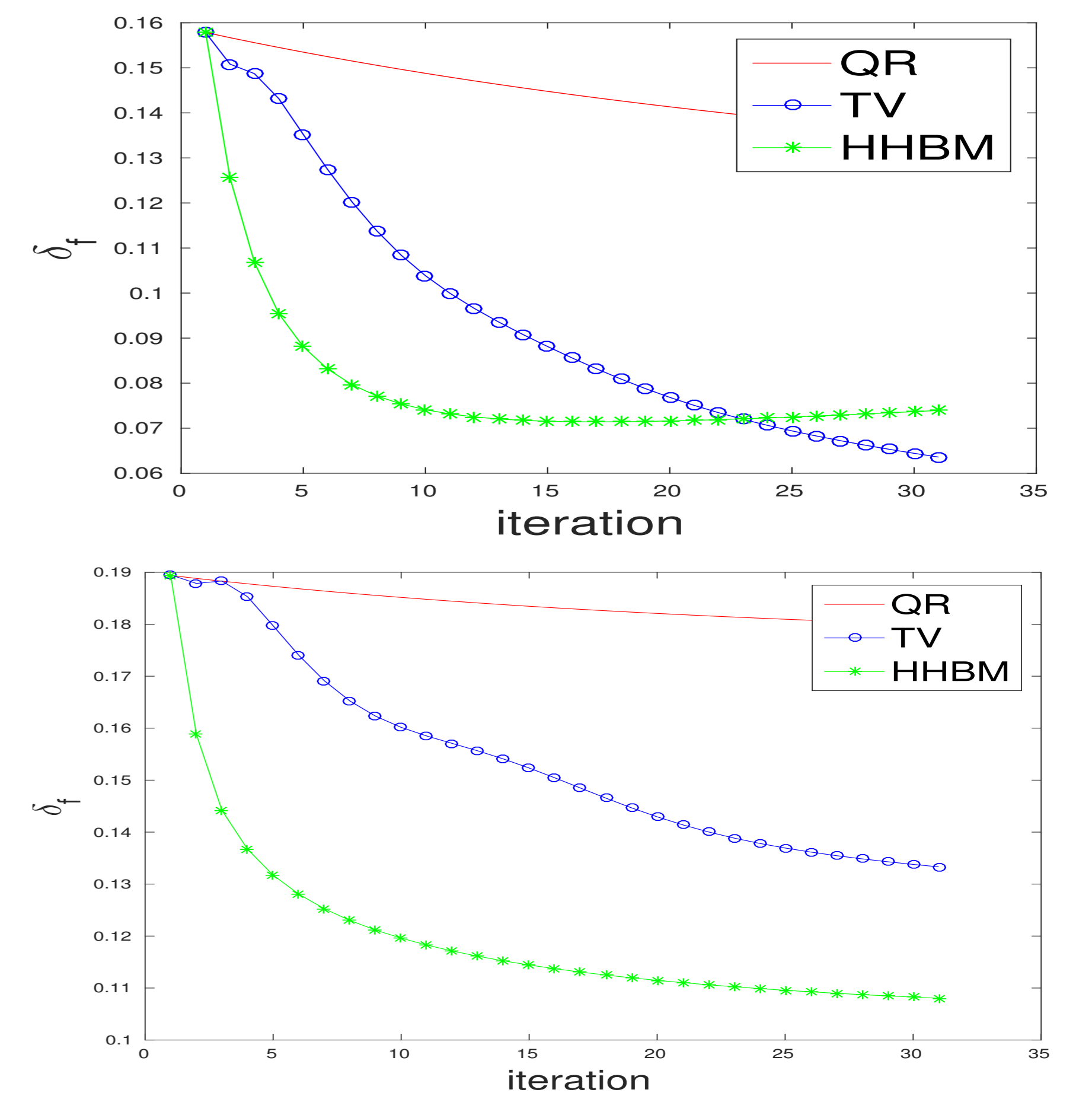


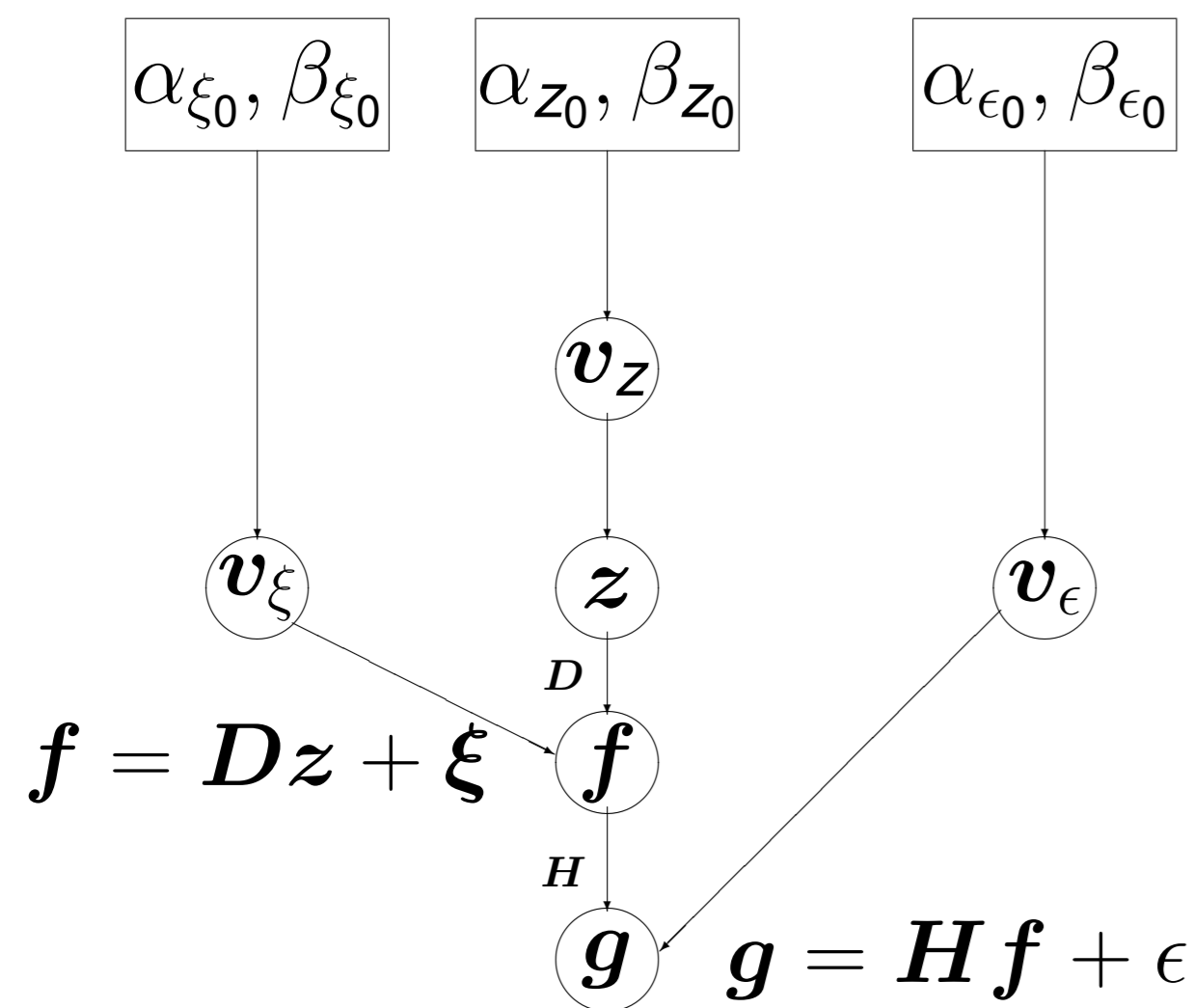
Figure: Comparaison du RMSE (δ_f) pour le fantôme reconstruit (64^3) en utilisant différentes méthodes avec 64 (haut) et 32 (bas) projections et un SNR de 20dB.

Modèle hiérarchique de HHBM

Règle de Bayes

$$p(f|g) = \frac{p(g|f)p(f)}{p(g)} \propto p(g|f)p(f)$$

Modèle hiérarchique



Variable cachée z

z : Coefficient de la transformée de Haar.

ξ : Incertitude sur la transformée de Haar.

$$\begin{aligned} p(z | \alpha_{z_0}, \beta_{z_0}) &= St_g(z | \alpha_{z_0}, \beta_{z_0}) \\ &= \int_0^\infty \mathcal{N}(z | 0, v_z) \mathcal{IG}(v_z | \alpha_{z_0}, \beta_{z_0}) dv_z \end{aligned}$$

Modèle hiérarchique

$$\begin{cases} p(g|f, v_\epsilon) = \mathcal{N}(g | Hf, V_\epsilon) \\ p(f|z, v_\xi) = \mathcal{N}(f | Dz, V_\xi) \\ p(z|v_z) = \mathcal{N}(z | 0, V_z) \\ p(v_z | \alpha_{z_0}, \beta_{z_0}) = \mathcal{IG}(v_z | \alpha_{z_0}, \beta_{z_0}) \\ p(v_\epsilon | \alpha_{\epsilon_0}, \beta_{\epsilon_0}) = \mathcal{IG}(v_\epsilon | \alpha_{\epsilon_0}, \beta_{\epsilon_0}) \\ p(v_\xi | \alpha_{\xi_0}, \beta_{\xi_0}) = \mathcal{IG}(v_\xi | \alpha_{\xi_0}, \beta_{\xi_0}) \end{cases}$$

