



**HAL**  
open science

# De l'homologie stable des groupes de congruence

Aurélien Djament

► **To cite this version:**

| Aurélien Djament. De l'homologie stable des groupes de congruence. 2017. hal-01565891v1

**HAL Id: hal-01565891**

**<https://hal.science/hal-01565891v1>**

Preprint submitted on 20 Jul 2017 (v1), last revised 8 Dec 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# De l'homologie stable des groupes de congruence

Aurélien DJAMENT\*

20 juillet 2017

## Résumé

On montre dans ce travail que l'homologie en degré  $d$  d'un groupe de congruence, dans un contexte très général, définit un foncteur faiblement polynomial (au sens de [14]) de degré au plus  $2d$  et l'on décrit ce foncteur modulo les foncteurs polynomiaux de degré strictement inférieur. Notre outil principal est une suite spectrale reliant homologie de groupes de type congruence et homologie des foncteurs. Nous montrons et utilisons de façon cruciale des propriétés de certaines structures tensorielles et de certaines extensions de Kan dérivées sur des foncteurs polynomiaux.

Nos résultats généralisent notamment Suslin [33] et Church-Miller-Nagpal-Reinhold [7].

## Abstract

We show in this work that homology in degree  $d$  of a congruence group, in a very general framework, defines a weakly polynomial functor (in the sense of [14]) of degree at most  $2d$  and we describe this functor modulo polynomial functors of smaller degree. Our main tool is a spectral sequence connecting homology of congruence-like groups and functor homology. We prove and use in a crucial way some properties of some tensor structures and of some derived Kan extensions on polynomial functors.

Our results extend especially Suslin [33] and Church-Miller-Nagpal-Reinhold [7].

*Mots-clefs* : groupes de congruence, homologie des groupes, homologie des foncteurs, foncteurs polynomiaux, extensions de Kan, foncteurs dérivés, suites spectrales, excision en  $K$ -théorie algébrique.

*Classification MSC 2010* : 18A25, 18A40, 18E15, 18E35, 18G40, 20H05 ; 18D10, 18E05, 18E30, 19D99.

---

\*CNRS, Laboratoire de mathématiques Jean Leray, 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 NANTES CEDEX 3, FRANCE, aurelien.djament@univ-nantes.fr, <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~djament/>.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Cadre formel pour l'homologie stable relative</b>	<b>6</b>
1.1	Foncteurs d'automorphismes . . . . .	6
1.2	Un procédé de stabilisation . . . . .	8
1.3	Foncteurs polynomiaux . . . . .	12
1.4	Catégories de modèles pour l'homologie stable . . . . .	16
1.5	Produits tensoriels . . . . .	20
1.6	Suite spectrale fondamentale . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Étude dans le cas des groupes de congruence</b>	<b>28</b>
2.1	Catégories additives à dualité et objets hermitiens . . . . .	28
2.2	Comparaison de $D_{st}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ et $D_{st}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ sur des objets polynomiaux . . . . .	32
2.3	Extensions de Kan dérivées associées à un foncteur additif . . . . .	34
2.4	Étude des produits tensoriels sur les foncteurs polynomiaux . . . . .	37
2.5	Homologie des groupes de congruence . . . . .	41
<b>A</b>	<b>Conjectures pour l'homologie des groupes <math>IA</math></b>	<b>47</b>

## Introduction

Dans son article [33], Suslin, simplifiant et généralisant des résultats obtenus, dans le cas rationalisé, avec Wozicki dans [34], caractérise l'excisivité en  $K$ -théorie algébrique par un critère homologique simple. Si  $I$  est un anneau *sans unité* (ce qui est la même chose qu'un idéal bilatère d'un anneau unitaire), notons  $\mathbb{Z} \ltimes I$  l'anneau obtenu en ajoutant formellement une unité à  $I$  (le groupe abélien sous-jacent est  $\mathbb{Z} \oplus I$ ,  $I$  en est un idéal bilatère et le passage au quotient par  $I$  fournit une rétraction au morphisme d'anneaux unitaires  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \ltimes I$ ). Les groupes linéaires sur  $I$  sont définis par  $GL_n(I) := \text{Ker}(GL_n(\mathbb{Z} \ltimes I) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}))$  : ce sont des groupes de congruence ; ils sont munis d'une action naturelle de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Il n'est pas très difficile de voir que le caractère excisif de  $I$  pour la  $K$ -théorie algébrique jusqu'en degré  $d$  équivaut au fait que l'action de  $GL_n(\mathbb{Z})$  sur  $H_i(GL_n(I); \mathbb{Z})$  est triviale, *stablement en  $n$*  (c'est-à-dire lorsqu'on passe à la colimite sur  $n \in \mathbb{N}$ ), pour tout  $i \leq d$  (on renvoie le lecteur au début de [34] pour plus de précisions sur ces questions). Le résultat principal de [33] (voir aussi le corollaire 2.31 ci-après pour une forme plus générale du résultat de Suslin) peut s'exprimer comme suit :

**Théorème 1** (Suslin). *L'anneau sans unité  $I$  est excisif pour la  $K$ -théorie algébrique en degrés  $< e$  si et seulement si  $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z} \ltimes I}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$  pour  $0 < i < e$ .*

*On dispose par ailleurs d'un morphisme*

$$H_e(GL_n(I); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\text{Tor}_e^{\mathbb{Z} \ltimes I}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))$$

*compatible à la stabilisation en  $n$  et aux actions naturelles de  $GL_n(\mathbb{Z})$ , où  $\mathfrak{gl}_n(V)$  désigne le groupe abélien des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $V$ . Si la condition d'excisivité précédente est vérifiée, l'action de  $GL_n(\mathbb{Z})$  sur le noyau et le conoyau de ce morphisme est triviale stablement en  $n$ .*

Afin d'expliciter notre résultat principal, qui généralise le théorème précédent, introduisons quelques notations. L'action de  $GL_n(\mathbb{Z})$  sur  $H_*(GL_n(I); \mathbb{Z})$  et les morphismes de stabilisation font de  $H_*(GL(I); \mathbb{Z})$  un foncteur sur la catégorie  $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$  des groupes abéliens libres de rang fini avec monomorphismes scindés, le scindement étant donné dans la structure — voir par exemple [14], § 5.2, dont on utilise également de façon cruciale la notion de *foncteur faiblement polynomial* (dont la définition et plusieurs propriétés seront rappelées dans le présent travail). La condition d'action stablement triviale de  $GL_n(\mathbb{Z})$  sur  $H_i(GL_n(I); \mathbb{Z})$  est équivalente au caractère stablement constant, ou encore faiblement polynomial de degré au plus 0, du foncteur  $H_i(GL(I); \mathbb{Z})$ . La deuxième assertion du théorème 1 montre que, si  $e$  est le premier degré non excisif pour la  $K$ -théorie algébrique de  $I$ ,  $H_e(GL(I); \mathbb{Z})$  est faiblement polynomial de degré 2 et décrit ce foncteur modulo les foncteurs faiblement polynomiaux de degré au plus 0.

**Théorème 2.** *Soient  $I$  un anneau sans unité non excisif pour la  $K$ -théorie algébrique et  $e > 0$  le plus petit degré pour lequel cette excisivité tombe en défaut. Pour tout entier  $n \geq 0$ , le foncteur  $H_n(GL(I); \mathbb{Z}) : \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$  est faiblement polynomial de degré au plus  $2m$ , où  $m$  désigne la partie entière de  $n/e$ .*

*Si de plus  $n$  est multiple de  $e$ , alors ce foncteur est exactement de degré faible  $2m$ . De surcroît, il est isomorphe modulo la catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux de degré au plus  $2m - 2$  au foncteur*

$$((\mathfrak{gl}(\mathrm{Tor}_e^{\mathbb{Z} \times I}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))^{\otimes m})_{\mathfrak{S}_m}$$

*où l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_m$  par permutation des facteurs du produit tensoriel est tordue par la signature lorsque  $e$  est impair.*

On obtient même un résultat plus général, qui vaut dans une situation hermitienne, sur une petite catégorie additive à dualité (théorèmes 2.33 et 2.29).

Notre stratégie (esquissée dans le mémoire non publié [10]) consiste à utiliser l'homologie des foncteurs en développant une variante relative du cadre général de [15] (cadre lui-même légèrement retravaillé dans [12], et dont s'inspire la notion de *catégorie homogène* introduite par Randal-Williams et Wahl [30] à des fins d'étude unifiée de problèmes de stabilité homologique). On obtient ainsi (théorème 1.31) des suites spectrales donnant des renseignements sur l'homologie stable (à coefficients constants ou tordus par des foncteurs) sur des groupes « de type congruence », dans un contexte très général, qui inclut également les sous-groupes des groupes d'automorphismes des groupes libres induisant l'identité sur l'abélianisation, à propos de l'homologie stable desquels on discute une conjecture (déjà formulée dans [10]) en appendice.

La démonstration du théorème 2 nécessite ensuite l'étude de plusieurs structures monoïdales sur les catégories de foncteurs en jeu (notamment sur  $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ ), ainsi que de leurs dérivés, sur des foncteurs polynomiaux, et des résultats de comparaison de groupes d'extensions ou de torsion (mettant également en jeu des foncteurs polynomiaux) qui généralisent ceux qui jouent un rôle crucial dans [12] (dont des cas particuliers avaient déjà été obtenus dans [15]), à l'aide de variantes appropriées du critère d'annulation (co)homologique de Scorichenko [31].

Outre les travaux de Suslin et de Suslin-Wodzicki susmentionnés, plusieurs cas particuliers du théorème 2 étaient connus avant la réalisation du présent article. Dans la lignée du travail de Charney [4] sur le problème de la stabilité homologique pour les groupes de congruence, Putman [28] a démontré que

l'homologie en chaque degré fixé, à coefficients dans un corps, des groupes de congruence associés aux idéaux de l'anneau des entiers a des dimensions polynomiales à partir d'un certain rang. Son travail a été amélioré à l'aide de l'utilisation des *FI*-modules (foncteurs sur les ensembles finis avec injections) par Church-Ellenberg-Farb-Nagpal [6] et Church-Ellenberg [5], qui donnent des résultats analogues pour de plus grandes classes d'anneaux sans unité, à coefficients entiers, avec parfois des bornes explicites sur le degré polynomial. Tout récemment, Church, Miller, Nagpal et Reinhold [7] ont effectué un progrès considérable, montrant que l'homologie en degré  $n$  des groupes de congruence associés à un anneau sans unité de rang stable de Bass fini  $d+2$  définit un foncteur polynomial de degré faible au plus  $2n+d$ . Signalons également que, par des méthodes complètement différentes, Calegari [3, lemme 4.5] a montré un résultat essentiellement équivalent à notre théorème 2 pour les groupes de congruence associés à un idéal de l'anneau des entiers (ou plus généralement de l'anneau des entiers d'un corps de nombre).

Mesurer à quel point l'homologie des groupes de congruence associés à un anneau sans unité  $I$  s'éloigne (stablement) d'un foncteur constant constitue une forme, homologique, de contrôle du défaut d'excisivité pour la  $K$ -théorie algébrique pour  $I$ . Une autre manière, homotopique, d'estimer ce défaut d'excisivité est donnée par la *K-théorie algébrique bivariante*. Une description de celle-ci est donnée par Cortiñas [8] à coefficients rationnels et par Geisser-Hesselholt [20] à coefficients de torsion. Toutefois, non seulement nos méthodes sont indépendantes de celles utilisées par ces auteurs, mais aussi il semble fort délicat de tisser un lien entre nos *énoncés* homologiques et les leurs (au-delà du plus petit degré non excisif, pour lequel les deux se réduisent au résultat de Suslin susmentionné).

**Remerciements** L'auteur est reconnaissant envers Christine Vespa, Antoine Touzé, Jacques Darné, Christian Ausoni, Vincent Franjou et Serge Bouc de discussions utiles reliées à différentes questions abordées dans ce travail.

### Conventions et notations générales

Sauf mention expresse du contraire, toutes les catégories considérées seront localement petites (i.e. telles que la classe des morphismes entre deux objets donnés forme toujours un ensemble). Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on désigne par  $\text{Ob } \mathcal{C}$  sa classe d'objets,  $\mathcal{C}(a, b)$  l'ensemble des morphismes d'un objet  $a$  vers un objet  $b$  de  $\mathcal{C}$ , et par  $\mathcal{C}^{op}$  la catégorie opposée à  $\mathcal{C}$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie (essentiellement) petite et  $\mathcal{A}$  une catégorie, on note  $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{A}$ . Si  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un foncteur entre petites catégories, on note  $\Phi^* : (\mathcal{D}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{A})$  le foncteur de précomposition par  $\Phi$ . On note  $\Phi_* : (\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{A})$  l'extension de Kan à gauche le long de  $\Phi$ , lorsqu'elle existe (ce qui est automatique si  $\mathcal{A}$  est cocomplète), c'est-à-dire l'adjoint à gauche à  $\Phi^*$ .

