HAL
open science

# Reconstruction 3D en tomographie à rayons X à l'aide d'un modèle a priori hiérarchique utilisant la transformation de Haar

Li Wang, Nicolas Gac, Ali Mohammad-Djafari

## To cite this version:

Li Wang, Nicolas Gac, Ali Mohammad-Djafari. Reconstruction 3D en tomographie à rayons X à l'aide d'un modèle a priori hiérarchique utilisant la transformation de Haar. 26eme Colloque GRETSI Traitement du Signal & des Images, GRETSI 2017, Sep 2017, Juan-Les-Pins, France. hal-01567888

**HAL Id: hal-01567888**

**https://hal.science/hal-01567888v1**

Submitted on 24 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Reconstruction 3D en tomographie à rayons X à l'aide d'un modèle a priori hiérarchique utilisant la transformation de Haar

Li WANG[1,2], Nicolas GAC[1,2], Ali MOHAMMAD-DJAFARI[1,3]

[1]Laboratoire des Signaux et Système, CentraleSupélec

[2]Université Paris Sud, Université Paris Saclay

[3]CNRS, France

li.wang@l2s.centralesupelec.fr, Nicolas.GAC@l2s.centralesupelec.fr
Ali.mohammad-Djafari@l2s.centralesupelec.fr

**Résumé –** Dans cet article, on considère le problème de reconstruction en tomographie 3D à rayons X en utilisant une approche bayésienne avec un modèle a priori hiérarchique (HHBM: Haar based Hierarchical Bayesian Method). La loi de Student généralisée est utilisée pour imposer la structure parcimonieuse des coefficients de la transformation multi-niveaux de Haar sur le volume. Des comparaisons avec l'état de l'art sont présentées, montrant que la méthode proposée donne des résultats de reconstruction plus précis et une convergence plus rapide. Des résultats de simulation sont également fournis pour montrer l'efficacité du modèle proposé pour une reconstruction avec un nombre limité de projections.

**Abstract –** In this paper, we consider the 3D X-ray CT reconstruction problem by using the bayesian approach with a hierarchical prior model (HHBM: Haar based Hierarchical Bayesian Method). A generalized Student's-t distributed prior model is used to enforce the sparse structure of the multilevel Haar Transformation of the image. Comparisons with some state of the art methods are presented, showing that the proposed method gives more accurate reconstruction results and a faster convergence. Simulation results are also provided to show the effectiveness of the proposed hierarchical model for a reconstruction with a limited number of projections.

## 1 Introduction

La Transformée de Radon (RT), présentée en détail dans [1], est l'une des modélisations les plus utilisées en reconstruction en tomographie à rayon X :

$$g(r,\phi) = \mathcal{R}f(x,y) = \int_{L_{r,\phi}} f(x,y)\,\mathrm{d}l, \tag{1}$$

où $f(x,y)$ représente le coefficient d'atténuation, $r$ est la longueur perpendiculaire à partir du point central de la coordonnée et $\phi$ est l'angle du rayon X considéré. $L_{r,\phi}$ est la longueur du rayon $(r,\phi)$ qui passe à travers l'objet.

Il existe différentes méthodes analytiques pour la reconstruction, par exemple la rétro-projection filtrée (FBP : Filtered Back-Projection) [2]. Les méthodes statistiques donnent des résultats plus robustes et plus précis par rapport à FBP, en particulier dans les situations de faible dose ou temps limité d'acquisition, conduisant à des données incomplètes.

