



**HAL**  
open science

## Contraction du tube épais circulaire : remarques sur l'influence d'une non-linéarité élastique

Duc Nguyen Minh, Nicolas Schmitt

► **To cite this version:**

Duc Nguyen Minh, Nicolas Schmitt. Contraction du tube épais circulaire : remarques sur l'influence d'une non-linéarité élastique. *Revue française de Géotechnique*, 1988, 42, pp.35-46. hal-01566850

**HAL Id: hal-01566850**

**<https://hal.science/hal-01566850v1>**

Submitted on 31 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contraction du tube épais circulaire : remarques sur l'influence d'une non linéarité élastique

## *Closure of a thick-walled circular tube : remarks on the influence of non-linear elasticity*

Nguyen Minh Duc, Schmitt N.

Laboratoire de Mécanique des Solides

Ecole Polytechnique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris,  
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, CNRS

### Résumé

On étudie la contraction d'un tube épais, dont le comportement élastique non linéaire est décrit par une loi de Hooke avec module d'Young fonction des invariants des contraintes. Selon la loi de variation choisie, on met en évidence deux types de répartition de contraintes se traduisant, soit par un durcissement du matériau vers la paroi intérieure, soit par un amollissement accompagné d'un effet de décompression en paroi, comme en plasticité. Lorsque le module d'Young n'est fonction que de la contrainte moyenne, la répartition des contraintes s'identifie à celle de la solution classique de l'élasticité linéaire. Ces résultats sont liés au sens de la concavité des courbes effort-déformation obtenues pour des trajets de charge particuliers en compression triaxiale. Ils se reflètent également sur la courbe de convergence du tube, à condition de piloter l'essai par la pression intérieure.

*We study the closure of a non-linear elastic thick-walled tube, which behavior is described by a Hooke's law with a Young's modulus function of the stress invariants. Depending on the chosen function, two different kinds of stress fields are found out, associated either with a stiffening of the material towards the inner wall of the tube, or with a softening of the material and stress release at the wall, like in plasticity. When the Young's modulus is a function of the mean stress, the stress field is identical to the usual linear elastic one. These results are depending on the concavity sign of stress-strain curves obtained for particular loading paths in triaxial compression tests. They also can be detected on the closure curves of the tube test, provided that the inner pressure be controlled.*

# 1 Introduction

En mécanique des roches, on a l'habitude, pour simplifier, d'assimiler la phase du comportement précédent la rupture à de l'élasticité linéaire. Mais il est bien connu que le serrage des fissures préexistantes peut conférer aux courbes de réponse du matériau un caractère non linéaire plus ou moins accentué.

Ainsi, dans l'essai de compressibilité (1a), ce n'est qu'au-delà une pression de fermeture des fissures qu'on obtient une réponse linéaire. Cet essai sert ainsi à caractériser le *volume fissural*, Habib (1973).

Ce phénomène se retrouve également dans les essais triaxiaux classiques de compression (1b). On constate que les courbes *effort-déformation* présentent une concavité tournée *vers le haut*, ainsi qu'un raidissement du module de déformation moyen avec l'augmentation du confinement. Par contre, le fait que la concavité des courbes soit tournée *vers le bas* au voisinage de la rupture doit plutôt être attribué à des irréversibilités de type endommagement ou plasticité.

Dans quelle mesure ces phénomènes souvent négligés affectent-ils l'état de contrainte et de déformation dans une structure élastique, tel qu'il peut être calculé par la théorie linéaire classique ?

Cette question fait ici l'objet d'une discussion dans le cas particulier d'un tube circulaire épais en contraction, soumis à une pression extérieure uniforme  $P_e$  et une pression intérieure  $P_i < P_e$ .

Le problème avait déjà été abordé par Mandel (1959) dans le cadre de l'élasticité non linéaire du second ordre. En exprimant que les courbes effort-déformation présentent une concavité tournée *vers le haut* (1b), l'auteur montrait que l'intensité de la contrainte tangentielle ( $\sigma_\theta$ ) en paroi, devait être plus importante que celle qui est obtenue par la solution classique de Kirsch.

Par contre, en exprimant que le *module d'Young* augmente avec le confinement, ou, plus exactement, avec la plus petite contrainte principale en valeur absolue, tout en restant dans le cadre formel de la loi de Hooke, Santarelli *et al.* arrivent à un résultat opposé (Santarelli *et al.* (1986); Santarelli and Brown (1987)). L'intensité de la contrainte  $\sigma_\theta$  est plus faible en paroi (jusqu'à plus de 50 %), et le maximum peut être atteint à l'intérieur du massif. Ces résultats contradictoires, obtenus par deux modèles de comportement différents, susceptibles de rendre compte d'un même phénomène physique, soulèvent un paradoxe qu'il s'agit de lever.

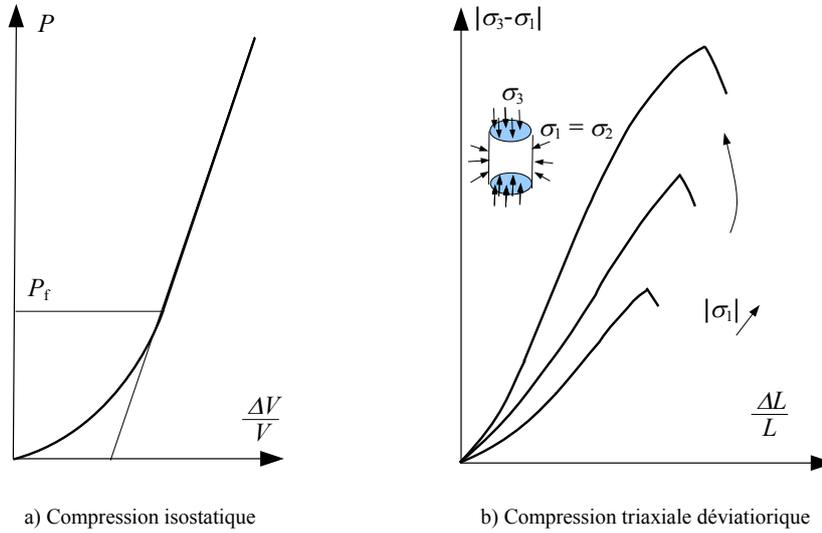


FIGURE 1 – Courbes effort-déformation

## 2 Modèle de comportement

### 2.1 Choix du modèle

Le modèle adopté par Mandel (1959) peut être plus généralement étendu aux termes de déformation d'ordre supérieur. Les calculs sont cependant peu commodes et ne peuvent être qu'approchés. On gardera donc le cadre formel de la loi de Hooke, avec un module d'Young variable, adopté par Santerelli *et al.*, et qui avait déjà été utilisé dans un contexte plus large des déformations finies par Fehrst (1964), où il avait été qualifié de *modèle quasi-linéaire*.