On note **Ens**, **Grp** et **Ab** les catégories des ensembles, des groupes et des groupes abéliens respectivement.

Si  $M$  est un objet d'une catégorie abélienne cocomplète et  $E$  un ensemble, on note  $M[E]$  la somme directe de copies de  $M$  indexées par  $E$ .

Si  $F$  est un foncteur d'une catégorie  $\mathcal{C}$  vers **Ens**, on note  $\mathcal{C}_F$  la catégorie d'éléments associée (ses objets sont les couples  $(c, \xi)$  formés d'un objet  $c$  de  $\mathcal{C}$

et d'un élément  $\xi$  de  $F(c)$  et  $\pi_F : \mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur d'oubli ; la construction duale à partir d'un foncteur  $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est notée  $\mathcal{C}^G$  (c'est la catégorie opposée à  $(\mathcal{C}^{op})_G$ ) et  $\pi^G : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$  désigne le foncteur d'oubli. Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie avec coproduits,  $\mathcal{C}$  une petite catégorie et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur, on dispose d'un foncteur  $\Omega_F : (\mathcal{C}_F, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{A})$  donné sur les objets par

$$\Omega_F(X)(c) = \bigsqcup_{\xi \in F(c)} X(c, \xi) \quad (1)$$

pour  $X$  dans  $(\mathcal{C}_F, \mathcal{A})$  et  $c$  dans  $\mathcal{C}$ . Le foncteur  $\Omega_F$  est adjoint à gauche au foncteur  $\pi_F^* : (\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C}_F, \mathcal{A})$  — autrement dit,  $\Omega_F \simeq (\pi_F)_*$ .

La lettre  $\mathbb{k}$  désigne un anneau commutatif, qu'on supposera par commodité de dimension homologique au plus 1 (hypothèse non essentielle, qui n'interviendra que rarement et simplifiera les formules de Künneth ; c'est surtout le cas où  $\mathbb{k}$  est un corps ou un localisé de l'anneau des entiers qui est intéressant) ; la mention à cet anneau sera parfois omise des produits tensoriels, par exemple. On désigne par  $\mathbb{k}\text{-Mod}$  la catégorie des  $\mathbb{k}$ -modules à gauche et on note  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  pour  $(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$  lorsque  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie. On note  $P_x^{\mathcal{C}}$ , pour  $x \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , l'objet  $\mathbb{k}[\mathcal{C}(x, -)]$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  ; il représente l'évaluation en  $x$  et est donc projectif de type fini.

Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{M}$  sont des catégories  $\mathbb{k}$ -linéaires (c'est-à-dire enrichies sur  $\mathbb{k}\text{-Mod}$ ), avec  $\mathcal{C}$  petite, on note  $(\mathcal{C}, \mathcal{M})_{\mathbb{k}}$  la catégorie des foncteurs  $\mathbb{k}$ -linéaires de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{M}$ . On note  $\mathcal{C}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  pour  $(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})_{\mathbb{k}}$  ; la catégorie  $\mathcal{C}\text{-Mod}_{\mathbb{Z}}$  sera notée simplement  $\mathcal{C}\text{-Mod}$ , et  $\text{Mod-}\mathcal{C}$  désignera  $\mathcal{C}^{op}\text{-Mod}$ . On dispose ainsi d'une équivalence canonique  $(\mathbb{k}[\mathcal{D}], \mathcal{M})_{\mathbb{k}} \simeq$  (et en particulier  $\mathbb{k}[\mathcal{D}]\text{-Mod}_{\mathbb{k}} \simeq (\mathcal{D}, \mathbb{k})$ ) pour toute catégorie petite  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbb{k}[\mathcal{D}]$  désignant la catégorie  $\mathbb{k}$ -linéarisée associée.

Si  $\mathcal{M}$  est une catégorie abélienne  $\mathbb{k}$ -linéaire cocomplète, on dispose d'un produit tensoriel  $\otimes_{\mathbb{k}} : \mathbb{k}\text{-Mod} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  caractérisé par l'adjonction

$$\mathcal{M}(V \otimes_{\mathbb{k}} A, B) \simeq (\mathbb{k}\text{-Mod})(V, \mathcal{M}(A, B))$$

(par commodité, on notera parfois  $A \otimes_{\mathbb{k}} V$  plutôt que  $V \otimes_{\mathbb{k}} A$ ).

La plupart des catégories abéliennes qu'on considérera dans cet article seront des catégories de *Grothendieck* (i.e. cocomplètes, avec colimites filtrantes exactes et possédant un générateur) ; on pourra trouver des généralités à leur sujet dans [19], par exemple.

Si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire et  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck  $\mathbb{k}$ -linéaire, le foncteur *produit tensoriel au-dessus de  $\mathcal{C}$*   $-\otimes_{\mathcal{C}}- : (\mathcal{C}^{op}, \mathcal{M})_{\mathbb{k}} \times (\mathcal{C}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathcal{M}$  (on intervertira parfois les deux arguments, ce qui ne pose pas de problème en raison de la symétrie de cette structure monoïdale lorsque  $\mathcal{M} = \mathbb{k}\text{-Mod}$ ) est défini comme la composée du produit tensoriel (au-dessus de  $\mathbb{k}$ , au sens défini précédemment) extérieur  $(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{M})_{\mathbb{k}} \times (\mathcal{C}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}) \rightarrow (\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}, \mathcal{M})_{\mathbb{k}}$  et du foncteur cofin ( $\mathbb{k}$ -linéaire). Ce bifoncteur se dérive à gauche par rapport à l'un ou l'autre des arguments de la façon usuelle, donnant lieu à des foncteurs notés  $\text{Tor}_{\bullet}^{\mathcal{C}}$ .

*Remarque 3.* Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie préadditive (i.e.  $\mathbb{Z}$ -linéaire), alors la catégorie de foncteurs préadditifs  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  est une sous-catégorie pleine de  $(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$  ; si  $F$  et  $G$  sont des objets de  $\text{Mod-}\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  respectivement, on dispose d'un morphisme

canonique  $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[C]}(F, G) \rightarrow \mathrm{Tor}_{\bullet}^C(F, G)$  qui est un isomorphisme en degré 0, mais généralement pas en degré supérieur.

Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne, on note  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  sa catégorie dérivée (sans aucune condition de borne sur les complexes<sup>1</sup>); une telle catégorie n'a pas a priori de raison d'être localement petite (même en supposant que  $\mathcal{A}$  l'est, bien sûr), mais c'est le cas si  $\mathcal{A}$  est une catégorie Grothendieck — cf. [1, 32] (le travail antérieur [2] suffit pour les catégories de foncteurs du type  $\mathcal{C}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire). Si  $\mathcal{B}$  est une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ , on note  $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$  la sous-catégorie pleine (qui est triangulée) de  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  formée des complexes dont l'homologie appartient à  $\mathcal{B}$ . Cette sous-catégorie contient l'image essentielle du foncteur  $\mathbf{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$  induit par l'inclusion  $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ ; en fait, on vérifie facilement :

**Proposition 4.** *Soit  $\mathcal{B}$  une sous-catégorie localisante d'une catégorie de Grothendieck  $\mathcal{A}$ . Notons  $i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  le foncteur d'inclusion. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{B}$ , le morphisme naturel  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^*(X, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^*(iX, iY)$  est un isomorphisme ;*
2. *le foncteur  $\mathbf{D}(i) : \mathbf{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle ;*
3. *l'image essentielle de  $\mathbf{D}(i)$  est égale à  $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ .*

La catégorie  $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$  n'est autre que le noyau du foncteur canonique  $\mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ ; de plus, le foncteur triangulé induit  $\mathbf{D}(\mathcal{A})/\mathbf{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$  est une équivalence (on renvoie à Neeman [25, chapitre 2] pour ce qui concerne la localisation des catégories triangulées). Par conséquent, si les conditions de la proposition précédente sont vérifiées, on dispose d'une équivalence canonique  $\mathbf{D}(\mathcal{A})/\mathbf{D}(\mathcal{B}) \simeq \mathbf{D}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ .

## 1 Cadre formel pour l'homologie stable relative

### 1.1 Foncteurs d'automorphismes

**Définition 1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On appelle *structure de foncteur d'automorphismes* sur  $\mathcal{C}$  la donnée d'un foncteur  $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  tel que, pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$  soit le groupe des automorphismes de  $x$  dans  $\mathcal{C}$ , et que l'axiome d'équivariance suivant soit vérifié : pour tout morphisme  $f \in \mathcal{C}(x, y)$  de  $\mathcal{C}$  et tout élément  $u$  de  $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ u \downarrow & & \downarrow f_*(u) \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array}$$

de  $\mathcal{C}$  commute, où l'on note  $f_*$  pour  $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(f) : \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(y)$ .

Si  $\mathcal{C}$  est munie d'une structure monoïdale, on dira qu'une structure de foncteur d'automorphismes sur  $\mathcal{C}$  est *monoïdale* si les morphismes structuraux  $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \times \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(y) \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x + y)$  sont fonctoriels en les objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ .

---

1. On pourrait se limiter pour nos considérations à des complexes bornés d'un côté (d'ailleurs, l'usage des catégories dérivées dans le présent travail n'est pas essentiel), mais il est plus commode et satisfaisant de traiter de complexes arbitraires.

Soit  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur entre catégories munies de structures de foncteurs d'automorphismes. On dit que  $\Phi$  est compatible aux foncteurs d'automorphismes si les morphismes de groupes  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(c) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(c))$  induits par  $\Phi$  définissent une transformation naturelle  $\text{Aut}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}} \circ \Phi$  de foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ .

- Remarque 1.2.*
1. L'axiome d'équivariance implique que l'image par le foncteur  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$  d'un isomorphisme est la conjugaison par celui-ci.
  2. Supposons que  $(\mathcal{C}, +, 0)$  est une catégorie monoïdale dont l'unité  $0$  est objet initial et qui est munie d'une structure de foncteur d'automorphismes monoïdale. Alors pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ , l'image du morphisme canonique  $x \simeq x + 0 \rightarrow x + y$  par le foncteur  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$  coïncide avec le morphisme  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(x + y)$  induit par l'endofoncteur  $- + y$  de  $\mathcal{C}$ .
  3. Voyant  $\mathbf{Grp}$  comme sous-catégorie pleine de la catégorie des petites catégories de la façon usuelle, on voit que l'axiome d'équivariance permet de construire un foncteur  $\int \text{Aut}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$  (où l'intégrale désigne la construction de Grothendieck) qui est l'identité sur les objets et associe à une flèche  $x \rightarrow y$  de la source, c'est-à-dire un couple formé d'un morphisme  $u : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{C}$  et d'un automorphisme  $g$  de  $y$  (dans  $\mathcal{C}$ ), la composée  $g.u \in \mathcal{C}(x, y)$ .

La vérification des propriétés suivantes est immédiate.

**Proposition et définition 1.3.** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie munie d'une structure de foncteur d'automorphismes et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  un sous-foncteur de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$ .*

1. *Pour tout objet  $t$  de  $\mathcal{C}$ ,  $G(t)$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(t)$ .*
2. *On définit une catégorie  $\mathcal{C}/G$  de la manière suivante : ses objets sont les mêmes que ceux de  $\mathcal{C}$ , et ses ensembles de morphismes sont donnés par  $(\mathcal{C}/G)(a, b) := \mathcal{C}(a, b)/G(b)$ . Il existe une et une seule structure de catégorie sur  $\mathcal{C}/G$  vérifiant cette propriété et telle qu'on définisse un foncteur — qui est alors essentiellement surjectif et plein —  $\Pi_G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$  qui soit l'identité sur les objets et la surjection canonique sur les ensembles de morphismes.*
3. *Il existe une et une seule structure de foncteurs d'automorphismes sur  $\mathcal{C}/G$  telle que  $\Pi_G$  soit compatible aux structures de foncteurs d'automorphismes.*
4. *Supposons que  $\mathcal{C}$  est munie d'une structure monoïdale et que sa structure de foncteurs d'automorphismes lui est compatible. Supposons également que le sous-foncteur  $G$  de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$  est monoïdal (c'est-à-dire que l'image de  $G(x) \times G(y)$  par  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(y) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(x + y)$  est incluse dans  $G(x + y)$  pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ ). Alors il existe une et une seule structure monoïdale sur  $\mathcal{C}/G$  telle que le foncteur  $\Pi_G$  soit strictement monoïdale. La structure de foncteurs d'automorphismes sur  $\mathcal{C}/G$  est de plus monoïdale.*
5. *Tout produit de catégories munies d'une structure de foncteur d'automorphismes hérite d'une structure de foncteurs d'automorphismes (unique) telle que les foncteurs de projection  $\gamma$  soient compatibles ; on l'appelle structure de foncteurs d'automorphisme produit.*

La vérification de la propriété suivante est également directe, à partir du fait que les automorphismes intérieurs agissent trivialement sur l'homologie d'un groupe.