Dans de nombreuses méthodes algébriques et statistiques, on considère le modèle discret suivant :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2}$$

où $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{M\times 1}$ représente les données de projection, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ est l'objet, $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^{M\times 1}$ est le bruit additif qui correspond aux incertitudes et à l'erreur de mesure, la matrice $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ est le système de projection linéaire. Dans les méthodes de régularisation, le résultat de la reconstruction est obtenu en optimisant un critère qui combine un terme d'attache aux données et un terme de régularisation : $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}) = \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}\|^2 + \lambda \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})$, où $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})$ est le terme de régularisation et $\lambda$ est appelé le paramètre de régularisation. La méthode des Moindres Carrés (MC) est avec $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}) = 0$ et n'est pas stable. La régularisation quadratique (QR) est lorsque $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}) = \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}\|^2$. La méthode variation totale (TV) [3] est lorsque $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}) = \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}\|_{TV}$ ou $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}) = \sum_r \|\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{f}\|_1$ sous forme anisotrope où $r$ est l'indice de la coordonnées du fantôme. L'apparition du terme non différenciable $L_1$ conduit à des difficultés pour le calcul du gradient de contraintes. De nombreuses méthodes ont été étudiées pour ce problème d'optimisation, par exemple la méthode de Split Bregman [3].

Notons que dans toutes les méthodes de régularisation susmentionnées, il existe un paramètre $\lambda$ à fixer. Il existe différentes méthodes pour choisir une valeur appropriée pour $\lambda$, par exemple les méthodes de validation croisée (CV) et de L-curve, avec les détails présentés dans [4]. Cependant, le calcul pour le choix de ce paramètre doit être fait pour chaque simulation et chaque donnée différente, ce qui n'est pas pratique.

Les méthodes bayésiennes sont alors souvent utilisées pour estimer les paramètres et les variables simultanément grâce à un choix approprié de modèle a priori. En utilisant la formule de Bayes, la solution complète du problème inverse est fournie

par la distribution a posteriori :

$$p(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{g}) = p(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f},\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})/p(\boldsymbol{g}), \tag{3}$$

où $\boldsymbol{\theta}$ représente les paramètres inconnus. Elle est ensuite utilisée pour déduire à la fois $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{\theta}$.

# 2 Méthode proposée (HHBM)

La méthode HHBM présentée dans cet article est une extension des travaux présentés dans [5]. Au lieu d'estimer seulement la variable cachée et obtenir le fantôme reconstruit avec une transformation inverse, ici un modèle plus général est proposé. Les simulations sont appliquées au cas 3D.

Typiquement, la parcimonie des coefficients de la transformation Haar multi-niveaux est imposée en utilisant trois types de lois a priori : les distributions Gaussiennes Généralisées, les mélanges Gaussiens et les distributions à queue lourde.

La distribution standard de Student a une queue lourde, mais à partir de la définition de variance, on peut facilement comprendre qu'il existe une limite inférieure de variance : $\mathrm{Var}(f) = \frac{\nu}{\nu-2} > 1, (\nu > 2)$. Cette limite implique que cette distribution ne peut pas avoir une variance très petite, donc la parcimonie ne peut pas être entièrement imposée. Dans cet article on utilise une généralisation de la loi de Student ($\mathcal{S}t_g$) :

$$\mathcal{S}t_g(f|\alpha,\beta) = \int \mathcal{N}(f|0,v)\mathcal{IG}(v|\alpha,\beta)\,\mathrm{d}v. \tag{4}$$

Cette généralisation ajoute un paramètre supplémentaire qui permet de mieux contrôler le niveau de parcimonie de la distribution.

## 2.1 Modèle bayésien hiérarchique de HHBM

Le bruit additif est modélisé par la loi Gaussienne avec une moyenne égale à zéro et une variance inconnue $\boldsymbol{v}_\epsilon$ : $p(\boldsymbol{\epsilon}|\boldsymbol{v}_\epsilon) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\epsilon}|\boldsymbol{0},\boldsymbol{V}_\epsilon)$, où $\boldsymbol{V}_\epsilon = \mathrm{diag}\,[\boldsymbol{v}_\epsilon]$ est une matrice diagonale. D'après le modèle linéaire direct présenté dans l'équation (2), on obtient une expression de vraisemblance : $p(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_\epsilon) = \mathcal{N}(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{H}\boldsymbol{f},\boldsymbol{V}_\epsilon)$.