Comme on considère un matériau isotrope, le *module d'Young*  $E$ , fonction des contraintes, doit l'être plus précisément des invariants. Les contraintes principales étant supposées ordonnées (la compression étant négative).

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

On admettra, pour simplifier, que la contrainte intermédiaire n'intervient pas. De ce fait, d'après Mandel (1980) le module d'Young peut s'exprimer sous la forme

$$E = E \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right) \quad (1)$$

On ne dispose pas d'essais permettant de préciser la forme de l'équation (Eq. 1). Notre analyse étant essentiellement qualitative, on se limitera à priori

à des formes linéaires pour représenter les tendances observées expérimentalement dans les essais triaxiaux de compression, à savoir, un raidissement du matériau au cours du chargement

$$E = E_0 \cdot \left( 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \quad (2)$$

$E_0$  étant le module d'Young initial,  $\alpha > 0$ , un paramètre sans dimension,  $\sigma_0 < 0$  une contrainte caractéristique de compression,  $\sigma < 0$  la *contrainte équivalente* de compression, fonction des invariants.

On se propose par la suite de considérer la forme générale suivante pour la contrainte équivalente  $\sigma$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + m \cdot \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (3)$$

Ce modèle général contient tous les autres modèles, celui de la *contrainte moyenne*  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  pour  $m = 0$ , celui de la *contrainte déviatorique*  $\sigma = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$  pour  $m = +1$  et celui proposé dans la formulation de Santarelli and Brown (1987)  $\sigma = \sigma_1$  pour  $m = -1$ .

Il convient de remarquer qu'avec la loi (Eq. 2), la courbe effort-déformation dans un essai triaxial n'est pas linéaire en général, et sa pente est alors différente de  $E(\sigma)$ . Ce paramètre, qu'on continue d'appeler module d'Young, dans la mesure où il exprime la proportionnalité entre les tenseurs de contrainte et de déformation, n'a donc plus la signification physique qu'on lui attribue classiquement ; il représente un module sécant.

Par ailleurs, il est bien connu que le coefficient de Poisson joue en général un rôle secondaire dans les problèmes élastiques ou élasto-plastiques. Sans vouloir sous-estimer l'influence d'une variation de ce coefficient avec l'état des contraintes, nous admettrons donc qu'il garde une valeur constante, qu'on choisit égale à  $\nu = 0,5$ . Cette hypothèse d'incompressibilité n'ôte pour autant à la généralité des phénomènes qualitatifs étudiés.

## 2.2 Allure des courbes effort-déformation

Dans un essai triaxial où  $\sigma_1 = \sigma_2$ , lors de l'application de  $\Delta\sigma_3$ , la loi de comportement s'écrit

$$\sigma_3 - \sigma_1 = E(\sigma) \cdot \varepsilon_3 \quad (4)$$

On distingue deux trajets de charge différents (Fig. 2) :

1. Dans l'essai triaxial classique ( $\sigma_1 = \text{Cte}$ ), la courbe effort-déformation est une droite pour  $m = -1$  (hypothèse de Santarelli) ; si  $m > -1$ , la concavité de la courbe se tourne *vers le haut*, et *vers le bas* si  $m < -1$ .

2. Dans un essai à contrainte moyenne constante ( $(\sigma_3 + \sigma_1)/2 = \text{Cte}$ ), la courbe de réponse est une droite pour  $m = 0$  ; si  $m > 0$ , la concavité se tourne *vers le haut*, alors que si  $m < 0$ , elle se tourne *vers le bas*.

Nous utiliserons ici une terminologie particulière en disant dans le premier cas, qu'il y a *durcissement* du matériau et dans le second cas qu'il y a *amollissement*.

En l'absence de résultats d'essais spécifiques permettant de préciser le paramètre  $m$  du modèle général, on considère pour l'instant que  $m$  est de signe arbitraire et varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

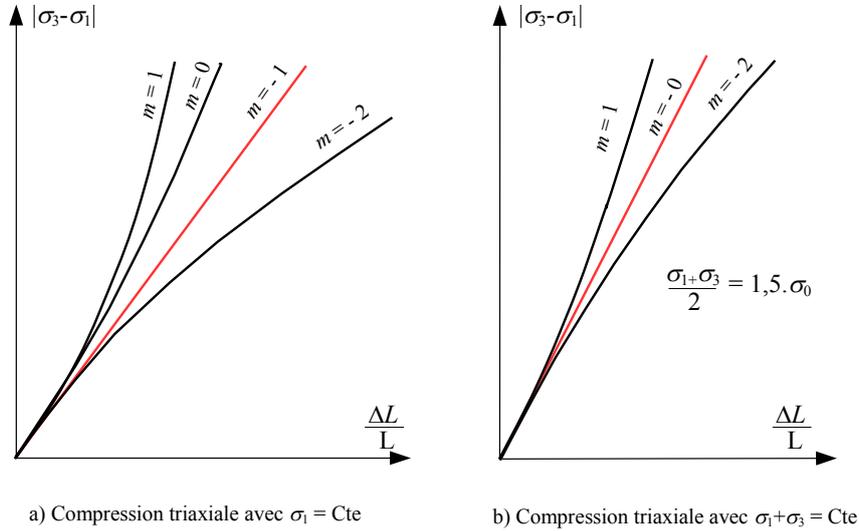


FIGURE 2 – Courbes effort-déformation données par le modèle

**Remarque :**

La relation (Eq. 2) implique une augmentation de  $E$  avec  $|\sigma|$ . On peut envisager d'écarter le paramètre  $E$  à la valeur  $E_0 \cdot (1 + \alpha)$ , par exemple, lorsque  $\sigma/\sigma_0 = 1$ , ou utiliser entre autre une exponentielle amortie à la place de (Eq. 2). Cependant, (Eq. 3) montre que les courbes tendent asymptotiquement vers une droite passant par l'origine ; la concavité des courbes doit donc s'inverser à partir d'un certain niveau de chargement, qui se fait d'ailleurs brutalement avec le modèle de  $E$  linéaire par morceaux. La simplicité du modèle (Eq. 4) se heurte à ces inconvénients, qui en montrent les limites. En définitive, on admet que les solutions obtenues avec les expressions (Eqs. 2-3) sont valables dans une certaine plage de variation de  $\sigma$ .