**Proposition 1.4.** *Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie munie d'une structure de foncteur d'automorphismes,  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  un sous-foncteur de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$  et  $F$  un objet de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ . Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , il existe un (et un seul) foncteur  $H_d(G; F)$  de  $(\mathcal{C}/G, \mathbb{k})$  dont les valeurs sont données par*

$$H_d(G; F)(x) = H_d(G(x); F(x))$$

(homologie de groupe) pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  et dont l'effet sur les morphismes est induit par celui de  $F$ . On définit ainsi un foncteur homologique  $H_*(G; -) : (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}/G, \mathbb{k})$ .

La projection canonique sur les coïnvariants procure une transformation naturelle  $\text{Id} \rightarrow \Pi_G^* H_0(G; -)$  d'endofoncteurs de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ .

De plus, le foncteur  $H_0(G; -)$  est canoniquement isomorphe à l'extension de Kan  $(\Pi_G)_* : (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}/G, \mathbb{k})$ . Cet isomorphisme s'étend en un unique morphisme de foncteurs homologiques  $H_\bullet(G; -) \rightarrow \mathbf{L}_\bullet(\Pi_G)_*$ .

Il est important de noter que la construction précédente ne se relève pas au niveau des catégories dérivées : sauf cas très particulier,  $H_*(G; -)$  ne s'obtient pas en prenant l'homologie à partir d'un foncteur  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{C}/G, \mathbb{k})$  (cette dernière catégorie n'étant généralement pas équivalente à la sous-catégorie de  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  des complexes dont l'homologie appartient à l'image essentielle de  $\Pi_G^* : (\mathcal{C}/G, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ).

## 1.2 Un procédé de stabilisation

On introduit maintenant une généralisation du procédé de stabilisation introduit dans [14, § 1.2].

**Définition 1.5.** Soient  $(\mathcal{T}, +, 0)$  une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité  $0$  est objet initial et  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne cocomplète. On note  $\text{End}(\mathcal{A})$  la *grosse* (i.e. pas nécessairement localement petite) catégorie constituée des endofoncteurs exacts de  $\mathcal{A}$  commutant aux colimites ; on munit cette catégorie de la structure monoïdale (non symétrique) donnée par la composition des foncteurs.

On suppose donné un foncteur  $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \text{End}(\mathcal{A})$  monoïdal *au sens fort* — i.e. tel que les morphismes structuraux  $\text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow \tau_0$  et  $\tau_x \circ \tau_y \rightarrow \tau_{x+y}$  soient des *isomorphismes*, où l'on note  $\tau_x$  pour  $\tau(x)$ .

Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{T}$ , on note  $\kappa_x$  (respectivement  $\delta_x$ ) le noyau (resp. conoyau) du morphisme naturel  $i_x : \text{Id}_{\mathcal{A}} \simeq \tau_0 \rightarrow \tau_x$  (induit par l'unique flèche  $0 \rightarrow x$ ). On note  $\kappa$  le sous-foncteur de  $\text{Id}_{\mathcal{A}}$  somme des sous-foncteurs  $\kappa_x$  pour  $x \in \text{Ob } \mathcal{T}$ .

Un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  est dit *stablement nul* (relativement au foncteur  $\tau$ ) si l'inclusion  $\kappa(A) \subset A$  est une égalité. On note  $\mathcal{S}n_\tau(\mathcal{A})$ , ou simplement  $\mathcal{S}n(\mathcal{A})$ , la sous-catégorie pleine des objets stablement nuls de  $\mathcal{A}$ .

Se donner un foncteur  $\mathcal{T} \rightarrow \text{End}(\mathcal{A})$  revient à se donner un foncteur  $\mathcal{T} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  ; l'hypothèse monoïdale sur le premier revient à des hypothèses usuelles d'action sur le deuxième qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire.

La première partie du résultat suivant s'établit comme [14, corollaire 1.15], la deuxième est un exercice laissé au lecteur.

**Proposition et définition 1.6.** *Sous les hypothèses de la définition précédente, supposons également que les colimites filtrantes sont exactes dans  $\mathcal{A}$ . Alors  $\mathcal{S}n_\tau(\mathcal{A})$  est une sous-catégorie épaisse et stable par colimites de  $\mathcal{A}$ . On notera  $\mathbf{St}_\tau(\mathcal{A})$  (ou simplement  $\mathbf{St}(\mathcal{A})$ ) la catégorie quotient  $\mathcal{A}/\mathcal{S}n_\tau(\mathcal{A})$ . Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie de Grothendieck, c'est donc également le cas de  $\mathcal{S}n_\tau(\mathcal{A})$ .*

*De plus, la classe des morphismes de  $\mathcal{A}$  dont l'image dans  $\mathbf{St}(\mathcal{A})$  est inversible s'obtient en saturant par colimites filtrantes la classe des  $f : A \rightarrow B$  tels qu'existe un objet  $x$  de  $\mathcal{T}$  et un morphisme  $h : B \rightarrow \tau_x(A)$  de rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i_x(A) \downarrow & \swarrow h & \downarrow i_x(B) \\ \tau_x(A) & \xrightarrow{\tau_x(f)} & \tau_x(B) \end{array}$$

de  $\mathcal{A}$ .

*Remarque 1.7.* La dernière partie de cet énoncé fournit des généralisations « naturelles » de la définition 1.5 au cas de l'action d'une petite catégorie monoïdale symétrique (noter que cette dernière condition pourrait elle-même être affaiblie)  $\mathcal{T}$  dont l'unité est objet initial sur une catégorie  $\mathcal{A}$  non nécessairement abélienne. Pour que cette définition se comporte bien, on peut supposer par exemple que  $\mathcal{A}$  est complète et cocomplète et que  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{A}$  par endofoncteurs commutant aux limites et aux colimites. On peut également supposer que  $\mathcal{A}$  est triangulée et possède des sommes directes arbitraires et que  $\mathcal{T}$  agit par endofoncteurs triangulés commutant aux sommes directes.

Le cas qui nous intéressera est le suivant. Supposons que  $(\mathcal{T}, +, 0)$  est une petite catégorie monoïdale symétrique avec 0 initial et  $\mathcal{C}$  une petite catégorie sur laquelle  $\mathcal{T}$  agit. Pour toute catégorie de Grothendieck  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{T}$  agit (par précomposition par l'action sur  $\mathcal{C}$ ) sur la catégorie de foncteurs  $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{M})$ . Le cas où  $\mathcal{C} = \mathcal{T}$  (munie de l'action tautologique) est celui de [14]. Dans ce contexte, on notera  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  la catégorie dérivée  $\mathbf{D}(\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M}))$ .

*Remarque 1.8.* Supposons d'une manière générale donnée une action d'une catégorie monoïdale  $\mathcal{T}$  sur une catégorie de Grothendieck comme dans la définition 1.5. On dispose de deux candidats « naturels » de *catégorie dérivée stabilisée* de  $\mathcal{A}$  relativement à cette action :

1. la catégorie dérivée  $\mathbf{D}(\mathbf{St}(\mathcal{A}))$ ;
2. la catégorie triangulée  $\mathbf{St}(\mathbf{D}(\mathcal{A}))$  construite à partir de l'action de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  induite par celle sur  $\mathcal{A}$  (cf. la remarque 1.7).

On vérifie sans trop de peine que ces deux définitions sont canoniquement équivalentes, en utilisant la remarque qui suit la proposition 4. En revanche, les conditions de ladite proposition ne sont pas toujours vérifiées pour la sous-catégorie localisante  $\mathcal{S}n(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  : en utilisant [13] (notamment son appendice), on peut voir qu'elles sont vérifiées pour  $\mathcal{A} = (\Theta, \mathbb{k})$  (où  $\Theta$  désigne la catégorie des ensembles finis avec injections) ou  $\mathcal{A} = (\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{k})$ , mais pas pour  $\mathcal{A} = (\mathbf{S}(A), \mathbb{k})$

(où  $\mathbf{S}(A)$  désigne la catégorie des  $A$ -modules à gauche  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , les morphismes étant les monomorphismes  $A$ -linéaires munis d'un scindement) si l'anneau  $A$  est assez compliqué. Les détails seront publiés dans un travail ultérieur.

**Proposition et définition 1.9.** *Soient  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) une petite catégorie munie d'une action d'une petite catégorie monoïdale symétrique  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{T}'$ ) dont l'unité est objet initial,  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur,  $\Psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  un foncteur monoïdal fort et  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck. On suppose que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont compatibles aux actions au sens où le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \Psi \times \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathcal{T}' \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les actions commute (à isomorphisme près).

1. Supposons que, pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{T}'$ , la catégorie  $\mathcal{T}_{\Psi^* \mathcal{T}'(a, -)}$  est non vide (c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de source  $a$  et de but appartenant à l'image de  $\Psi$ ) — c'est par exemple le cas si  $\Psi$  est essentiellement surjectif. Alors le foncteur de précomposition  $\Phi^* : (\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{M})$  préserve les foncteurs stablement nuls, il induit donc un foncteur encore noté  $\Phi^* : \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ . Ce foncteur est exact et commute aux colimites.

Ces foncteurs exacts  $(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{M})$  et  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  induisent des foncteurs triangulés  $\mathbf{D}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  et  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  qu'on notera toujours  $\Phi^*$ .

2. L'extension de Kan  $\Phi_* : (\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{M})$  induit un foncteur encore noté  $\Phi_* : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ . Celui-ci est adjoint à gauche à  $\Phi^*$  sous l'hypothèse du point précédent.
3. Le foncteur dérivé total à gauche  $\mathbf{L}\Phi_* : \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ , qui est adjoint à gauche à  $\Phi^* : \mathbf{D}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ , induit un foncteur triangulé encore noté  $\mathbf{L}\Phi_* : \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ , qui n'est autre que le foncteur dérivé total à gauche de  $\Phi_* : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ . Si l'hypothèse du premier point est satisfaite, ce foncteur est adjoint à gauche à  $\Phi^* : \mathbf{D}_{st}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ . De plus, pour  $\mathcal{M} = \mathbb{k}\text{-Mod}$ , le foncteur  $\mathbf{L}\Phi_* : \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  est donné explicitement par

$$\mathbf{L}\Phi_*(X) = \Phi^* \text{Yon}_{st}^{\mathcal{D}} \underset{\mathbb{k}[\mathcal{C}]}{\otimes}^{\mathbf{L}} X$$

où  $\text{Yon}_{st}^{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{op} \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  désigne le foncteur composé du plongement de Yoneda  $\mathbb{k}$ -linéarisé  $\mathcal{D}^{op} \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbb{k})$  et du foncteur canonique  $(\mathcal{D}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$ .

*Démonstration.* On note d'abord que l'hypothèse de compatibilité de  $\Phi$  et  $\Psi$  aux actions peut se reformuler en  $\tau_t \Phi^* \simeq \Phi^* \tau_{\Psi(t)}$  pour tout  $t \in \text{Ob } \mathcal{T}$ .

Comme  $\Phi^* : (\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{M})$  commute aux colimites, pour établir que ce foncteur préserve les objets stablement nuls sous l'hypothèse du premier point, il suffit de voir qu'il envoie un foncteur  $G$  de  $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$  tel que  $i_a(G) : G \rightarrow \tau_a(G)$

soit nul pour un  $a \in \text{Ob } \mathcal{T}'$ . Soit  $t$  un objet de  $\mathcal{T}$  tel qu'existe une flèche  $a \rightarrow \Psi(t)$  dans  $\mathcal{T}'$ . La composée

$$\Phi^* G \xrightarrow{\Phi^*(i_a(G))} \Phi^* \tau_a(G) \rightarrow \Phi^* a \tau_{\Psi(t)}(G) \simeq \tau_t \Phi^*(G)$$

(où la flèche du milieu est induite par  $a \rightarrow \Psi(t)$ ) est nulle car  $i_a(G) = 0$  et égale à  $i_t(\Phi^* G)$ , ce qui montre bien que  $\Phi^*$  préserve les foncteurs stablement nuls. Le reste de la première assertion s'en déduit aussitôt.