Dans les applications considérées, généralement l'objet à reconstruire est homogène par morceaux, étant donné qu'il est constitué de plusieurs matériaux différents. Avec cette propriété, une information qui peut être considérée comme une connaissance a priori est la parcimonie des hautes fréquences spectrales.

La représentation parcimonieuse d'une image continue par morceaux utilisée ici est la transformation de Haar multi-niveaux. Le vecteur $\boldsymbol{z}$ représente les coefficients de transformation de niveau $I$ : $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\xi}$ où $\boldsymbol{D}$ représente l'opérateur inverse de transformation de Haar multi-niveaux, $\boldsymbol{\xi}$ l'erreur de modélisation définie par une loi Gaussienne i.i.d.. La loi a priori de $\boldsymbol{f}$ sachant $\boldsymbol{z}$ est alors : $p(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}_\xi) = \mathcal{N}(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{D}\boldsymbol{z},\boldsymbol{V}_\xi)$ où $\boldsymbol{V}_\xi = \mathrm{diag}\,[\boldsymbol{v}_\xi]$ et $\boldsymbol{v}_\xi = [v_{\xi_1},\ \cdots,\ v_{\xi_1}]$ est la variance de $\boldsymbol{\xi}$.

Le vecteur $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, \cdots, z_N]$ est parcimonieux. Comme mentionné ci-dessus, la loi Student généralisée est utilisée pour caractériser cette parcimonie. En utilisant la propriété de marginalisation de Inverse Gamma-Normal, Eq.(4), la loi a priori pour $\boldsymbol{z}$ est :

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{v}_z) = \mathcal{N}(\boldsymbol{z}|0,\boldsymbol{V}_z), \quad \boldsymbol{V}_z = \mathrm{diag}\,[\boldsymbol{v}_z] \\ p(\boldsymbol{v}_z|\alpha_{z_0},\beta_{z_0}) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{IG}(v_{z_j}|\alpha_{z_0},\beta_{z_0}) \end{cases} \tag{5}$$

où les éléments du vecteur $\boldsymbol{v}_z$ sont i.i.d.

D'autre part, pour les variances des deux bruits : $\boldsymbol{v}_\epsilon$ et $\boldsymbol{v}_\xi$, en sachant qu'ils sont positifs, et que la majorité des valeurs sont petites, on choisit la distribution Inverse-Gamma pour la modélisation : $p(\boldsymbol{v}_\epsilon|\alpha_{\epsilon_0},\beta_{\epsilon_0}) = \prod_{i=1}^{M} \mathcal{IG}(v_{\epsilon_i}|\alpha_{\epsilon_0},\beta_{\epsilon_0})$ et- $p(\boldsymbol{v}_\xi|\alpha_{\xi_0},\beta_{\xi_0}) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{IG}(v_{\xi_j}|\alpha_{\xi_0},\beta_{\xi_0})$.

Avec toutes les distributions a priori proposées, le modèle contenant toutes les variables inconnues est :

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_\epsilon) \propto |\boldsymbol{V}_\epsilon|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{f})^T \boldsymbol{V}_\epsilon^{-1}(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{f})\right], \\ p(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}_\xi) \propto |\boldsymbol{V}_\xi|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{z})^T \boldsymbol{V}_\xi^{-1}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{z})\right], \\ p(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{v}_z) \propto |\boldsymbol{V}_z|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{V}_z^{-1}\boldsymbol{z}\right], \\ p(\boldsymbol{v}_z|\alpha_{z_0},\beta_{z_0}) \propto \prod_{j=1}^{N} v_{z_j}^{-(\alpha_{z_0}+1)} \exp\left[-\beta_{z_0} v_{z_j}^{-1}\right], \\ p(\boldsymbol{v}_\epsilon|\alpha_{\epsilon_0},\beta_{\epsilon_0}) \propto \prod_{i=1}^{M} v_{\epsilon_i}^{-(\alpha_{\epsilon_0}+1)} \exp\left[-\beta_{\epsilon_0} v_{\epsilon_i}^{-1}\right], \\ p(\boldsymbol{v}_\xi|\alpha_{\xi_0},\beta_{\xi_0}) \propto \prod_{j=1}^{N} v_{\xi_j}^{-(\alpha_{\xi_0}+1)} \exp\left[-\beta_{\xi_0} v_{\xi_j}^{-1}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Le graphique acyclique dirigé (DAG) correspondant au modèle proposé est représenté dans la figure 1.