### 3 Calcul de la contraction du tube circulaire épais

La géométrie de ce problème classique à symétrie circulaire est précisée sur la figure 3. Le tube a un rayon intérieur unité ( $r_i = 1$ , et un rayon extérieur  $r_e = \rho$ ).

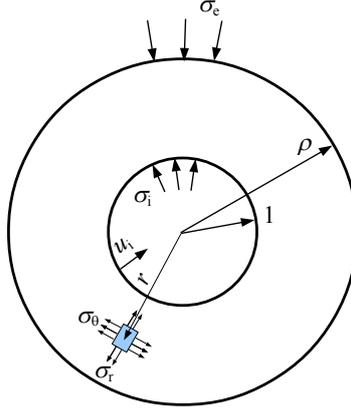


FIGURE 3 – Géométrie du problème

Les déformations sont planes, l'état de contraintes initial est isotrope, avec  $\sigma_i = \sigma_e$ ; la contraction du tube est envisagée soit sous l'action d'une *contrainte intérieure*  $\sigma_i$  croissante (algébriquement), soit sous l'action d'une *contrainte extérieure*  $\sigma_e$  décroissante. On se place dans le cadre des petites transformations.

$u = u_r(r)$  étant le déplacement radial d'un point matériel, les équations du problème sont les suivantes :

— Condition d'incompressibilité

$$\frac{u(r)}{r} + \frac{\partial u(r)}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

— Loi de Hooke

$$E'(\sigma) \cdot \frac{u(r)}{r} = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (6)$$

avec

$$E' = \frac{4}{3}E(\sigma)$$

— Equation d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_r(r)}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta(r) - \sigma_r(r)}{r} \quad (7)$$

De la première équation (Eq. 5), on déduit

$$u = u(r) = \frac{u_i}{r} \quad (8)$$

où  $u_i < 0$  est le *déplacement inconnu en paroi intérieure*.

Compte tenu des deux autres équations (Eqs. 6 - 7), on obtient la relation générale

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = E'(\sigma) \cdot \frac{u_i}{r^3} \quad (9)$$

qui conduit, en fonction du choix de  $E(\sigma)$ , aux équations différentielles suivantes à variables séparées en fonction de  $\sigma_r$  et  $r$  aux expressions suivantes (Eqs. 10 - 13).

1. Cas général

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_0}} \cdot \frac{d\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{\frac{2A}{r^3}}{1 - (1 + m) \cdot \frac{A}{r^2}} \cdot dr \quad (10)$$

2. Cas où  $\sigma = (\sigma_\theta + \sigma_r)/2$

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_0}} \cdot \frac{d\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{\frac{2A}{r^3}}{1 - \frac{A}{r^2}} \cdot dr \quad (11)$$

3. Cas où  $\sigma = (\sigma_\theta - \sigma_r)/2$

$$\alpha \cdot \frac{d\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{\frac{2A}{r^3}}{1 - \frac{A}{r^2}} \cdot dr \quad (12)$$

4. Cas où  $\sigma = \sigma_r$

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_0}} \cdot \frac{d\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{2A}{r^3} \cdot dr \quad (13)$$

avec

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha \cdot E_0}{\sigma_0} \cdot u_i \quad (14)$$

où  $A$  est une inconnue proportionnelle à  $u_i$ .

L'intégration de ces équations entre 1 et  $r$  donne l'expression de  $\sigma_r$  en fonction de  $r$ ;  $\sigma_\theta$  se déduit de l'équation d'équilibre; l'inconnue  $A$  se détermine par la condition à la limite  $\sigma_r(\rho) = \sigma_e$ , d'où l'on déduit ensuite  $u_i$  par l'équation 14.

Dans le cas général (Eq. 10), on obtient la solution suivante

$$\begin{cases} 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \left(1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{(1+m) \cdot A \cdot (1-1/r^2)}{1-(1+m) \cdot A}\right)^{\frac{1}{1+m}} \\ 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = \left(1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{2A/r^2}{1-(1+m) \cdot A/r^2}\right) \end{cases} \quad (15)$$

où

$$A = \frac{1}{1+m} \cdot \frac{(1+\beta)^{1+m} - 1}{(1+\beta)^{1+m} - \rho^{-2}} \quad (16)$$

et

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha \frac{\sigma_i}{\sigma_0}} \cdot \frac{\sigma_e - \sigma_i}{\sigma_0} \quad (17)$$

Le modèle correspondant est bien représentatif de tous les modèles considérés, puisque toutes les autres solutions s'en déduisent (cf. annexe 1).

**Remarques :**

1. Le paramètre positif  $\beta$  apparaît comme un paramètre de chargement : nul initialement ( $\sigma_e = \sigma_i$ ), il augmente au cours du chargement, que  $\sigma_e$  soit la variable commandée ( $\sigma_e$  décroît), ou que  $\sigma_i$  la soit ( $\sigma_i$  croît).
2. Dans le cas où  $E(\sigma)$  serait borné à partir de  $\sigma = \sigma_0$  (voir remarque de la section 2), la solution s'obtient par raccord aux solutions précédentes de la solution classique de Kirsch le long d'une frontière éventuelle ( $\sigma = \sigma_0$ ).

## 4 Discussion

L'équation générale (Eq. 15) permet de discuter, en fonction de  $m$  (positif ou négatif), de l'évolution de la forme de la solution, tant du point de vue de l'allure des courbes de convergence que de la répartition des contraintes.

### 4.1 Courbes de convergence (Figs. 4-5)

Le déplacement en paroi  $u_i$ , proportionnel à  $A$ , dépend du paramètre de chargement  $\beta$ . L'expression de  $\beta$  en fonction des paramètres  $\sigma_e$  et  $\sigma_i$  montre que dans un plan ( $\sigma_e - \sigma_i, |u_i|$ ) la courbe de convergence dépendra du trajet de chargement, c'est-à-dire selon que  $\sigma_e$  ou  $\sigma_i$  est la variable commandée.

La discussion portant sur le sens de la concavité de cette courbe est détaillée en annexe 2.