Montrons que  $\Phi_* : (\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{M})$  passe au quotient pour induire un foncteur  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ . La proposition 1.6 et la commutation de  $\Phi_*$  aux colimites montrent qu'il suffit de vérifier que, si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de  $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  tel qu'existe un objet  $t$  de  $\mathcal{T}$  et un morphisme  $h$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i_t(A) \downarrow & \swarrow h & \downarrow i_t(B) \\ \tau_t(A) & \xrightarrow{\tau_t(f)} & \tau_t(B) \end{array}$$

commutatif, alors  $\Phi_*(f)$  devient inversible dans  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ . Comme on dispose d'une transformation naturelle  $\Phi_* \tau_t \rightarrow \tau_{\Psi(t)} \Phi_*$ , adjointe à la composée du morphisme  $\tau_t \rightarrow \tau_t \Phi^* \Phi_*$  obtenu en composant l'unité avec  $\tau_t$  et de l'isomorphisme  $\tau_t \Phi^* \Phi_* \simeq \Phi^* \tau_{\Psi(t)} \Phi_*$ , on déduit du diagramme précédent en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Phi_*(A) & \xrightarrow{\Phi_*(f)} & \Phi_*(B) \\ \Phi_* i_t(A) \downarrow & \swarrow \Phi_*(h) & \downarrow \Phi_* i_t(B) \\ \Phi_* \tau_t(A) & \xrightarrow{\Phi_* \tau_t(f)} & \Phi_* \tau_t(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\Psi(t)} \Phi_*(A) & \xrightarrow{\tau_{\Psi(t)} \Phi_*(f)} & \tau_{\Psi(t)} \Phi_*(B). \end{array}$$

On obtient la conclusion souhaitée sur  $\Phi_*(f)$  en observant que la composée de  $\Phi_*(i_t) : \Phi_* \rightarrow \Phi_* \tau_t$  et de notre transformation naturelle  $\Phi_* \tau_t \rightarrow \tau_{\Psi(t)} \Phi_*$  coïncide avec  $\tau_{\Psi(t)} \Phi_*$ . Toute la fin de la démonstration s'établit de manière formelle.  $\square$

- Remarque 1.10.*
1. Dans la démonstration de la deuxième assertion, il ne suffit *a priori* pas de montrer que  $\Phi_*$  préserve les foncteurs stablement nuls, puisque  $\Phi_*$  n'est généralement pas exact.
  2. La deuxième assertion montre que, sous les hypothèses du premier point, le foncteur  $\Phi^* : \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  commute aux limites, ce qui n'est pas clair à première vue.

Nous utiliserons un peu plus loin le critère simple suivant garantissant que la précomposition par un foncteur induit une équivalence entre catégories  $\mathbf{St}$  (dans le cadre de [14]; on pourrait généraliser mais nous n'en aurons pas usage).

**Définition 1.11.** Soit  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur fortement monoïdal entre petites catégories monoïdales symétriques dont l'unité est objet initial. On dit que  $\Phi$  est :

1. **faiblement surjectif** si, pour tout objet  $d$  de  $\mathcal{D}$ , il existe des objets  $c$  de  $\mathcal{C}$  et  $t$  de  $\mathcal{D}$  tels que  $t + d \simeq \Phi(c)$  ;
2. **stablement plein** si, pour toute flèche  $\alpha$  dans  $\mathcal{D}(\Phi a, \Phi b)$ , il existe un objet  $t$  de  $\mathcal{C}$  tel que l'image canonique de  $\alpha$  dans  $\mathcal{D}(\Phi a, \Phi t + \Phi b)$  appartienne à l'image de la fonction  $\mathcal{C}(a, t + b) \rightarrow \mathcal{D}(\Phi a, \Phi(t + b)) \simeq \mathcal{D}(\Phi a, \Phi t + \Phi b)$  induite par  $\Phi$  ;
3. **stablement fidèle** si deux flèches de  $\mathcal{C}(t, x)$  ayant la même image dans  $\mathcal{D}(\Phi t, \Phi x)$  ont la même image dans  $\mathcal{C}(t, x + u)$  (via la post-composition par le morphisme canonique  $x \rightarrow x + u$ ) pour un objet  $u$  de  $\mathcal{C}$  convenable.

**Proposition 1.12.** *Soient  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur fortement monoïdal entre petites catégories monoïdales symétriques dont l'unité est objet initial et  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck. On suppose que  $\Phi$  est faiblement surjectif, stablement plein et stablement fidèle.*

*Alors la précomposition par  $\Phi$  induit une équivalence de catégories  $\Phi^* : \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ .*

*Démonstration.* La proposition 1.9 montre que  $\Phi^* : (\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{M})$  et son adjoint à gauche  $\Phi_*$  induisaient une adjonction entre  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  et  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ . Le foncteur  $\Phi_*$  est caractérisé par sa commutation aux colimites et un isomorphisme  $\Phi_* M[\mathcal{C}(c, -)] \simeq M[\mathcal{D}(\Phi(c), -)]$  naturel en les objets  $M$  de  $\mathcal{M}$  et  $c$  de  $\mathcal{C}$ . L'unité de l'adjonction, sur  $M[\mathcal{C}(c, -)]$ , n'est autre que le morphisme  $M[\mathcal{C}(c, -)] \rightarrow \Phi^* M[\mathcal{D}(\Phi(c), -)]$  qu'induit  $\Phi$ . L'hypothèse que  $\Phi$  est stablement plein (resp. stablement fidèle) implique que ce morphisme induit un épimorphisme (resp. monomorphisme) dans la catégorie  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ . Comme  $\Phi^*$  et  $\Phi_*$  commutent aux colimites et que les  $M[\mathcal{C}(c, -)]$  engendrent la catégorie  $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ , on en déduit que l'unité  $\text{Id} \rightarrow \Phi^* \Phi_*$  est un isomorphisme sur la catégorie  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ , c'est-à-dire que  $\Phi_* : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$  est pleinement fidèle.

Si  $t$  et  $d$  sont deux objets de  $\mathcal{D}$  et  $M$  un objet de  $\mathcal{M}$ , le morphisme canonique  $d \rightarrow t + d$  induit un morphisme  $M[\mathcal{D}(t + d, -)] \rightarrow M[\mathcal{D}(d, -)]$  qui devient un épimorphisme dans  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ , car  $i_t$  est nul sur son conoyau. Par conséquent, l'hypothèse de faible surjectivité de  $\Phi$  montre que les images des  $M[\mathcal{D}(\Phi(c), -)]$  dans  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$  engendrent cette catégorie. Comme ils appartiennent à l'image essentielle de  $\Phi_*$ , qui commute aux colimites, ce foncteur est essentiellement surjectif.

Ainsi  $\Phi_* : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$  et donc son adjoint  $\Phi^* : \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  sont des équivalences de catégories.  $\square$

### 1.3 Foncteurs polynomiaux

**Définition 1.13.** Plaçons-nous dans le cadre de la définition 1.5. On dit qu'un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  est *fortement polynomial* de degré (fort) au plus  $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  si pour toute famille  $(t_0, \dots, t_d)$  de  $d + 1$  objets de  $\mathcal{T}$ , on a  $\delta_{t_0} \dots \delta_{t_d}(A) = 0$ .

Si de plus les hypothèses de la proposition-définition 1.6 sont vérifiées, on dit qu'un objet  $X$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{A})$  est *polynomial* de degré au plus  $d$  s'il vérifie la même condition : pour toute famille  $(t_0, \dots, t_d)$  d'objets de  $\mathcal{T}$ ,  $\delta_{t_0} \dots \delta_{t_d}(X) = 0$ .

Un objet de  $\mathcal{A}$  est dit *faiblement polynomial* de degré (faible) au plus  $d$  si son image par le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{A})$  vérifie cette condition.

On note  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{St}(\mathcal{A})$  des objets polynomiaux de degré au plus  $d$ .

On vérifie comme dans [14] que  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A})$  est une sous-catégorie localisante de  $\mathbf{St}(\mathcal{A})$ . Les objets de la sous-catégorie localisante de  $\mathbf{St}(\mathcal{A})$  engendrée par les différents  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A})$  sont dits *analytiques*<sup>2</sup>.

Dans la suite, on se placera exclusivement dans le cadre où la catégorie monoïdale  $\mathcal{T}$  opère sur  $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ , où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie et  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck, par précomposition par une action de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{C}$ . Lorsque  $\mathcal{T} = \mathcal{C}$  (avec l'action tautologique), c'est exactement le cadre de [14], lequel nous suffira d'ailleurs pour une très grande partie des considérations ultérieures.

Dans ce cadre, on notera  $\mathbf{D}_{st}^\omega(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  des complexes dont l'homologie est analytique.

Le résultat qui suit constitue une préparation à la démonstration de la proposition 1.17.

**Proposition 1.14.** *Soit  $X$  un objet de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  (resp.  $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ ) et  $t$  un objet de  $\mathcal{T}$ . On suppose que les deux morphismes canoniques  $t \rightarrow t+t$  induisent le même morphisme  $\tau_t(X) \rightarrow \tau_{t+t}(X)$ . Alors  $\delta_t(X) = 0$  (resp.  $\kappa_t \delta_t(X) = \delta_t(X)$ ).*

*Si  $d \geq -1$  est un entier tel que ces deux morphismes  $\tau_t(X) \rightarrow \tau_{t+t}(X)$  induisent pour tout  $t$  dans  $\text{Ob } \mathcal{T}$  (ou dans un ensemble de générateurs monoïdaux faibles) la même flèche dans  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_d(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ , alors  $X$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{d+1}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ .*

*Démonstration.* On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tau_t(X) & \longrightarrow & \delta_t(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_t \tau_t(X) & \longrightarrow & \tau_t \delta_t(X) \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont les épimorphismes canoniques et les flèches verticales des évaluations de la transformation naturelle  $\text{Id} \rightarrow \tau_t$  de noyau  $\kappa_t$  (et injective dans  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ ). On dispose d'un isomorphisme canonique  $\tau_t \tau_t(X) \simeq \tau_{t+t}(X)$  par l'intermédiaire duquel la flèche verticale de gauche provient de la transformation naturelle  $\tau_t \rightarrow \tau_{t+t}$  induite par l'un des morphismes canoniques  $t \rightarrow t+t$ . Mais l'autre morphisme canonique induit un morphisme  $\tau_t(X) \rightarrow \tau_{t+t}(X) \simeq \tau_t \tau_t(X)$  dont la composée avec la flèche horizontale inférieure du diagramme est *nulle*, d'où la proposition (le cas des catégories quotients se traite de la façon, puisque  $\tau_t$  et  $\delta_t$  y passent).  $\square$

La définition et les deux propositions qui suivent seront utilisées au début du § 2.5, où apparaîtra clairement la raison de l'emploi de l'adjectif *triangulaire*.

**Définition 1.15.** Soient  $(\mathcal{C}, +, 0)$  une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité 0 est objet initial et  $t$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $\mathcal{C}$  est munie d'une structure monoïdale de foncteur d'automorphismes. On appelle *donnée triangulaire en  $t$  sur  $\mathcal{C}$*  tout ensemble  $\mathfrak{T}$  de sous-foncteurs  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  de  $\tau_t \text{Aut}_{\mathcal{C}}$  tel que l'involution de tressage de  $t+t$  appartienne au sous-groupe de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(t+t)$  engendré par les  $T(t)$  pour  $T \in \mathfrak{T}$  et par l'image de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(t) \xrightarrow{f \mapsto f+t} \text{Aut}_{\mathcal{C}}(t+t)$ .

2. En général, les objets analytiques n'ont pas de raison de s'exprimer comme colimites d'objets polynomiaux, la classe des colimites d'objets polynomiaux n'étant pas *a priori* stable par extensions.

Si  $\mathcal{M}$  est une catégorie de Grothendieck et que  $\mathcal{C}$  est munie d'une telle structure, nous appellerons *extension triangulaire* d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  en  $t$  relativement à cette structure la donnée, pour tout  $T \in \mathfrak{T}$ , d'un foncteur  $\hat{F}_T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  et de morphismes  $F \xrightarrow{a_T} \hat{F}_T$ ,  $\hat{F}_T \xrightarrow{b_T} F$  et  $\hat{F}_T \xrightarrow{j_T} \tau_t(F)$  de sorte que :

1. la composée  $b_T a_T : F \rightarrow F$  est l'identité ;
2. la composée  $j_T a_T : F \rightarrow \tau_t F$  est le morphisme canonique  $i_t$  ;
3. pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  et tout  $T \in \mathfrak{T}$ ,  $\hat{F}_T(x)$  est muni d'une action de  $T(x)$ , naturelle en  $x$ , de sorte que  $j_T(x) : \hat{F}_T(x) \rightarrow \tau_t(F)(x) = F(t+x)$  soit équivariant (au l'action au but provient de l'inclusion  $T(x) \subset \text{Aut}_{\mathcal{C}}(t+x)$ ), de même que  $b_T(x) : \hat{F}_T(x) \rightarrow F(x)$ , où le but est muni de l'action triviale de  $T(x)$ .

On dira qu'une telle extension triangulaire est de degré au plus  $d$  si, pour tout  $T \in \mathfrak{T}$ , le noyau de  $b_T$  (qui s'identifie au conoyau de  $a_T$ ) est faiblement polynomial de degré au plus  $d$ .

**Proposition 1.16.** *Soient  $d$  et  $n$  des entiers naturels et  $(\mathcal{C}, +, 0)$  une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité  $0$  est objet initial et  $t$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $\mathcal{C}$  est munie d'une structure monoïdale de foncteur d'automorphismes et d'une donnée triangulaire  $\mathfrak{T}$  en  $t$ , et que  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  est un sous-foncteur monoïdal de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$ . On suppose donné pour tout  $T \in \mathfrak{T}$  un sous-foncteur  $T_G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  de  $T$  tel que :*

1. pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , tout  $g \in G(x)$  et tout  $u \in T(x)$ , l'élément  $(g_* t).t^{-1}$  de  $T(x)$  (où  $g_* t$  désigne l'effet de l'action de  $g \in G(x) \subset \text{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$  sur  $t \in T(x)$ ) appartient à  $T_G(x)$  ;
2. pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,  $T_G(x)$  est un sous-groupe distingué de  $T(x)$  ;
3. le sous-foncteur  $T_G$  de  $T \subset \tau_t \text{Aut}_{\mathcal{C}}$  est inclus dans  $\tau_t G$  ;
4. pour tous entiers  $i \geq 0$  et  $j \geq 1$  tels que  $i+j = n$ , le foncteur  $H_i(G; H_j(T_G; \mathbb{k}))$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  est faiblement polynomial de degré au plus  $d$ .