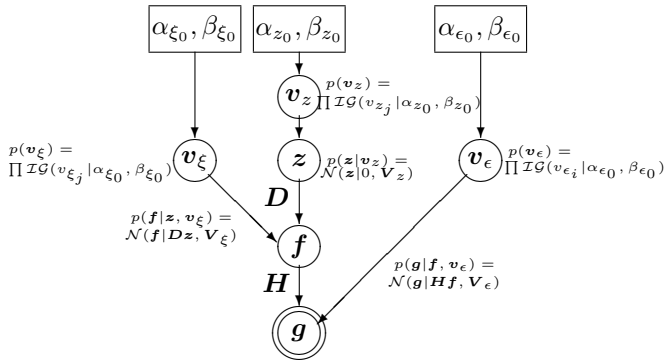



FIGURE 1 – DAG du modèle proposé illustrant toutes les variables inconnues (cercle), les hyper paramètres (rectangle) et les données (double cercle).

## 2.2 Inférence bayésienne

Par l'inférence bayésienne, la loi a posteriori est obtenue à partir de la vraisemblance et des lois a priori en utilisant (3) :

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{f},\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}_\epsilon,\boldsymbol{v}_\xi,\boldsymbol{v}_z|\boldsymbol{g}) \propto\ & p(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_\epsilon)p(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}_\xi)p(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{v}_z) \\ & \cdot\, p(\boldsymbol{v}_\epsilon)p(\boldsymbol{v}_\xi)p(\boldsymbol{v}_z) \end{aligned} \tag{7}$$

A partir de la distribution a posteriori obtenue, différentes méthodes d'estimation peuvent être utilisées. Il existe principalement deux options : la moyenne a posteriori (PM) et la maximisation a posteriori conjointe (JMAP) [6]. La PM peut

être calculée soit par des méthodes MCMC, soit d'Approche Bayésienne Variationnelle (VBA) [7]. Cependant, le coût de calcul de ces méthodes reste encore trop élevé pour les applications 3D. C'est la raison pour laquelle nous utilisons la méthode JMAP dans cet article pour estimer itérativement toutes les variables.

### 2.3 Estimation

Le calcul du JMAP vise à estimer itérativement et alternativement les variables et les paramètres en maximisant la loi a posteriori :

$$\left(\widehat{\boldsymbol{f}}, \widehat{\boldsymbol{z}}, \widehat{\boldsymbol{v}}_\epsilon, \widehat{\boldsymbol{v}}_\xi, \widehat{\boldsymbol{v}}_z\right) = \underset{\boldsymbol{f},\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}_\epsilon,\boldsymbol{v}_\xi,\boldsymbol{v}_z}{\arg\max} \left\{p(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}_\epsilon, \boldsymbol{v}_\xi, \boldsymbol{v}_z|\boldsymbol{g})\right\}. \tag{8}$$

À cause de la taille énorme des données, l'algorithme de descente de gradient est utilisé car le calcul de la solution exacte nécessite d'inversion une matrice de très grand taille, ce qui est coûteux. La règle de mise à jour itérative est :