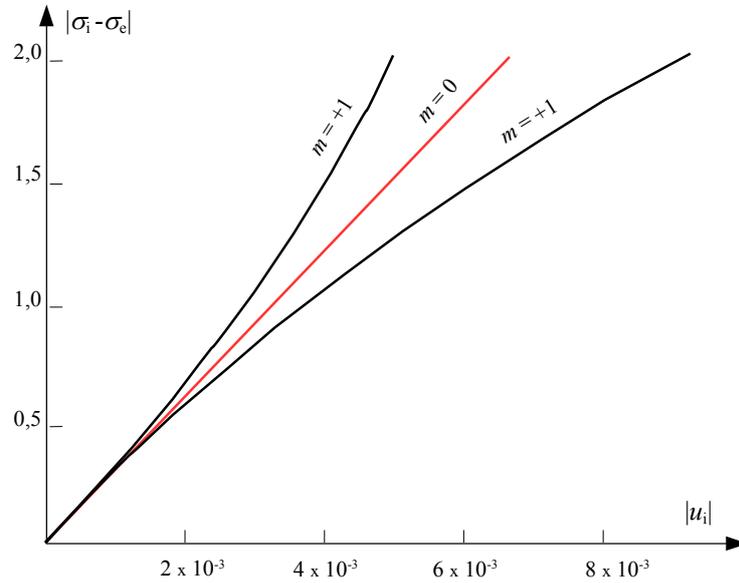


FIGURE 4 – Contraction du tube par pilotage de la contrainte intérieure  $\sigma_i$  avec  $\rho = \infty$

Lorsque le milieu est infini ( $\rho = \infty$ ), on trouve :

1. Si  $\sigma_i$  est variable :
  - pour  $m = 0$ , la convergence est linéaire ;
  - pour  $m > 0$ , la concavité de la courbe est tournée *vers le haut*, il y a *raidissement* du tube au cours de la contraction ;
  - pour  $m < 0$ , on obtient l'effet inverse, le tube *s'amollit*.

Dans ce cas, on voit que l'allure des courbes de convergence suivant les valeurs de  $m$  reflète celle des courbes effort-déformation du modèle sous compression triaxiale lorsque la contrainte moyenne est maintenue constante.

2. Si  $\sigma_e$  est variable :
  - pour  $m = -2$ , la convergence est linéaire ;
  - pour  $m > -2$ , il y a concavité de la courbe *vers le haut*, c'est-à-dire *raidissement* du tube,
  - pour  $m < -2$ , on obtient bien sûr l'effet inverse.

Néanmoins, les valeurs de  $m \leq -2$  semblent irréalistes, si bien que c'est l'essai avec pression intérieure variable qui peut être intéressant pour préciser le modèle ou indiquer le signe de  $m$ .

Évidemment, lorsque  $\rho$  est fini, les résultats précédents restent vrais dans

leur ensemble, sous réserve, pour certaines valeurs de  $m$ , de conditions sur l'épaisseur du tube ou le niveau de chargement (annexe 2).

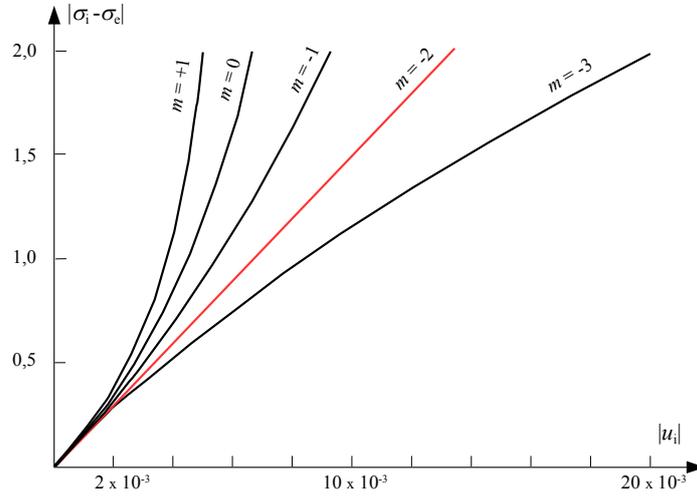


FIGURE 5 – Contraction du tube par pilotage de la contrainte extérieure  $\sigma_e$  avec  $\rho = \infty$

D'après l'expression de  $A$  (Eq. 16), il est intéressant de remarquer que pour  $m < -1$ , ce paramètre tend vers l'infini lorsque  $\beta$  tend vers une valeur limite  $\beta_0$  annulant le dénominateur

$$(1 + \beta_0)^{1+m} = \frac{1}{\rho^2} \quad (18)$$

Le paramètre  $\beta_0$  apparaît ainsi comme une charge limite.

## 4.2 Répartition des contraintes (Fig. 6)

La contrainte radiale  $\sigma_r$  est évidemment une fonction décroissante de  $r$ , puisque, s'agissant d'une contraction du tube,  $u_i < 0$ , donc d'après l'équation (Eq. 9),  $d\sigma_r/dr < 0$ .

La discussion, détaillée en annexe 3, porte sur l'existence d'un extremum pour  $\sigma_\theta$  à l'intérieur du massif. On distingue :

1. cas  $m = 0$  : ce cas est remarquable car la distribution de contraintes est celle de l'élasticité linéaire (solution de Kirsch). Ce résultat reste valable dans le cadre plus général du matériau compressible où les caractéristiques élastiques sont des fonctions quelconques de la contrainte moyenne (annexe 4).

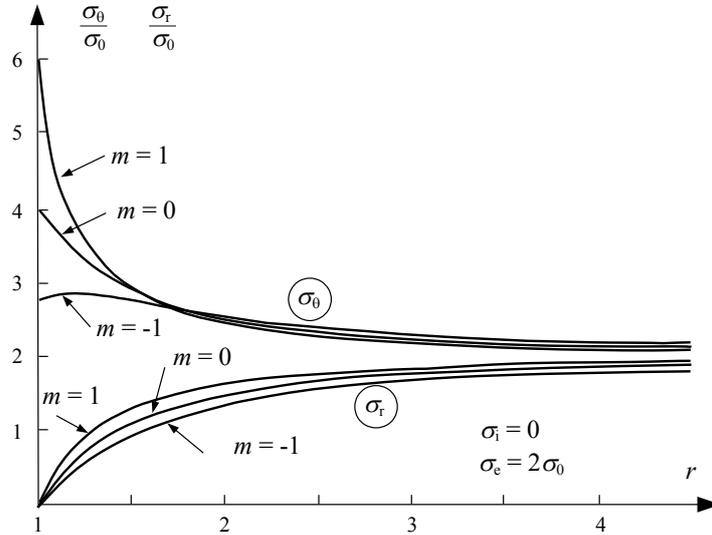


FIGURE 6 – Répartition des contraintes pour le cylindre infini

2. cas  $m > 0$  : la contrainte  $\sigma_\theta$  conserve la même allure que précédemment : l'intensité maximale est atteinte en paroi, où elle est supérieure à celle de la solution classique ; parallèlement, il y a *durcissement* du matériau vers la paroi intérieure, car  $E'(\sigma)$  est fonction décroissante de  $r$  (annexe 2).
3. cas  $m < 0$  : au cours du chargement, la contrainte  $\sigma_\theta$  a d'abord la même allure que dans les cas précédents ; si le chargement se poursuit, il apparaît un extremum de  $\sigma_\theta$  se déplaçant vers l'intérieur du massif au point