Alors le foncteur  $H_n(G; \mathbb{k})$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  possède une extension triangulaire en  $t$  de degré au plus  $d$ .

(Même si le foncteur  $H_n(G; \mathbb{k})$  est défini sur  $\mathcal{C}/G$ , il nous est plus commode de le considérer ici sur  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire de précomposer par le foncteur canonique  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ , ce qui n'a aucun effet sur le degré polynomial.)

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathfrak{T}$ . Les morphismes canoniques  $T \hookrightarrow \tau_t \text{Aut}_{\mathcal{C}}$  et  $\text{Aut}_{\mathcal{C}} \rightarrow \tau_t \text{Aut}_{\mathcal{C}}$  s'assemblent en un morphisme  $\text{Aut}_{\mathcal{C}} \times T \rightarrow \tau_t \text{Aut}_{\mathcal{C}}$  (parce que la functorialité sur  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$  sur les automorphismes est donnée par la conjugaison). Les trois premières hypothèses faites sur  $T_G$  fournissent par ailleurs un diagramme commutatif de foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G \times T_G & \longrightarrow & \tau_t G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}_{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \text{Aut}_{\mathcal{C}} \times T & \longrightarrow & \tau_t \text{Aut}_{\mathcal{C}} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des inclusions de sous-groupes distingués. Posons  $F := H_n(G; \mathbb{k})$  et  $\hat{F}_T := H_n(G \rtimes T_G; \mathbb{k})$  : la ligne horizontale supérieure du diagramme précédent induit des morphismes

$$F \xrightarrow{a_T} \hat{F}_T \xrightarrow{j_T} \tau_t(F)$$

dans  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  dont la composée est le morphisme canonique ;  $a_T$  possède une rétraction  $b_T : \hat{F}_T \rightarrow F$  donnée par la projection canonique  $G \rtimes T_G \rightarrow G$  ; l'action de  $T$  sur  $\hat{F}_T$  induite par la conjugaison sur  $G \rtimes T_G$  vérifie clairement les propriétés d'équivariance requises pour faire  $\hat{F}_T$  une extension triangulaire de  $F$ . La propriété de degré de cette extension se déduit directement de la dernière hypothèse et de la suite spectrale de Serre.  $\square$

Le résultat suivant généralise Suslin-Wodzicki [34, proposition 1.5].

**Proposition 1.17.** *Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial, munie d'une structure monoïdale de foncteur d'automorphismes,  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  un foncteur et  $d \geq -1$  un entier. On suppose que, pour tout  $t \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  possède une donnée triangulaire  $\mathfrak{T}_t$  en  $t$  et que  $F$  possède une extension triangulaire correspondante de degré au plus  $d$ .*

*Alors  $F$  est faiblement polynomial de degré au plus  $d + 1$ .*

*Démonstration.* Fixons  $t \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . Notons  $G$  la somme pour  $T \in \mathfrak{T}_t$  de l'image par  $j_T : \hat{F}_T \rightarrow \tau_t(F)$  de  $\text{Ker } b_T$ . Ainsi,  $G$  est faiblement polynomial de degré au plus  $d$ . Les hypothèses d'équivariance pour  $b_T$  et  $j_T$  montrent que, pour tout  $T$ , sur l'image de  $\hat{F}_T \xrightarrow{j_T} \tau_t(F) \twoheadrightarrow \tau_t(F)/G$ , l'action de  $T$  est triviale. On déduit maintenant de la relation  $j_T a_T = i_t$  et de l'équivariance de  $a_T$  qu'il en est de même pour l'image de  $F \xrightarrow{i_t} \tau_t(F) \twoheadrightarrow \tau_t(F)/G$ , et ce pour tout  $T \in \mathfrak{T}$ .

On en déduit que, pour tout  $x \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , l'image de  $\tau_t(F)(x) = F(t + x) \xrightarrow{i_t(F)(t+x)} F(t + t + x) = \tau_{t+t}(F)(x) \twoheadrightarrow \tau_{t+t}(F)(x)/G(t + x)$  est invariante par le sous-groupe de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(t + t + x)$  engendré par les  $T(t + x)$  pour  $T \in \mathfrak{T}_t$  et par l'image de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(t + x) \xrightarrow{f \mapsto f + t + x} \text{Aut}_{\mathcal{C}}(t + t + x)$ . Or cette image contient l'automorphisme de  $t + t + x$  induite par le tressage sur  $t + t$  (par hypothèse et par functorialité de  $T$ ), de sorte qu'on peut appliquer la proposition 1.14 pour conclure.  $\square$

Le résultat suivant se place dans le même cadre que [14] dont il améliore légèrement, sous une hypothèse supplémentaire, le théorème 3.8, et utilise la notation tilde introduite au début de sa section 3.

**Théorème 1.18** (Cf. [14], théorème 3.8). *Soient  $(\mathcal{C}, +, 0)$  une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial et  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck. On suppose que pour tout foncteur constant  $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  et tout foncteur fortement monoïdal  $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ , on a  $\text{Ext}_{(\mathcal{C}, \mathcal{M})}^i(A, C) = 0$  pour  $i \in \{0, 1\}$ . Alors le foncteur canonique  $o : \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  induit pour tout entier  $d \geq 1$  une équivalence*

$$\text{Pol}_d(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{M}) / \text{Pol}_{d-2}(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Pol}_d(\mathcal{C}, \mathcal{M}) / \text{Pol}_{d-2}(\mathcal{C}, \mathcal{M}).$$

*Démonstration.* On reprend la démonstration du théorème 3.8 de [14] qu'on adapte. Pour  $d = 1$ , il s'agit de démontrer que  $o^* : \text{Pol}_1(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Pol}_1(\mathcal{C}, \mathcal{M})$

est une équivalence. Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{P}ol_1(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ , comme  $\mathcal{P}ol_1(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{M})$  se scinde en le produit de la catégorie des foncteurs fortement monoïdaux  $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{M}$  et de la catégorie  $\mathcal{M}$  (correspondant aux foncteurs constants), parce que l'unité de  $\tilde{\mathcal{C}}$  en est un objet *nul*, on peut écrire  $\tilde{X} \simeq A \oplus C$  où  $A$  est fortement monoïdal et  $C$  constant. Le noyau  $N$  et le conoyau  $K$  de l'unité  $X \rightarrow o^* \tilde{X}$  sont polynomiaux de degré au plus 0, c'est-à-dire constants (cf. [14]). La suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow o^* A \oplus C \rightarrow K \rightarrow 0$$

(on se permet d'écrire  $C$  plutôt que  $o^* C$ , ce foncteur étant constant) ainsi que l'hypothèse  $\text{Hom}(o^* A, K) = 0$  permettent de la réduire à une suite exacte courte

$$0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow o^* A \oplus C' \rightarrow 0$$

avec  $C' = \text{Ker}(C \rightarrow K)$  constant, puis l'hypothèse  $\text{Ext}^1(o^* A, N) = 0$  (noter que l'Ext peut être calculé indifféremment dans  $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  ou  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$  — cf. [14]) garantit  $X \simeq o^* A \oplus C''$  où  $C''$ , constant, est une extension de  $C'$  par  $N$ . Cela montre que  $X$  appartient à l'image essentielle de  $o^* : \mathcal{P}ol_1(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}ol_1(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ . On en déduit aisément que ce foncteur est une équivalence.

Le cas général s'en déduit par une récurrence sur le degré  $d$  analogue à celle de la démonstration du théorème 3.8 de [14].  $\square$

*Remarque 1.19.* 1. Réciproquement, on vérifie sans peine (à partir du scindement entre foncteurs constants et foncteurs réduits sur une catégorie possédant un objet nul) que, si le foncteur canonique  $\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  induit une équivalence de catégories  $\mathcal{P}ol_1(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}ol_1(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ , alors  $\text{Ext}_{(\mathcal{C}, \mathcal{M})}^i(A, C) = 0$  pour  $i \in \{0, 1\}$ , tout foncteur constant  $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  et tout foncteur fortement monoïdal  $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ .

2. L'hypothèse du théorème précédent n'est pas toujours satisfaite. Considérons par exemple la catégorie  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les couples  $(V, v)$  formés d'un espace vectoriel à gauche de dimension finie sur un corps  $k$  fixé et d'un élément non nul  $v$  de  $V$ , les morphismes  $(V, v) \rightarrow (W, w)$  étant les applications linéaires  $f : V \rightarrow W$  telles que  $f(v) = w$ . On définit sur  $\mathcal{C}$  une structure monoïdale symétrique  $+$  par  $(V, v) + (W, w) := (U + V, \bar{u} = \bar{v})$  (où la barre désigne l'image canonique dans  $U + V$  d'un élément de  $U$  ou de  $V$ ); l'objet  $(k, 1)$  de  $\mathcal{C}$  est à la fois unité pour cette structure et objet initial. Le foncteur  $A : (\mathcal{C}, k) \rightarrow k\text{-Mod}$  associant  $V/v$  à  $V$  est fortement monoïdal, mais  $\text{Ext}_{(\mathcal{C}, k)}^1(A, k)$  est non nul, la suite exacte canonique

$$0 \rightarrow k \rightarrow V \rightarrow V/v \rightarrow 0$$

définissant une extension de foncteurs non triviale.

## 1.4 Catégories de modèles pour l'homologie stable

On donne maintenant une variante du cadre formel pour l'étude de l'homologie stable de familles de groupes introduit dans [15, § 1] et retravaillé dans [12, § 1] (voir aussi la notion de *catégorie homogène* de Randal-Williams et Wahl [30]). Au prix de quelques raffinements techniques, la définition ci-après pourrait être étendue sans que cela modifie fondamentalement les considérations ultérieures, mais cela n'aurait pas d'incidence sur les applications que nous avons en vue — à savoir celles de la section 2 et de l'appendice.

**Définition 1.20.** On appelle *catégorie de modèles pour l'homologie stable* (CMHS en abrégé) une petite catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}, +, 0)$  munie d'une structure de foncteur d'automorphismes (noté  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$ ) monoïdal vérifiant les conditions suivantes.

1. L'unité  $0$  de la structure monoïdale est objet initial de  $\mathcal{C}$ .
2. (Axiome de transitivité stable) Si  $f, g : a \rightarrow b$  sont des flèches parallèles de  $\mathcal{C}$ , il existe un objet  $t$  de  $\mathcal{C}$  et un automorphisme  $\alpha$  de  $t + b$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{g} & b & \longrightarrow & t + b \\ f \downarrow & & & & \downarrow \alpha \\ b & \longrightarrow & & & t + b \end{array}$$

dans lequel les flèches non spécifiées sont les morphismes canoniques déduits de ce que  $0$  est objet initial de  $\mathcal{C}$ .

3. Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{C}(a, -)}$  associant à  $t$  l'objet  $a + t$  muni de la flèche canonique  $a \rightarrow a + t$  est une équivalence.

On dit que la catégorie de modèles pour l'homologie stable est *régulière* si le renforcement suivant de l'axiome de transitivité stable est vérifié : pour tous objets  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{C}$ , le groupe  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(b)$  opère transitivement sur l'ensemble  $\mathcal{C}(a, b)$ .

Un *morphisme de catégories de modèles pour l'homologie stable* est un foncteur monoïdal symétrique *au sens fort* (i.e. tel que les morphismes structuraux de compatibilité aux structures monoïdales soient des isomorphismes) qui est compatible aux foncteurs d'automorphismes.

Les catégories de modèle pour l'homologie stable forment ainsi une catégorie notée **CMHS**.

La dernière condition permet d'associer à toute flèche  $f : a \rightarrow b$  de  $\mathcal{C}$  un objet qu'on notera  $b - a$  tel que  $f$  soit isomorphe à la flèche canonique  $a \rightarrow a + (b - a)$ .

*Remarque 1.21.* À tout petit groupoïde monoïdal symétrique  $(\mathfrak{G}, +, 0)$  on peut associer une CMHS, selon une construction classique due à Quillen, notée  $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{G} \rangle$  dans [21, page 3] (voir aussi [30, §.1.1], et [14, § 3], où la construction duale est utilisée). Cette CMHS est régulière si et seulement si  $\mathfrak{G}$  est régulier au sens où  $a + t \simeq b + t$  entraîne  $a \simeq b$ , où  $a, b$  et  $t$  sont des objets de  $\mathfrak{G}$ .