$$\begin{aligned}
&\textbf{iter} : \widehat{\boldsymbol{f}}^{(k+1)} = \widehat{\boldsymbol{f}}^{(k)} - \widehat{\gamma}_f^{(k)} \nabla \mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{f}}^{(k)});\\
&\textbf{iter} : \widehat{\boldsymbol{z}}^{(k+1)} = \widehat{\boldsymbol{z}}^{(k)} - \widehat{\gamma}_z^{(k)} \nabla \mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{z}}^{(k)});\\
&\widehat{v}_{z_j} = \left(\beta_{z_0} + \frac{1}{2}\widehat{z}_j^2\right) / \left(\alpha_{z_0} + 3/2\right), \quad \forall j \in [1, N];\\
&\widehat{v}_{\epsilon_i} = \left(\beta_{\epsilon_0} + \frac{1}{2}\left(g_i - \left[\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{f}}\right]_i\right)^2\right) / \left(\alpha_{\epsilon_0} + 3/2\right), \quad \forall i \in [1, M];\\
&\widehat{v}_{\xi_j} = \left(\beta_{\xi_0} + \frac{1}{2}\left(\widehat{f}_j - [\boldsymbol{D}\widehat{\boldsymbol{z}}]_j\right)^2\right) / \left(\alpha_{\xi_0} + 3/2\right), \quad \forall j \in [1, N],
\end{aligned} \tag{9}$$

où

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{V}_\epsilon^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{f})\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{V}_\xi^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{z})\right\|^2;\\
&\mathcal{J}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{V}_\xi^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{z})\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{V}_z^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{z}\right\|^2;\\
&\widehat{\gamma}_f^{(k)} = \left(\left\|\nabla\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{f}}^{(k)})\right\|^2\right) / \left(\left\|\widehat{\boldsymbol{Y}}_\epsilon \boldsymbol{H}\nabla\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{f}}^{(k)})\right\|^2 + \left\|\widehat{\boldsymbol{Y}}_\xi \nabla\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{f}}^{(k)})\right\|^2\right);\\
&\widehat{\gamma}_z^{(k)} = \left(\left\|\nabla\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{z}}^{(k)})\right\|^2\right) / \left(\left\|\widehat{\boldsymbol{Y}}_\xi \boldsymbol{D}\nabla\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{z}}^{(k)})\right\|^2 + \left\|\widehat{\boldsymbol{Y}}_z \nabla\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{z}}^{(k)})\right\|^2\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

Où $\boldsymbol{Y}_\epsilon = \boldsymbol{V}_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{Y}_\xi = \boldsymbol{V}_\xi^{-\frac{1}{2}}$ et $\boldsymbol{Y}_z = \boldsymbol{V}_z^{-\frac{1}{2}}$. $\nabla\boldsymbol{J}(\cdot)$ est le dérivé de $\boldsymbol{J}(\cdot)$. $\widehat{\gamma}_f$ et $\widehat{\gamma}_z$ sont obtenus en utilisant la stratégie de longueur de pas optimisée [8]. Les initialisations des hyperparamètres $\alpha$ et $\beta$ sont : $\alpha_{z_0} = \alpha_{\epsilon_0} = \alpha_{\xi_0} = 2 + \varepsilon_1$, $\beta_{z_0} = \beta_{\epsilon_0} = \beta_{\xi_0} = \varepsilon_2$ où $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ sont de petites valeurs proches de zero.

## 3 Simulations

Dans les simulations, le fantôme de Shepp Logan de taille $64^3$ est utilisé comme objet de test. Il se compose de plusieurs zones homogènes, chacune correspondant à un matériau différent. Les projections sont appliquées pour des angles uniformément distribués de $0°$ à $180°$. La performance de la reconstruction est mesurée en fonction de l'erreur quadratique moyenne normalisée (NMSE) ou de l'erreur relative $\delta_f$, définie par $\delta_f = \text{NMSE} = \left\|\widehat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}\right\|^2 / \|\boldsymbol{f}\|^2$, où $\widehat{\boldsymbol{f}}$ est le fantôme reconstruit.

Nous comparent notre méthode à QR et TV. Les simulation de TV sont réalisé en utilisant l'algorithme de Split Bregman [3]. L'algorithme d'optimisation de descente de gradient est utilisé dans la méthode HHBM comme mentionné dans l'équation (9).