$$r_1^2 = (1 - m) \cdot A \quad (19)$$

Si le tube a une épaisseur finie, l'extremum peut même sortir du tube ( $r_1 > \rho$ ) de sorte que  $\sigma_\theta$  devienne une fonction strictement décroissante de  $r$ .

La contrainte en paroi est ici inférieure en intensité à celle de la solution classique ; parallèlement, il y a amollissement du matériau vers la paroi intérieure,  $E'(\sigma)$  étant ici fonction croissante de  $r$ . Ces différents aspects indiquent certaines analogies de comportement avec l'élastoplasticité.

Des résultats similaires avaient d'ailleurs été mis en évidence dans un contexte différent par Schmitt N (1987). Celui-ci avait étudié l'équilibre d'une galerie circulaire chauffée dans un massif élastique dont le module d'Young était fonction décroissante de la température, donc fonction croissante du rayon.

Il est intéressant de noter dans le cas où  $\rho = \infty$  que l'intensité du pic de  $\sigma_\theta$  reste constante si  $\sigma_i$  est la variable commandée alors qu'elle augmente avec le chargement dans le cas contraire. En effet

$$1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_\theta^M}{\sigma_0} = \frac{1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_0}}{1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_0}} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i^*}{\sigma_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

où  $\sigma_\theta^M$  est la valeur de l'extremum et (\*) se rapporte au paramètre de charge relatif à l'apparition de l'extremum en paroi.

Comme par ailleurs, la valeur absolue de la contrainte moyenne croît avec le rayon (annexe 3, section 2), ceci implique qu'avec un critère de rupture ou de plasticité de type courbe intrinsèque, la limite élastique est toujours atteinte en paroi lorsque  $|\sigma_i|$  décroît, alors que si  $|\sigma_e|$  croît, elle peut être atteinte soit en paroi, soit, éventuellement, à l'intérieur du massif dans la zone  $1 < r \leq r_1$ .

## 5 Conclusion

En utilisant un modèle de comportement assez simple, basé sur la relation de Hooke avec un *module d'Young* variable, fonction de l'état de contraintes, nous avons discuté de l'influence de la non-linéarité élastique sur l'état d'équilibre dans un tube circulaire épais en contraction.

A condition de se référer à des essais triaxiaux de compression à contrainte moyenne imposée ( $\sigma_1 + \sigma_3 = Cte$ ), on met en évidence la corrélation étroite entre l'allure des courbes effort-déformation correspondant à ces essais et la distribution des contraintes dans le tube :

1. Si la concavité des courbes est tournée vers le haut ( $m > 0$ ), c'est-à-dire si la raideur du matériau augmente en cours de compression, il résulte un durcissement du matériau vers la paroi interne du tube, où la contrainte tangentielle atteint son intensité maximale, supérieure à celle de la solution de Kirsch. Ce résultat rejoint celui de Mandel (1959).
2. A l'inverse, si la raideur du matériau diminue au cours de la compression ( $m < 0$ ), comme dans le cas particulier de l'hypothèse de Santarelli et al. (1986) ( $m = -1$ ); il résulte un amollissement du matériau vers la paroi interne du tube, où la contrainte tangentielle devient inférieure en intensité à celle de la solution classique. Parallèlement, l'extremum de la contrainte tangentielle est rejeté à l'intérieur du massif, traduisant un effet de décompression en paroi. La similitude avec l'élastoplasticité s'étend à la notion de charge limite, lorsque la concavité vers le bas des courbes effort-déformation des essais triaxiaux à contrainte moyenne constante est très marquée.

3. Enfin, lorsque les courbes efforts-déformation sont linéaires ( $m = 0$ ), la distribution des contraintes dans le tube s'identifie avec celle de la solution classique de l'élasticité linéaire. Le module d'Young, fonction de la contrainte moyenne, est alors constant dans le tube. La non-linéarité élastique se manifeste ici par une réponse différente au niveau de la convergence du tube suivant le trajet de charge adopté : ainsi, si la pression intérieure est la variable commandée, la convergence évolue de façon presque linéaire ; par contre, si c'est la pression extérieure qui est la variable commandée, la convergence est non linéaire, par suite de l'augmentation du module d'Young.

Il apparaît ainsi, que pour des roches avec une élasticité non linéaire marquée, il est nécessaire de prévoir des procédures expérimentales adaptées pour identifier la loi de variation du module d'Young.

Pour les sols, les essais triaxiaux à pression moyenne constante montrent des déformations pratiquement linéaires au début du chargement (ou du déchargement) (Luong (1980)), c'est-à-dire dans le cas présent que la solution de Kirsch resterait valable pour un trou circulaire dans un sol.

Ne disposant pas encore suffisamment de résultats expérimentaux pour les roches, il est difficile d'émettre à ce sujet autre chose que des conjectures. Il semble raisonnable d'attribuer l'essentiel du phénomène de serrage des roches à l'effet de la contrainte moyenne, ce qui revient à se limiter à des faibles valeurs de  $m$ , quel que soit son signe. Mais, il ne faut pas exclure la possibilité d'une plus forte influence du déviateur des contraintes pour certains types de matériaux.

## Références

Habib, P.. Précis de Géotechnique. Dunod Ed., Paris France; 1973.

Mandel, J.. Les calculs en matière de pression des terrains. Revue de l'Industrie minière 1959 ; :78–92.

Santarelli, F., Brown, E., Maury, V.. Analysis of borehole stresses using pressure dependent, linear elasticity, technical note. Int J Rock Mech Min Sci & Geom Abstr 1986 ;23-6 :445–449.