Il n'est pas difficile de voir que, si  $\mathcal{C}$  est une CMHS et que  $\mathfrak{G}$  désigne le groupoïde monoïdal sous-jacent, on dispose d'un morphisme canonique de CMHS  $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{G} \rangle \rightarrow \mathcal{C}$  qui est une *équivalence*.

On vérifie aussitôt :

**Proposition 1.22.** Soient  $\mathcal{C}$  une CMHS et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  un sous-foncteur monoïdal de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$ . Alors il existe une et seule structure de CMHS sur  $\mathcal{C}/G$  telle que le foncteur canonique  $\Pi_G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$  soit un morphisme de CMHS.

(La structure de foncteur d'automorphismes sur  $\mathcal{C}/G$  est celle de la proposition-définition 1.3.)

**Proposition 1.23.** Le produit de deux CMHS, muni de la structure monoïdale produit et de la structure de foncteurs d'automorphismes produit, est une CMHS.

La situation générale qui nous intéresse est la suivante. Supposons que  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un morphisme de CMHS. Définissons, pour  $x \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,

$$\Gamma_\Phi(x) := \text{Ker} (\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi x))$$

(le morphisme de groupes étant induit par la functorialité de  $\Phi$ ). On obtient ainsi un sous-foncteur monoïdal  $\Gamma_\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$ .

*Remarque 1.24.* On pourrait généraliser les résultats du présent travail à la situation suivante :  $G_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  (resp.  $G_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ) désignant un sous-foncteur de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$  (resp.  $\text{Aut}_{\mathcal{D}}$ ) contenant le sous-foncteur des commutateurs  $[\text{Aut}_{\mathcal{C}}, \text{Aut}_{\mathcal{C}}]$  (resp.  $[\text{Aut}_{\mathcal{D}}, \text{Aut}_{\mathcal{D}}]$ ), si l'on suppose que la transformation naturelle  $\text{Aut}_{\mathcal{C}} \rightarrow \Phi^* \text{Aut}_{\mathcal{D}}$  qu'induit  $\Phi$  envoie  $G_{\mathcal{C}}$  dans  $\Phi^* G_{\mathcal{D}}$ , on pourrait remplacer  $\Gamma_\Phi$  par le noyau de la transformation naturelle naturelle  $G_{\mathcal{C}} \rightarrow \Phi^* G_{\mathcal{D}}$ , au prix de quelques raffinements techniques.

Cette généralisation (qui permet notamment de traiter de groupes de congruence dans le groupe *spécial* linéaire sur un anneau commutatif) est classique pour le problème de la stabilité homologique (voir [30] pour un cadre général, functoriel, à propos de cette question).

Par la proposition–définition 1.4, on obtient en considérant l'homologie des groupes  $\Gamma_\Phi(x)$  à coefficients dans  $F(x)$ , où  $F$  est un objet de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , un foncteur homologique  $H_\bullet(\Gamma_\Phi; -) : (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}/\Gamma_\Phi, \mathbb{k})$ . Celui-ci induit un foncteur homologique  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}/\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$ . Cela provient du résultat plus général suivant :

**Proposition 1.25.** *Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial, munie d'une structure de foncteur d'automorphismes monoïdale, et  $G$  un sous-foncteur de  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}$ . Si  $F$  est un foncteur appartenant à  $\text{Sn}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , alors  $H_\bullet(G; F)$  appartient à  $\text{Sn}(\mathcal{C}/G, \mathbb{k})$ .*

*Démonstration.* Par commutation de  $H_\bullet(G; -)$  aux colimites filtrantes, on peut se ramener au cas où existe un  $t \in \text{Ob } \mathcal{C}$  tel que  $i_t : F \rightarrow \tau_t(F)$  soit nul. La conclusion provient alors de ce que le morphisme

$$i_t : H_\bullet(G(x); F(x)) \rightarrow H_\bullet(G(t+x); F(t+x))$$

se factorise de manière évidente par le morphisme

$$H_\bullet(G(x); F(x)) \rightarrow H_\bullet(G(x); F(t+x))$$

induit par  $i_t : F(x) \rightarrow F(t+x)$ , qu'on a supposé nul.  $\square$

**Proposition et définition 1.26.** *Supposons que  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un morphisme de CMHS faiblement surjectif et stablement plein. Alors  $\Phi^*$  induit une équivalence de catégories  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}/\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$ . On note*

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; -) : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$$

le foncteur homologique composé du foncteur  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}/\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  induit par  $H_\bullet(\Gamma_\Phi; -)$  (via la proposition 1.4) et d'un quasi-inverse de l'équivalence précédente.

La proposition 1.4 fournit une transformation naturelle  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; -) \rightarrow \mathbf{L}_\bullet(\Phi_*)$  de foncteurs homologiques  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  qui est un isomorphisme en degré 0.

(Noter que remplacer  $\mathcal{D}$  par l'image  $\bar{\mathcal{D}}$  du foncteur  $\Phi$  et ce foncteur par le foncteur  $\bar{\Phi} : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{D}}$  qu'il induit ne modifie pas  $\Gamma_\Phi$ , et que  $\bar{\Phi}$  vérifie les hypothèses précédentes : celles-ci ne sont donc pas tellement restrictives pour l'étude de l'homologie de  $\Gamma_\Phi$ .)

*Démonstration.* De manière générale,  $\Phi$  induit un morphisme de CMHS

$$\bar{\Phi} : \mathcal{C}/\Gamma_\Phi \rightarrow \bar{\mathcal{D}} ;$$

celui-ci est faiblement surjectif (resp. stablement plein) si  $\Phi$  l'est. Pour conclure par application de la proposition 1.12, il suffit donc de montrer que  $\bar{\Phi}$  est stablement fidèle.

Soient  $x, y$  des objets de  $\mathcal{C}$  et  $f, g$  des éléments de  $\mathcal{C}(x, y)$  ayant la même image dans  $\mathcal{D}(\Phi x, \Phi y)$ . Par l'axiome de transitivité stable on voit que, quitte à remplacer  $f$  et  $g$  par leur composée avec un morphisme canonique du type  $y \rightarrow t + y$ , on peut supposer l'existence d'un automorphisme  $\alpha$  de  $y$  tel que  $g = \alpha f$ ; par le troisième axiome on voit qu'on peut également supposer que  $y$  est de la forme  $x + t$  et que  $g : x \rightarrow x + t$  est le morphisme canonique. De  $\Phi(g) = \Phi(\alpha)\Phi(f) = \Phi(\alpha)\Phi(g)$  on tire donc que  $\Phi(\alpha)$  appartient à l'image du morphisme canonique  $\text{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(t)) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(x) + \Phi(t)) \simeq \text{Aut}_{\mathcal{D}}(\Phi(x + t))$ . Il s'ensuit que l'automorphisme  $\Phi(x + \alpha)$  de  $\Phi(x + x + t)$  commute avec l'involution  $\epsilon$  induite par le tressage sur  $x + x$ . Posons  $\beta = (x + \alpha)\epsilon(x + \alpha^{-1})\epsilon$  : on a donc  $\beta \in \Gamma_\Phi(x + x + t)$ . On vérifie facilement que, en notant  $\tilde{f}$  (resp.  $\tilde{g}$ ) la composée de  $f$  (resp.  $g$ ) avec le morphisme canonique  $y \rightarrow x + y (= x + x + t)$ , on a  $\tilde{g} = \beta\tilde{f}$ , de sorte que  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  définissent le même morphisme dans  $\mathcal{C}/\Gamma_\Phi$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Remarque 1.27.* Si  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un morphisme de CMHS plein et essentiellement surjectif et que  $\mathcal{C}$  est une CMHS régulière, on vérifie facilement que  $\Phi$  induit même une équivalence  $\mathcal{C}/\Gamma_\Phi \rightarrow \mathcal{D}$ .

Notre but consiste à étudier les  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X)$ , notamment lorsque  $X$  est constant — mais pour ce faire nous aurons besoin de l'étude de cette homologie stable pour des  $X$  assez généraux (au moins polynomiaux).

La construction qu'on vient d'introduire possède la functorialité suivante. Supposons donné un diagramme de CMHS

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & \mathcal{D}_1 \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Xi \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\Phi_2} & \mathcal{D}_2 \end{array} \quad (2)$$

commutatif (à isomorphisme près). Alors  $\Psi$  induit un morphisme  $\text{Aut}_{\mathcal{C}_1} \rightarrow \Psi^* \text{Aut}_{\mathcal{C}_2}$  de foncteurs  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathbf{Grp}$ . Si l'on suppose  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  faiblement surjectifs et stablement pleins, alors  $\Psi_1$  induit un morphisme gradué  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi_1}; \Psi^* X) \rightarrow \Xi^* \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi_2}; X)$  naturel en l'objet  $X$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}_2, \mathbb{k})$ .

La définition qui suit est calquée sur la situation usuelle de la  $K$ -théorie algébrique (cf. l'introduction). La construction  $+$  ou la construction  $Q$  de Quillen [29] peuvent d'ailleurs être effectuées dans le cadre des CMHS, ce qui permet, comme dans le cas des groupes de congruence classiques, de donner un critère homotopique équivalent à la définition homologique qui suit.

**Définition 1.28.** On dit que  $\Phi$  est  $\mathbb{k}$ -excisif pour l'homologie stable si l'objet  $\mathcal{H}_i(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  est (stablement) constant pour tout entier  $i$ . On dit que  $\Phi$  est  $\mathbb{k}$ -excisif pour l'homologie stable jusqu'en degré  $d$  si cela est vrai pour  $i \leq d$ .

Si cela est vrai pour  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ , on dira simplement que  $\Phi$  est excisif (jusqu'en degré  $d$ ), ce qui implique que ce foncteur est  $\mathbb{k}$ -excisif (jusqu'en degré  $d$ ) pour tout anneau commutatif  $\mathbb{k}$  par la formule des coefficients universels.

## 1.5 Produits tensoriels

Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie.

Le produit tensoriel usuel  $\otimes = \otimes_{\mathbb{k}} : (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{k})$  se calcule au but — c'est donc la composition du produit tensoriel extérieur avec la précomposition par la diagonale  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ . Il passe aux catégories dérivées, fournissant  $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbb{k}} : \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ . Il passe également aux catégories  $\mathbf{St}$ , de sorte qu'on obtient des foncteurs  $\otimes : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  et  $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbb{k}} : \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  (les foncteurs dérivés usuels seront notés  $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}}$ , ils se calculent aussi au but). Ces différents produits tensoriels usuels définissent des structures monoïdales symétriques.

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  est munie d'une structure monoïdale symétrique, notée  $+$ . On note alors  $\otimes_{[\mathcal{C}, +]}$  le foncteur, appelé produit tensoriel monoïdal

$$\otimes_{[\mathcal{C}, +]} : (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\boxtimes} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\Delta[\mathcal{C}, +]} (\mathcal{C}, \mathbb{k})$$

composé du produit tensoriel extérieur et de la diagonale monoïdale

$$\Delta[\mathcal{C}, +] : (\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{k})$$

définie comme l'extension de Kan à gauche le long du foncteur  $+$  :  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Cette diagonale et ce produit tensoriel coïncident avec les notions usuelles lorsque la structure monoïdale  $+$  sur  $\mathcal{C}$  est une somme catégorique.

Ce produit tensoriel se dérive à gauche relativement à l'une ou l'autre des variables de la façon usuelle si  $P_c^{\mathcal{C}} \otimes_{[\mathcal{C}, +]} -$  est un foncteur exact pour tout objet

$c$  de  $\mathcal{C}$ . C'est le cas si  $\mathcal{C}$  est une CMHS, auquel cas on a, pour tout  $c \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ , un endofoncteur  $\omega_c^{\mathcal{C}}$  de  $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  (pour toute catégorie de Grothendieck  $\mathcal{A}$ ) défini sur les objets par

$$\omega_c^{\mathcal{C}}(F)(t) = \bigoplus_{f \in \mathcal{C}(c, t)} F(t - c)$$

(cf. l'adjonction générale donnée par (1)). On déduit facilement du troisième axiome d'une CMHS que  $P_c^{\mathcal{C}} \otimes_{[\mathcal{C}, +]} - \simeq \omega_c^{\mathcal{C}}$ . Les foncteurs dérivés usuels de  $\otimes_{[\mathcal{C}, +]}$

seront notés  $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{[\mathcal{C}, +]}$ .