Afin de traiter les données 3D, compte tenu de la taille importante des données, nous utilisent des GPU. Plusieurs boîtes à outils sont accessibles pour l'utilisation des GPU par MATLAB. Nous avons utilisé ASTRA [9].

Figure 2 montre une zone de la tranche centrale des reconstructions effectuées.

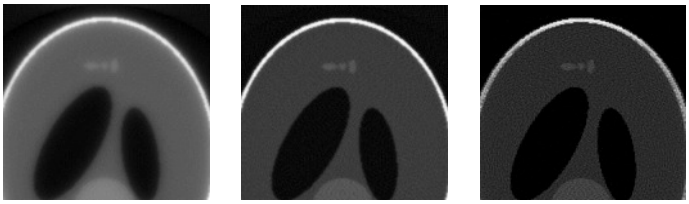


FIGURE 2 – Zones des tranches au milieu du fantôme reconstruit en utilisant différentes méthodes avec $1/4$ de projections avec SNR =$40dB$. Gauche : QR, milieu : TV, droite : HHBM.

Nous calculons le NMSE pour les différente méthodes comparées. La figure 3 montre le NMSE du fantôme de Shepp Logan reconstruit de taille $64^3$ en utilisant 64 projections, lorsque SNR = 40dB et 20dB. Lorsque le bruit est à un niveau bas, la méthode HHBM converge beaucoup plus vite et donne un résultat plus précis ; quand il y a un bruit plus important, la méthode TV reste robuste, mais la méthode HHBM converge encore plus vite que les autres. La figure 4 compare le NMSE du fantôme reconstruit de taille $64^3$ avec 32 projections. Lorsque les données de projection sont insuffisantes, la méthode HHBM reste robuste et la convergence est efficace. Cette propriété de la méthode HHBM est importante dans les applications où le coût de calcul est important et les résultats doivent être obtenus en quelques itérations.

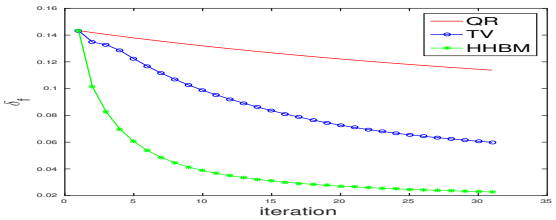
Plus de résultats sont donnés dans Tab.1, où $err_f$ et $err_g$ sont respectivement le NMSE des fantômes reconstruits et des projections estimées après 30 itérations. La valeur $Tc$ indique le temps de calcul pour chaque itération. A partir de la table et des figures, on peut voir que, même si le temps de calcul pour une itération de HHBM est plus long que la méthode TV (environ 2 fois), le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence en utilisant HHBM est moindre que la méthode TV.

## 4 Conclusion

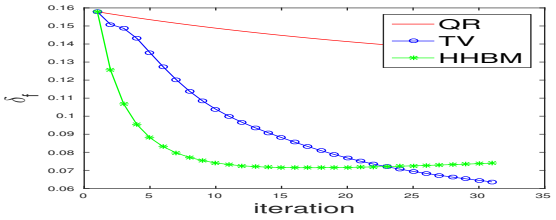
Nous avons proposé d'imposer la parcimonie du coefficient de la transformation Haar multi-niveaux des images continues par morceaux en utilisant une loi de Student généralisée, et d'utiliser l'approche bayésienne pour estimer l'image et les coefficients de transformation simultanément. Nous avons comparé la méthode HHBM proposée avec une méthode de régularisation quadratique et la méthode TV. À partir des résultats des

TABLE 1 – Comparaison des NMSE des reconstructions avec 30 itérations globales, chacune ayant 20 itérations de descente de gradient pour l'estimation de volume, et temps de calcul de chaque itération globale pour les différente méthodes comparées.