Santarelli, F., Brown, E.. Performance of deep wellbores in rock with a confining pressure-dependent elastic modulus. In : Pande G. N., Z.O.C.,

- editor. Proc. 6th Congo Int. SMIR,. Montréal, Canada : Balkema, Rotterdam Netherland ; 1987,.
- Fehrst, S.. Examination of quasi-linear elasticity. Second order effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics ; Haïfa, Israël : Pergamon Press Book, Mc Dilan Comp. ; 1964, p. 252–260.
- Mandel, J.. Propriétés mécaniques des matériaux. Eyrolles Ed., Paris, France ; 1980.
- N, S.. Étude du comportement thermomécanique du charbon dans le cadre de la gazéification souterraine - analyse de la stabilité de la liaison de gazéification. Ph.D. thesis ; Université Paris VI ; Paris, France ; 1987.
- Luong, M.. Stress-strain aspects of cohesionless soils under cyclic and transient loading. In : Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loadings. Swansea, UK : Balkema, Rotterdam Netherland ; 1980,.

## Appendix A : Solutions obtenues selon le choix particulier du paramètre *contrainte*

La solution du « cas général » où  $\sigma$  est fonction du paramètre  $m$  est donnée en (Eq. 15). Pour les autres cas envisagés, nous donnons, ci-après, les solutions qui s'obtiennent aussi par (Eq. 15) pour des valeurs particulières de  $m$ , éventuellement par passage à la limite.

### Appendix A.1 : Cas où le paramètre $m$ est nul ou la contrainte considérée est la contrainte moyenne

. Dans ce cas, la contrainte équivalente  $\sigma$  vaut  $\sigma = (\sigma_\theta + \sigma_r)/2$ .

La distribution des contraintes est identique à celle de l'élasticité linéaire (solution de Kirsch). Ce résultat reste valable quelle que soit la forme  $E(\sigma)$  (annexe 4).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \sigma_i + (\sigma_e - \sigma_i) \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right) \\ \sigma_\theta = \sigma_i + (\sigma_e - \sigma_i) \cdot \left( \frac{1 + \frac{1}{r^2}}{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right) \\ A = \alpha \cdot \frac{\sigma_e - \sigma_i}{\sigma_0} \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_0} - \left( 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) / \rho^2 \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (20)$$

On remarquera que dans ce cas, la contrainte moyenne est constante à l'intérieur du tube

$$\sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = \frac{\sigma_e - \frac{\sigma_i}{\rho^2}}{1 - \frac{1}{\rho^2}} \quad (21)$$

## Appendix A.2 : Cas où la contrainte considérée est la contrainte déviatorique

. Dans ce cas, la contrainte équivalente  $\sigma$  vaut  $\sigma = (\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ .

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_i + \frac{\sigma_0}{\alpha} \cdot \ln \left[ \frac{1 - A/r^2}{1 - A} \right] \\ \sigma_\theta = \sigma_i + \frac{\sigma_0}{\alpha} \cdot \left[ \ln \left[ \frac{1 - A/r^2}{1 - A} \right] + \frac{2A}{r^2} \cdot \left( 1 - \frac{A}{r^2} \right)^{-1} \right] \\ A = \left( \exp \left[ \alpha \cdot \frac{\sigma_e - \sigma_i}{\sigma_0} \right] - 1 \right) \cdot \left( \exp \left[ \alpha \cdot \frac{\sigma_e - \sigma_i}{\sigma_0} \right] - \frac{1}{\rho^2} \right)^{-1} \end{cases} \quad (22)$$

Cette solution s'obtient aussi par la solution générale, par passage à la limite  $m \rightarrow \infty$  à condition de remplacer le paramètre  $\sigma_0$  par  $m \cdot \sigma_0$ . Ainsi, dans l'expression de  $A$  de la solution générale (Eq. 15), le terme  $(1 + \beta)^{1+m}$  tend vers  $\exp(\alpha \cdot (\sigma_e - \sigma_i)/\sigma_0)$ .

Remarquons que le cas  $m \rightarrow \infty$  correspondrait à  $\sigma = (\sigma_r - \sigma_\theta)/2$ .

## Appendix A.3 : Cas où la contrainte considérée est la contrainte radiale ou le paramètre $m$ est égal à l'unité

Dans ce cas, la contrainte équivalente  $\sigma$  vaut  $\sigma = \sigma_r$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\sigma_0}{\alpha} \cdot \left[ \left( 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) \cdot f(r, A) - 1 \right] \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{\alpha} \cdot \left[ \left( 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) \cdot \left( 1 + \frac{2A}{r^2} \right) \cdot f(r, A) - 1 \right] \\ f(r, A) = \exp \left[ A \cdot \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \right] \\ A = \ln[1 + \beta] \cdot \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (23)$$

Cette solution s'obtient aussi par la solution générale, par passage à la limite  $m \rightarrow -1$ .

Ainsi, dans l'expression de  $A$  de la solution (Eq. 15), le terme  $(1 + \beta)^{1+m}$  est équivalent à  $(1 + m) \cdot \ln(1 + \beta)$ ; dans l'expression de  $\sigma_r$  dans (Eq.15), le terme affecté de l'exposant  $1/(1 + m)$  (infiniment grand) équivaut à  $\exp(A \cdot (1 - 1/r^2))$ .

## Appendix B : Concavité des courbes de convergence

On discute, en fonction du paramètre  $m$  de la solution générale (Eq. 15), de la concavité de la courbe de convergence dans le plan  $((\sigma_i - \sigma_e), |u_i|)$ . Il est équivalent de considérer, à la place de  $|u_i|$  le paramètre  $A > 0$  qui lui est proportionnel.

On distingue le cas où  $\sigma_i$  est variable ( $\sigma_i$  croit à partir de la valeur  $\sigma_e$ ) du cas où  $\sigma_e$  est variable ( $\sigma_e$  décroît à partir de la valeur  $\sigma_i$ ).

## Appendix B.1 : Remarque préliminaire

Dans l'expression de  $A$  (Eq. 15), le dénominateur doit rester positif, d'où

$$(1 + \beta)^{1+m} > \frac{1}{\rho^2} \quad (24)$$

Cette inégalité est triviale si  $(1 + m) > 0$ , mais dans le cas contraire, elle donne une borne supérieure  $\beta_0$  au paramètre  $\beta$ , pour laquelle  $A \rightarrow \infty$  : cette valeur équivaut alors à une charge limite pour la structure.