$$V_i = \text{diag}[v_i] \text{ and } v_i = [v_{i_1}, \dots, v_{i_N}]$$

Résultats numériques

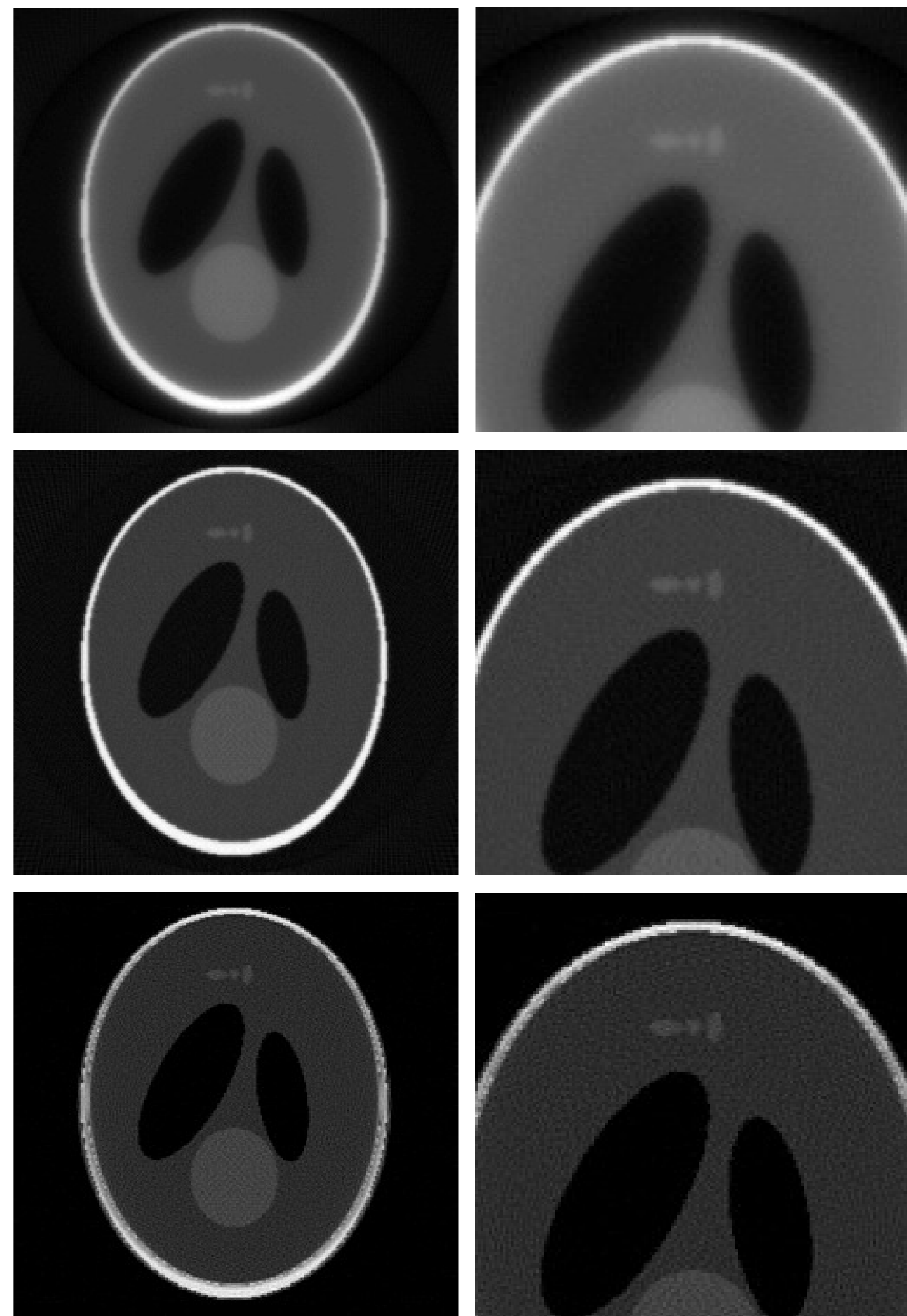


Figure: Shepp-Logan 3D reconstruits par les méthodes QR (haut), TV (milieu) et HHBM (bas) avec un SNR de 40dB et la moitié des projections.

Conclusions et perspectives

- ◇ Un modèle hiérarchique permettant de préserver les contours est proposé.
- ◇ La loi de Student-t généralisée, avec une queue lourde, est utilisée pour définir le modèle a priori.
- ◇ Le modèle est semi-supervisé: les paramètres (v) sont estimés et les hyperparamètres (α, β) sont fixés à l'initialization.
- ◇ Nous allons utiliser les autres transformation sparse (contourlet, curvelet) et comparer avec la transformée de Haar.
- ◇ Nous allons utiliser l'estimation du Posterior Mean via Variational Bayesian Approach pour le modèle proposé.