| 30iter | phantom size : 64*64*64 | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 64 projections | | | | | | 32 projections | | | | | |
| | 40dB | | | 20dB | | | 40dB | | | 20dB | | |
| | QR | TV | HHBM | QR | TV | HHBM | QR | TV | HHBM | QR | TV | HHBM |
| $err_f$ | 0.1138 | 0.0598 | 0.0228 | 0.1354 | 0.0636 | 0.0739 | 0.1537 | 0.1296 | 0.0696 | 0.1799 | 0.1333 | 0.1080 |
| $err_g$ | 0.0020 | 0.0013 | 0.0005 | 0.0046 | 0.0060 | 0.0105 | 0.0015 | 0.0030 | 0.0019 | 0.0030 | 0.0077 | 0.0102 |
| Tc | 0.2561 | 0.7681 | 1.8336 | 0.2346 | 0.7880 | 2.1800 | 0.2287 | 0.7526 | 1.6044 | 0.2121 | 0.7185 | 1.5533 |

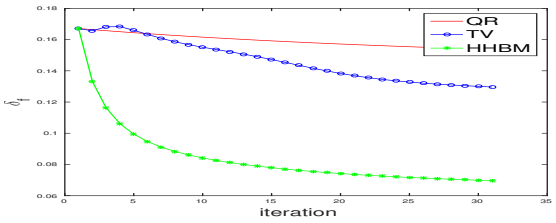



(a)

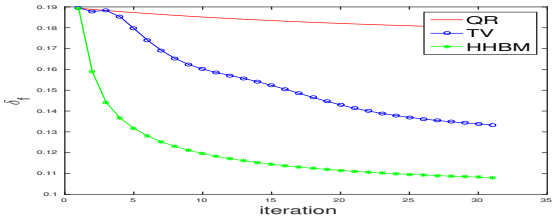



(b)

FIGURE 3 – Comparaison du NMSE du fantôme de Shepp Logan reconstruit de taille $64^3$ en utilisant différentes méthodes avec 64 projections et SNR (a) 40dB et (b) 20dB.




(a)




(b)

FIGURE 4 – Comparaison du NMSE du fantôme de Shepp Logan reconstruit de taille $64^3$ en utilisant différentes méthodes avec 32 projections et SNR (a) 40dB et (b) 20dB.

simulations, nous avons vu que la méthode HHBM est plus robuste pour les cas avec peu de projections. La vitesse de convergence est plus rapide que les deux autres techniques. Dans des travaux futurs, différentes bases de représentation parcimonieuses seront comparées et l'estimateur de la moyenne postérieure (PM) par VBA (Approximation Bayésienne Variationnelle) sera utilisé.

# Références


[1] Rolf Clackdoyle and Michel Defrise, "Tomographic reconstruction in the 21st century," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 27, no. 4, pp. 60–80, 2010.

[2] LA Feldkamp, LC Davis, and JW Kress, "Practical cone-beam algorithm," *JOSA A*, vol. 1, no. 6, pp. 612–619, 1984.

[3] Tom Goldstein and Stanley Osher, "The Split Bregman method for L1-regularized problems," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 2, no. 2, pp. 323–343, 2009.

[4] Nikolas P Galatsanos et al., "Methods for choosing the regularization parameter and estimating the noise variance in image restoration and their relation," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 1, no. 3, pp. 322–336, 1992.

[5] Li Wang et al., "Computed tomography reconstruction based on a hierarchical model and variational Bayesian method," in *2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2016, pp. 883–887.

[6] Jinyi Qi and Richard M Leahy, "Resolution and noise properties of MAP reconstruction for fully 3-D PET," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 5, pp. 493–506, 2000.

[7] Dimitris G Tzikas, Aristidis C Likas, and Nikolaos P Galatsanos, "The variational approximation for Bayesian inference," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 6, pp. 131–146, 2008.

[8] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.

[9] Willem Jan Palenstijn, K Joost Batenburg, and Jan Sijbers, "The ASTRA tomography toolbox," in *13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE*, 2013, vol. 2013.