## Appendix B.2 : La contrainte radiale sur le rayon intérieur est la variable commandée

La contrainte extérieure  $\sigma_e$  étant constante et la contrainte intérieure  $\sigma_i$  variable, la concavité de la courbe de convergence dépend du signe de

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{d^2A}{d\sigma_i^2} = -m \left( (1 + \beta)^{1+m} - \frac{\omega}{\rho^2} \right) \quad (25)$$

où

$$\omega = -\frac{m+2}{m} \quad (26)$$

et  $C$  est une quantité positive

$$C = \frac{\frac{\alpha^2}{\sigma_0^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \cdot (1 + \beta)^{1+m}}{\left((1 + \beta)^{1+m} - \frac{1}{\rho^2}\right)^3 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right)^2} \quad (27)$$

d'où l'on déduit :

1. pour un rayon extérieur infini ( $\rho = \infty$ ), le signe de  $d^2A/d\sigma_i^2$  est l'inverse de celui de  $m$  :
  - si  $m = 0$ , la convergence est linéaire,
  - si  $m > 0$ , la concavité est tournée *vers le haut*, le tube se *rigidifie* au cours de la convergence ;

— si  $m < 0$ , la concavité est tournée *vers le bas*, le tube *s'amollit* au cours de la convergence.

2. pour un rayon extérieur fini ( $\rho$  fini) : on vérifie que les propriétés restent conservées dans leur ensemble, sauf pour  $-1 < m < 0$ , mais elles le sont sous certaines conditions.

Dans ce cas, en effet, on a  $\omega > 1$  ; d'après (Eq. 25), la concavité n'est tournée *vers le bas* comme pour  $\rho = \infty$ , que si  $\rho^2 > \omega$ , c'est-à-dire, si l'épaisseur du tube est suffisante ; s'il n'en est pas ainsi ( $\rho^2 < \omega$ ), la concavité initiale de la courbe de convergence est tournée *vers le haut*, mais peut changer de sens si le chargement est suffisant ; c'est-à-dire si

$$(1 + \beta)^{1+m} > \frac{\omega}{\rho^2} \quad (28)$$

Par ailleurs, pour  $m = 0$ , la concavité se tourne *vers le bas*, mais reste faible, car le rayon de courbure est proportionnel à  $\rho^2$  (Eq. 25).

### Appendix B.3 : La contrainte appliquée sur le rayon extérieur est la variable commandée

$\sigma_i$  étant constante et  $\sigma_e$  variable, la concavité de la courbe de convergence dépend du signe de

$$\frac{1}{C'} \cdot \frac{d^2A}{d\sigma_e^2} = -m \left( \frac{1}{\rho^2} - \omega \cdot (1 + \beta)^{1-m} \right) \quad (29)$$

avec

$$\omega = -\frac{m+2}{m} \quad (30)$$

et  $C'$  une quantité strictement positive qui s'exprime en fonction de  $C$

$$C' = \frac{C}{(1 + \beta)^2} \quad (31)$$

d'où l'on déduit de la même façon que précédemment :

1. Si  $\rho = \infty$  :
  - si  $m = -2$ , la courbe de convergence est linéaire,
  - si  $m > -2$ , sa concavité est tournée *vers le haut* ;
  - si  $m < -2$ , sa concavité est tournée *vers le bas*.
2. Si  $\rho$  est fini : les propriétés précédentes restent vraies, sauf lorsque  $-2 < m < -1$ , pour laquelle la concavité de la courbe ne reste tournée *vers le haut* que si l'épaisseur du tube est suffisante

$$\rho^2 > \frac{1}{\omega} \quad (32)$$

où  $\omega$  est compris entre 0 et 1 et à condition que le chargement ne soit pas important

$$(1 + \beta)^{1+m} w \frac{1}{\rho^2 \cdot \omega} \quad (33)$$

Si le chargement dépasse la valeur limite correspondante, ce qui est possible puisque (Eq. 33) n'est pas en contraction avec (Eq. 24), la concavité change de sens et se tourne *vers le bas*.

Enfin, si (Eq. 32) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si l'épaisseur du tube est insuffisante, la concavité est toujours tournée *vers le bas*.

## Appendix C : Etat des contraintes dans le massif

On se reporte comme précédemment à la solution générale. Rappelons que  $\beta$  (Eq. 15) joue le rôle d'un paramètre de chargement.

## Appendix C.1 : Existence d'un extremum pour la contrainte tangentielle

D'après l'équation (Eq. 15), la dérivée de la contrainte s'écrit

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{d\sigma_\theta}{dr} = \frac{\sigma_0}{\alpha} \left( -1 + (1 - m) \cdot \frac{A}{r^2} \right) \quad (34)$$

où

$$D = \frac{2A/r^3 \cdot \left( 1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \right)}{\left( 1 - (1 + m) \cdot \frac{A}{r^2} \right)^2} \quad (35)$$

$D$  étant une quantité positive au départ du chargement ( $A$  proche de zéro),  $d\sigma_\theta/dr > 0$  : c'est l'allure classique de la contrainte tangentielle  $\sigma_\theta$  dans la solution élastique linéaire ; le maximum d'intensité est alors atteint en paroi.

L'extremum de  $\sigma_\theta$  peut avoir lieu à l'intérieur du massif si la valeur de  $r^2$  annulant (Eq. 34) est supérieure à 1

$$r_1^2 = (1 - m) \cdot A > 1 \quad (36)$$

$r_1$  peut encore s'écrire sous la forme

$$r_1^2 = \lambda(m) \cdot g_m(\beta) \quad (37)$$

où

$$\lambda(m) = \frac{1 - m}{1 + m} \quad (38)$$

et

$$g_m(\beta) = \frac{(1 + \beta)^{1+m} - 1}{(1 + \beta)^{1+m} - \frac{1}{\rho^2}} \quad (39)$$

alors

1. Si  $m \geq 0$ ,  $r_i^2 < 0$  car  $\lambda(m) \leq 1$  et  $g_m(\beta) < 1$ . Il ne peut donc pas y

avoir un extremum pour  $\sigma_\theta$  à l'intérieur du massif.

2. Si  $m < 0$ , on a deux cas de figure

— Si  $m \in ]-1, 0[$ ; alors  $\lambda(m) \in [1, +\infty[$

$g_m(\beta)$ , initialement nulle, croît avec  $\beta$  et tend vers 1 pour  $\beta \rightarrow \infty$ . Il existe donc un chargement fini  $\beta_1$ , pour lequel  $r_1^2 = 1$ , et à partir duquel  $r_1^2$  augmente jusqu'à la valeur limite  $\lambda(m)$ .

— Si  $m \in ]-\infty, -1[$ ; alors  $\lambda(m) \in [-\infty, -1[$

$g_m(\beta)$ , initialement nulle, est une fonction décroissante de  $\beta$  et tend vers  $-\infty$  lorsque  $\beta$  tend vers la charge limite  $\beta_0$  qui est telle que  $(1 + \beta_0)^{1+m} = 1/\rho^2$ ; on peut donc toujours trouver une valeur du chargement  $\beta_1 < \beta_0$ , pour laquelle  $r_1^2$  augmente indéfiniment.

En résumé, quel que soit  $m < 0$ , on peut trouver une charge  $\beta_1$  au-delà de laquelle  $\sigma_\theta$  admet un extremum se déplaçant vers l'intérieur du tube lorsque le chargement se poursuit. Lorsque le rayon extérieur  $\rho$  est fini, il peut arriver, pour certaines valeurs de  $m$ , et pour des chargements suffisants, que  $r_1 > \rho$  : la contrainte  $\sigma_\theta$  devient alors une fonction strictement croissante de  $r$ .

## Appendix C.2 : Sens de variation du module d'Young en fonction de la position radiale

On obtient par les équations (Eqs. 10-13) et (15-17) les expressions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2\sigma_0} \right) = \frac{-m \cdot \frac{A}{r^2} \cdot D}{1 - (1+m) \cdot \frac{A}{r^2}} \\ \alpha \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2\sigma_0} \right) = \frac{\left(-1 + \frac{A}{r^2}\right) \cdot D}{1 - (1+m) \cdot \frac{A}{r^2}} \end{array} \right. \quad (40)$$

où  $D > 0$  d'après (Eq. 35) d'où

$$\frac{d}{dr}E'(\sigma) = \frac{-m \cdot D}{1 - (1 + m) \cdot \frac{A}{r^2}} \quad (41)$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de cette dérivée est l'inverse de celui de  $m$ .

Lorsque  $m$  est positif,  $E$  est donc maximal en paroi et décroît vers l'intérieur du massif. On a le contraire lorsque  $m$  est négatif.

Remarquons, d'après l'équation (Eq. 40), qu'il en est de même pour la valeur absolue de la contrainte moyenne  $(\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ .

### Appendix C.3 : Contrainte tangentielle en paroi

D'après l'équation (Eq. 15) on a

$$\sigma_\theta(1) = \sigma_i + \frac{2 \left(1 + \alpha \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) \cdot ((1 + \beta)^{1+m} - 1)}{\left(1 - \frac{1}{\sigma_2}\right) \cdot \alpha \cdot (1 + m)} \quad (42)$$

On vérifie que cette quantité est fonction décroissante de  $m$ .

Comme la solution en contraintes s'identifie à celle de Kirsch pour  $m = 0$ , l'intensité de  $\sigma_\theta(1)$  est donc supérieure à la valeur classique si  $m$  est positif, et lui est inférieure si  $m$  est négatif.

**Appendix D : Solution dans le cas où la contrainte considérée est la contrainte moyenne et le module d'Young une fonction quelconque de cette contrainte. Cas du matériau compressible**

Nous allons montrer que la solution en contraintes, identique à celle de Korsch dans le cas où  $E(\sigma)$  est une fonction linéaire, l'est aussi dans le cas où  $E(\sigma)$  est quelconque. Pour cela, il suffit de montrer que  $\sigma$  est constante.

Compte tenu de l'équation d'équilibre, on a

$$\sigma = \sigma_r + \frac{1}{2}r \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \quad (43)$$

soit

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{3}{2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{2}r \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} \quad (44)$$

Or d'après (Eq. 9)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = E'(\sigma) \cdot \frac{u_i}{r^3} \quad (45)$$

et

$$r \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} = -3E'(\sigma) \cdot \frac{u_i}{r^3} + \frac{dE'(\sigma)}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dr} \cdot \frac{U_i}{r^2} \quad (46)$$

Les trois dernières équations donnent alors

$$\frac{d\sigma}{dr} \cdot \left( 2 - \frac{u_i}{r^2} \cdot \frac{dE'(\sigma)}{d\sigma} \right) = 0 \quad (47)$$

Or,  $dE'(\sigma)/d\sigma$  est une fonction donnée de  $\sigma$ , essentiellement bornée.

Par ailleurs,  $u_i/r^2$ , fonction des conditions limites, doit être nulle à l'état

initial et, éventuellement, à l'infini, si on considère  $\rho \rightarrow \infty$ .

Le terme entre parenthèses ne pouvant s'annuler on doit donc avoir

$$\frac{d\sigma}{dr} = 0 \quad \text{C.Q.F.D.} \quad (48)$$

Plus généralement encore, on démontre de la même façon que cette propriété reste vraie même si on ne suppose plus le matériau incompressible.  $E'(\sigma)$  et  $\nu'(\sigma)$  étant les coefficients élastiques en déformation plane, fonctions quelconques de  $\sigma$ , on a à la place de (Eq. refeq :eqA15)

$$\frac{d\sigma}{dr} \left[ 2 - \frac{u}{r} \cdot \frac{dE'(\sigma)}{d\sigma} + \frac{d\nu'(\sigma)}{d\sigma} \cdot (\sigma_r - \sigma_\theta) - \sigma_e \cdot \Phi(\sigma) \right] = 0 \quad (49)$$

où  $\Phi(\sigma)$  est une fonction donnée, caractéristique du matériau

$$\Phi(\sigma) = \frac{1 - \nu(\sigma_e)}{E(\sigma_e)} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{E(\sigma)}{1 - \nu(\sigma)} \right) + \frac{d\nu'(\sigma)}{d\sigma} \quad (50)$$

A l'état initial  $u/r = 0$  et  $\sigma_r = \sigma = \sigma_e$ , l'expression entre crochets de (Eq. 49) ne peut s'annuler, sauf pour une valeur très particulière de  $\sigma_e = \sigma_e^*$

$$2 - \sigma_e^* \cdot \Phi(\sigma_e^*) = 0 \quad (51)$$

On doit donc avoir  $d\sigma/dr = 0$ , pour tout chargement  $\sigma_e \neq \sigma_e^*$ .

Cette propriété reste vraie pour  $\sigma_e = \sigma_e^*$  si on admet que  $\sigma$  est une fonction continue du paramètre de chargement.