Soient  $t$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $A$  et  $F$  des objets de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ . Considérons le morphisme naturel  $\tau_t(A) \otimes_{[\mathcal{C}, +]} F \rightarrow \tau_t(A \otimes_{[\mathcal{C}, +]} F)$  adjoint au morphisme  $\tau_t(A) \boxtimes F \rightarrow \tau_t(A \otimes_{[\mathcal{C}, +]} F) \circ +$  dont l'évaluation sur  $(x, y)$  est le morphisme

$$A(t+x) \otimes F(y) \rightarrow (A \otimes_{[\mathcal{C}, +]} F)(t+x+y)$$

unité de l'adjonction évaluée sur  $t + x$  et  $y$ . On vérifie aisément que la composée de ce morphisme  $\tau_t(A) \otimes_{[\mathcal{C},+]} F \rightarrow \tau_t(A \otimes_{[\mathcal{C},+]} F)$  et du morphisme  $A \otimes_{[\mathcal{C},+]} F \rightarrow \tau_t(A) \otimes_{[\mathcal{C},+]} F$  induit par le morphisme canonique  $A \rightarrow \tau_t(A)$  est le morphisme canonique  $A \otimes_{[\mathcal{C},+]} F \rightarrow \tau_t(A \otimes_{[\mathcal{C},+]} F)$ . En raisonnant comme dans la démonstration du deuxième point de la proposition 1.9, on en déduit que  $- \otimes_{[\mathcal{C},+]} F$  induit un endofoncteur de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , puis que  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$  induit un foncteur (toujours noté de la même façon)  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ .

Là encore,  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$  (resp.  $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{[\mathcal{C},+]}$ , dans le cas où le produit tensoriel monoïdal est équilibré) définit des structures monoïdales symétriques sur  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  (resp.  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ) et sur  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  (resp.  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ).

Les produits tensoriels usuel  $\otimes$  et monoïdal  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$  sont liés de la façon suivante. Supposons que l'unité de  $\mathcal{C}$  en est un objet initial. On note déjà que l'unité de  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$  est alors  $\mathbb{k}$ , comme pour le produit tensoriel usuel. On dispose aussi d'un morphisme

$$P_a^{\mathcal{C}} \otimes_{[\mathcal{C},+]} P_b^{\mathcal{C}} = P_{a+b}^{\mathcal{C}} \rightarrow P_a^{\mathcal{C}} \otimes P_b^{\mathcal{C}}$$

naturel en les objets  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{C}$  (il est induit par les morphismes canoniques  $a \rightarrow a + b$  et  $b \rightarrow a + b$ ), qui est un isomorphisme si  $a$  ou  $b$  égale 0. On en déduit pour des raisons formelles un morphisme

$$F \otimes_{[\mathcal{C},+]} G \rightarrow F \otimes G \tag{3}$$

naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , qui est un isomorphisme lorsque  $F$  ou  $G$  est constant, et qui est compatible aux structures monoïdales symétriques des produits tensoriels. Ce morphisme induit bien sûr des transformations naturelles analogues entre les deux structures monoïdales symétriques qu'on discute sur  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ,  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  et  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  (sous les hypothèses où l'on peut dériver raisonnablement).

L'étude du produit  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$  semble difficile en général; nous montrerons plus tard des propriétés cruciales de ce foncteur sur des objets polynomiaux lorsque  $\mathcal{C}$  est une catégorie d'objets hermitiens (ce qui nous suffira amplement). On a toutefois le résultat général simple suivant.

**Proposition et définition 1.29.** *Soit  $\mathcal{C}$  une CMHS.*

1. *Soient  $t$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $F$  un objet de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ . Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} P_t^{\mathcal{C}} \otimes_{[\mathcal{C},+]} F & \longrightarrow & P_t^{\mathcal{C}} \otimes F \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \omega_t^{\mathcal{C}} F & \longrightarrow & \omega_t^{\mathcal{C}} \tau_t F \end{array}$$

*naturel en  $F$ , dans lequel la flèche supérieure est la transformation naturelle définie ci-dessus et la flèche inférieure est induite par le morphisme  $i_t(F) : F \rightarrow \tau_t(F)$ .*

2. L'endofoncteur  $\omega_t^{\mathcal{C}}$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  est exact et fidèle ; il est adjoint à gauche à  $\tau_t$ .
3. Un objet  $X$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  est (stablement) constant si la transformation naturelle  $- \otimes_{[\mathcal{C}, +]} X \rightarrow - \otimes X$  d'endofoncteurs de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  est un épimorphisme.
4. Notons  $\bar{\otimes}_{[\mathcal{C}, +]} : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  le conoyau de la transformation naturelle  $\otimes_{[\mathcal{C}, +]} \rightarrow \otimes$ , conoyau appelé produit tensoriel monoïdal réduit. Ce bifoncteur commute aux colimites en chaque variable et est exact lorsqu'on fixe une des variables en l'image dans  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  d'un  $P_t^{\mathcal{C}}$ . On peut donc le dériver à gauche comme  $\otimes$ , obtenant des foncteurs dérivés usuels notés

$$\overline{\mathrm{Tor}}_{\bullet}^{[\mathcal{C}, +]} : \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$$

et un foncteur dérivé total

$$\mathbf{L} \bar{\otimes}_{[\mathcal{C}, +]} : \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k}).$$

5. On dispose dans  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  d'un triangle distingué

$$X \underset{[\mathcal{C}, +]}{\mathbf{L} \otimes} Y \rightarrow X \underset{\mathbb{k}}{\mathbf{L} \otimes} Y \rightarrow X \underset{[\mathcal{C}, +]}{\mathbf{L} \bar{\otimes}} Y \rightarrow (X \underset{[\mathcal{C}, +]}{\mathbf{L} \otimes} Y)[1]$$

naturel en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  ; cela induit dans  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathrm{Tor}_n^{[\mathcal{C}, +]}(F, G) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{k}}(F, G) \rightarrow \overline{\mathrm{Tor}}_n^{[\mathcal{C}, +]}(F, G) \rightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^{[\mathcal{C}, +]}(F, G) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow F \underset{[\mathcal{C}, +]}{\otimes} G \rightarrow F \otimes G \rightarrow F \underset{[\mathcal{C}, +]}{\bar{\otimes}} G \rightarrow 0 \end{aligned}$$

naturelle en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ . En particulier, on dispose d'un isomorphisme naturel  $\overline{\mathrm{Tor}}_n^{[\mathcal{C}, +]}(F, G) \simeq \mathrm{Tor}_{n-1}^{[\mathcal{C}, +]}(F, G)$  pour  $n > 2$  (et même pour  $n > 1$  si  $\mathbb{k}$  est un corps, auquel cas  $\overline{\mathrm{Tor}}_1^{[\mathcal{C}, +]}(F, G)$  s'identifie au noyau de la transformation naturelle  $F \underset{[\mathcal{C}, +]}{\otimes} G \rightarrow F \otimes G$ ).

*Démonstration.* Le premier point est immédiat à partir de la définition de la transformation naturelle  $\otimes_{[\mathcal{C}, +]} \rightarrow \otimes$ . Le seul point qui mérite un commentaire

pour en déduire la deuxième assertion est la fidélité de  $\omega_t^{\mathcal{C}}$ . Celle-ci est équivalente au fait que l'unité  $X \rightarrow \tau_t \omega_t^{\mathcal{C}}(X)$  est un monomorphisme. Or c'est déjà le cas dans  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , comme on peut le voir soit en notant que la formule définissant  $\omega_t^{\mathcal{C}}$  montre directement sa fidélité (sur  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ), soit en notant que cette unité s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tau_t \omega_t^{\mathcal{C}}(X) \\ & \searrow & \downarrow \simeq \\ & & \tau_t(P_t^{\mathcal{C}}) \otimes X \end{array}$$

dont la flèche oblique est induite par  $\mathbb{k} \rightarrow \tau_t(P_t^{\mathcal{C}})$  venant de la transformation naturelle ensembliste  $* \rightarrow \mathcal{C}(t, t+ -)$  déduite du morphisme canonique  $t \rightarrow t+x$ .

On déduit du premier point que  $P_t^{\mathcal{C}} \otimes_{[\mathcal{C},+]} -$  est isomorphe à  $\omega_t^{\mathcal{C}} \delta_t$ . Comme  $\delta_t$  est un endofoncteur exact de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  (mais généralement pas de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})!$ ), cela donne formellement les deux dernières assertions.

La troisième assertion s'obtient à partir de l'isomorphisme canonique  $P_t^{\mathcal{C}} \bar{\otimes}_{[\mathcal{C},+]} X \simeq \omega_t^{\mathcal{C}} \delta_t(X)$  et de la fidélité des foncteurs  $\omega_t^{\mathcal{C}}$ .  $\square$

*Remarque 1.30.* Il n'y a pas de functorialité claire en  $t$  de  $\omega_t^{\mathcal{C}} \tau_t$ , car  $\tau_t$  est fonctoriel *covariant* en  $t$  tandis que  $\omega_t^{\mathcal{C}}$  est fonctoriel *contravariant* en  $t$ .

**Fonctorialité en  $\mathcal{C}$  de  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$**  Soient  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un morphisme de CMHS et  $F, G$  des foncteurs dans  $(\mathcal{D}, \mathbb{k})$ . On dispose d'une application naturelle

$$\Phi^*(F) \otimes_{[\mathcal{C},+]} \Phi^*(G) \rightarrow \Phi^*(F \otimes_{[\mathcal{D},+]} G) \quad (4)$$

dans  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , adjointe au morphisme

$$\Phi^*(F) \boxtimes \Phi^*(G) \simeq (\Phi \times \Phi)^*(F \boxtimes G) \rightarrow (\Phi \times \Phi)^*((F \otimes_{[\mathcal{D},+]} G) \circ +) \simeq \Phi^*(F \otimes_{[\mathcal{D},+]} G) \circ +$$

obtenu en appliquant  $(\Phi \times \Phi)^*$  à l'unité  $F \boxtimes G \rightarrow (F \otimes_{[\mathcal{D},+]} G) \circ +$ . Ce morphisme naturel fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi^*(F) \otimes_{[\mathcal{C},+]} \Phi^*(G) & \longrightarrow & \Phi^*(F \otimes_{[\mathcal{D},+]} G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi^*(F) \otimes \Phi^*(G) & \xrightarrow{\simeq} & \Phi^*(F \otimes G) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont données par (3).

Par conséquent, (4) induit un morphisme naturel

$$\Phi^*(F) \bar{\otimes}_{[\mathcal{C},+]} \Phi^*(G) \rightarrow \Phi^*(F \bar{\otimes}_{[\mathcal{D},+]} G); \quad (5)$$

bien sûr, les morphismes naturels (4) et (5) induisent des analogues dans  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ,  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  et  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ .

**Une compatibilité entre les produits  $\otimes$  et  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$**  On dispose d'un morphisme

$$(T \otimes U) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (A \otimes B) \rightarrow (T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) \quad (6)$$

naturel en les objets  $A, B, T$  et  $U$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  (ou  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ), adjoint au morphisme

$$\begin{aligned} (T \otimes U) \boxtimes (A \otimes B) &\simeq (T \boxtimes A) \otimes (U \boxtimes B) \rightarrow +^*(T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A) \otimes +^*(U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) \\ &\simeq +^*((T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A) \otimes (U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B)) \end{aligned}$$

où la flèche centrale est le produit tensoriel (usuel) des unités  $T \boxtimes A \rightarrow +^*(T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A)$  et  $U \boxtimes B \rightarrow +^*(U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B)$ .

Ce morphisme satisfait à des conditions d'associativité et de commutativité qu'on peut traduire en disant qu'il fournit une structure monoïdale symétrique sur le foncteur  $\otimes : (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times (\mathcal{C}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , où  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  est munie de la structure monoïdale  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$  (et  $(\mathcal{C}, \mathbb{k}) \times (\mathcal{C}, \mathbb{k})$  de la structure monoïdale produit); on vérifie également qu'il s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (T \otimes_{[\mathcal{C},+]} U) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (A \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) & \xrightarrow{\simeq} & (T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T \otimes U) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (A \otimes B) & \longrightarrow & (T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont induites par la transformation naturelle  $\otimes \rightarrow \otimes_{[\mathcal{C},+]}$  introduite en (3).

Bien sûr, tout cela passe au niveau dérivé : dans  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , on dispose d'un morphisme naturel

$$(T \otimes_{\mathbb{k}} U) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (A \otimes_{\mathbb{k}} B) \rightarrow (T \otimes_{[\mathcal{C},+]} A) \otimes_{\mathbb{k}} (U \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) \quad (7)$$

qui vérifie des propriétés de compatibilité analogues.

**Structure (co)multiplicative sur l'homologie stable des groupes de type congruence** Les différents produits tensoriels nous permettent de discuter de structures (co)multiplicatives à disposition sur  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi)$ , où  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un morphisme de CMHS stablement plein et faiblement surjectif.

On note déjà que si  $\mathbb{k}$  est un corps (ou, plus généralement, sous des hypothèses de platitude appropriées), le coproduit externe en homologie des groupes fournit dans  $(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  un morphisme gradué

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X \otimes Y) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \otimes \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y)$$

naturel et comonoïdal symétrique en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ .

Par ailleurs, le foncteur  $+$  :  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est un morphisme de CMHS. Comme on dispose d'un isomorphisme canonique  $\Gamma_{\Phi \times \Phi} \simeq \Gamma_\Phi \times \Gamma_\Phi$  de foncteurs :  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , on obtient, pour deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , un morphisme naturel gradué de  $\mathbf{St}(\mathcal{D} \times \mathcal{D}, \mathbb{k})$

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \boxtimes \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y) \circ +$$

en composant

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \boxtimes \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi \times \Gamma_\Phi; X \boxtimes Y) \simeq \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi \times \Phi}; X \boxtimes Y)$$

(induit par le produit externe en homologie des groupes) avec

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi \times \Phi}; X \boxtimes Y) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi \times \Phi}; (X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y) \circ +) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y) \circ +$$

(morphisme induit par l'unité  $X \boxtimes Y \rightarrow (X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y) \circ +$  suivi du morphisme induit par  $+$ ). Le morphisme gradué de  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y)$$

adjoint au précédent définit un morphisme naturel et monoïdal symétrique en les objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ . En particulier,  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  est une algèbre graduée commutative pour le produit  $\otimes_{[\mathcal{C},+]}$ .

Lorsque  $\mathbb{k}$  est un corps, les structures multiplicative et comultiplicative sur le foncteur  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi)$  vérifient la propriété de compatibilité suivante : si  $X, Y, A$  et  $B$  sont des objets de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X \otimes A) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y \otimes B) & \xrightarrow{(c)} & (\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; A)) \otimes_{[\mathcal{D},+]} (\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; B)) \\ \downarrow (m) & & \downarrow (*) \\ \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; (X \otimes A) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (Y \otimes B)) & & (\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; Y)) \otimes_{[\mathcal{D},+]} (\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; A) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; B)) \\ \downarrow (*) & & \downarrow (m) \\ \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; (X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y) \otimes_{[\mathcal{C},+]} (A \otimes_{[\mathcal{C},+]} B)) & \xrightarrow{(c)} & \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X \otimes_{[\mathcal{C},+]} Y) \otimes_{[\mathcal{C},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; A \otimes_{[\mathcal{C},+]} B) \end{array}$$

commute, où les flèches désignées par  $(m)$  (resp.  $(c)$ ) se déduisent de la structure multiplicative (resp. comultiplicative) tandis que celles désignées par  $(*)$  proviennent du morphisme naturel (6).

Si  $\Phi$  est  $\mathbb{k}$ -excisif pour l'homologie stable, la flèche naturelle  $- \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow - \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  est un isomorphisme, de sorte que cela implique que  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  est une algèbre de Hopf graduée connexe commutative et cocommutative ( $\mathbb{k}$  étant toujours un corps).

## 1.6 Suite spectrale fondamentale

Le théorème suivant constitue le résultat principal de la section 1.

**Théorème 1.31.** *Soit  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un morphisme de CMHS faiblement surjectif et stablement plein. Il existe une suite spectrale*

$$E_{p,q}^2 = \mathbf{L}_p((- \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_q(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})) \circ \Phi_*)(X) \Rightarrow \mathcal{H}_{p+q}(\Gamma_\Phi; X)$$

naturelle en l'objet  $X$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ .

De plus, le morphisme de coin  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X) \rightarrow \mathbf{L}_\bullet(\Phi_*)(X)$  est le morphisme canonique de la proposition 1.26, tandis que le morphisme de coin  $\Phi_*(X) \otimes_{[\mathcal{D},+]}$

$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; X)$  est la composée

$$\Phi_*(X) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \simeq \mathcal{H}_0(\Gamma_\Phi; X) \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$$

dont le deuxième morphisme est la multiplication.

La deuxième page de cette suite spectrale peut se comprendre grâce à la suite spectrale de foncteurs composés

$$E_{i,j}^{\prime 2} = \mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D},+]}(\mathbf{L}_j(\Phi_*)(X), T) \Rightarrow \mathbf{L}_{i+j}((- \otimes_{[\mathcal{D},+]} T) \circ \Phi_*)(X).$$

naturelle en les objets  $X$  et  $T$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ .

*Démonstration.* On peut supposer  $\mathcal{D} = \mathcal{C}/\Gamma_\Phi$ , au vu de la proposition 1.26. Dans ce cas, la première suite spectrale est l'image par le foncteur canonique  $(\mathcal{D}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  d'une suite spectrale de  $(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  qu'on construit maintenant.

Des arguments formels montrent qu'il suffit d'établir l'existence d'un isomorphisme

$$H_\bullet(\Gamma_\Phi; F) \simeq \Phi_*(F) \otimes_{[\mathcal{D},+]} H_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$$

naturel en l'objet *projectif*  $F$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ ; on peut même supposer  $F$  de la forme  $P_t^{\mathcal{C}}$  pour un  $t \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ , puisque tous les foncteurs en jeu commutent aux sommes directes arbitraires. Dans ce cas, cela revient à un isomorphisme

$$H_\bullet(\Gamma_\Phi; P_t^{\mathcal{C}}) \simeq \omega_{\Phi(t)}^{\mathcal{D}}(H_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}))$$

qu'on construit comme suit. Le stabilisateur d'un morphisme  $f \in \mathcal{C}(t, x)$  de source  $t$  sous l'action de  $\Gamma_\Phi(x)$  est exactement  $\Gamma_\Phi(x \xrightarrow{f} t)$ , par le troisième axiome d'une CMHS. Cela procure une bijection

$$\mathcal{C}(t, x) \simeq \bigsqcup_{\bar{f} \in \mathcal{C}(t,x)/\Gamma_\Phi(x)} \Gamma_\Phi(x)/\Gamma_\Phi(x \xrightarrow{f} t)$$

$\Gamma_\Phi(x)$ -équivariante naturelle en  $x \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$  (où  $f$  désigne un relèvement de  $\bar{f}$  dans  $\mathcal{C}(t, x)$ ). En linéarisant et en appliquant le lemme de Shapiro, on obtient l'isomorphisme recherché.  $\square$

Les suites spectrales du théorème précédent possèdent la functorialité suivante. Supposons donné un diagramme commutatif de CMHS du type (2), avec  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  stablement pleins et faiblement surjectifs. Commençons par la deuxième : si  $T$  est un objet de  $\mathbf{St}(\mathcal{D}_2, \mathbb{k})$  et  $X$  un objet de  $\mathbf{St}(\mathcal{C}_2, \mathbb{k})$ , on dispose au niveau des pages  $E^{\prime 2}$  d'un morphisme naturel

$$\mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D}_1,+]}(\mathbf{L}_j(\Phi_1)_*(\Psi^* X), \Xi^* T) \rightarrow \Xi^* \mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D}_2,+]}(\mathbf{L}_j(\Phi_2)_*(X), T)$$

obtenu en utilisant le morphisme naturel  $\mathbf{L}_j(\Phi_1)_*(\Psi^* X) \rightarrow \Xi^* \mathbf{L}_j(\Phi_2)_*(X)$  déduit de la transformation naturelle  $\mathbf{L}(\Phi_1)_* \circ \Psi^* \rightarrow \Xi^* \circ \mathbf{L}(\Phi_2)_*$  de foncteurs  $\mathbf{D}_{st}(\mathcal{D}_2, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}(\mathcal{D}_1, \mathbb{k})$  adjointe à la transformation naturelle

$$\Psi^* \rightarrow \Psi^* \Phi_2^* \mathbf{L}(\Phi_2)_* \simeq \Phi_1^* \Xi^* \mathbf{L}(\Phi_2)_*$$

induite par l'unité  $\mathrm{Id} \rightarrow \Phi_2^* \mathbf{L}(\Phi_2)_*$ , qui fournit

$$\mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D}_1,+]}(\mathbf{L}_j(\Phi_1)_*(\Psi^* X), \Xi^* T) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D}_1,+]}(\Xi^* \mathbf{L}_j(\Phi_2)_*(X), \Xi^* T)$$

qu'on compose ensuite avec le morphisme naturel

$$\mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D}_1,+]}(\Xi^* \mathbf{L}_j(\Phi_2)_*(X), \Xi^* T) \rightarrow \Xi^* \mathrm{Tor}_i^{[\mathcal{D}_2,+]}(\mathbf{L}_j(\Phi_2)_*(X), T)$$

obtenu en dérivant la transformation naturelle (4).

On dispose d'une transformation naturelle

$$\mathbf{L}_\bullet \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_1, +]} \Xi^* T) \circ (\Phi_1)_* \right) \circ \Psi^* \rightarrow \Xi^* \mathbf{L}_\bullet \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_2, +]} T) \circ (\Phi_2)_* \right) \quad (8)$$

définie de façon similaire; on dispose d'un morphisme des suites spectrales de foncteurs composés aboutissant à ces deux foncteurs, dont l'effet sur la page  $E'^2$  est celui décrit précédemment.

Les suites spectrales pour l'homologie de  $\Gamma_{\Phi_1}$  (à coefficients dans  $\Psi^* X$ ) et  $\Gamma_{\Phi_2}$  (à coefficients dans  $F$ ) données au début du théorème sont également reliées par un morphisme naturel qui, entre les aboutissements, est le morphisme  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi_1}; \Psi^* X) \rightarrow \Xi^* \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi_2}; X)$  défini juste avant la définition 1.28, et sur les deuxièmes pages est le morphisme

$$\mathbf{L}_p \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_1, +]} \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi_1}; \mathbb{k})) \circ (\Phi_1)_* \right) (\Psi^* X) \rightarrow \Xi^* \mathbf{L}_p \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_2, +]} \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi_2}; \mathbb{k})) \circ (\Phi_2)_* \right) (X)$$

obtenu en composant la flèche

$$\mathbf{L}_p \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_1, +]} \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi_1}; \mathbb{k})) \circ (\Phi_1)_* \right) (\Psi^* X) \rightarrow \mathbf{L}_p \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_1, +]} \Xi^* \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi_2}; \mathbb{k})) \circ (\Phi_1)_* \right) (\Psi^* X)$$

induit par  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi_1}; \mathbb{k}) \rightarrow \Xi^* \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\Phi_2}; \mathbb{k})$  et

$$\mathbf{L}_p \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_1, +]} \Xi^* \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi_2}; \mathbb{k})) \circ (\Phi_1)_* \right) (\Psi^* X) \rightarrow \Xi^* \mathbf{L}_p \left( (- \otimes_{[\mathcal{D}_2, +]} \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi_2}; \mathbb{k})) \circ (\Phi_2)_* \right) (X)$$

donnée par (8).

Le lecteur courageux pourra écrire les propriétés de compatibilité à la structure multiplicative (et à la structure comultiplicative, lorsque  $\mathbb{k}$  est un corps) sur  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi)$  que vérifient les suites spectrales du théorème 1.31.

**Proposition 1.32.** *Soit  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un morphisme de CMHS faiblement surjectif et stablement plein.*

*Le foncteur  $\Phi$  est  $\mathbb{k}$ -excisif jusqu'en degré  $d$  si et seulement si les endofoncteurs  $\mathbf{L}_i(\Phi_*)\Phi^*$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$  sont nuls pour  $0 < i \leq d$ . De plus, on dispose alors d'un isomorphisme*

$$F \overline{\otimes}_{[\mathcal{D}, +]} \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \simeq \mathbf{L}_{d+1}(\Phi_*)(\Phi^* F)$$

*naturel en l'objet  $F$  de  $\mathbf{St}(\mathcal{D}, \mathbb{k})$ .*

*Démonstration.* Raisonnant par récurrence sur  $d$ , on peut supposer que l'assertion est vraie jusqu'en degré  $d-1$ . L'isomorphisme  $F \overline{\otimes}_{[\mathcal{D}, +]} \mathcal{H}_d(\Gamma_\Phi) \simeq \mathbf{L}_d(\Phi_*)\Phi^* F$  qu'elle procure montre, en utilisant l'assertion 3 de la proposition 1.29, que  $\mathcal{H}_d(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  est (stablement) constant si et seulement si  $\mathbf{L}_d(\Phi_*)\Phi^* = 0$ , de sorte qu'il suffit de vérifier l'isomorphisme naturel  $F \overline{\otimes}_{[\mathcal{D}, +]} \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \simeq \mathbf{L}_{d+1}(\Phi_*)(\Phi^* F)$ .

La nullité de  $\mathbf{L}_d(\Phi_*)\Phi^*$  (ou, pour  $d=0$ , le fait que la coïunité  $\Phi_*\Phi^* \rightarrow \text{Id}$  est un isomorphisme) montre que  $\mathbf{L}_{d+1}(\Phi_*)\Phi^*$  est un foncteur exact à droite, de sorte qu'il suffit d'exhiber un tel isomorphisme naturel pour  $F$  *projectif*. En particulier,  $F$  est à valeurs  $\mathbb{k}$ -plates, ce qui garantit, puisque  $\Gamma_\Phi$  opère trivialement sur  $\Phi^*(F)$ , un isomorphisme naturel  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \Phi^* F) \simeq F \otimes \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$ .

Examinons les suites spectrales du théorème 1.31 appliquées à  $X = \Phi^*F$  (et  $T = \mathcal{H}_q(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$ ) : on a  $E_{i,j}^{\prime 2} = 0$  pour  $0 < j \leq d$ ,  $E_{0,0}^{\prime 2} \simeq F \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_q(\mathbb{k})$ ,  $E_{i,0}^{\prime 2} = 0$  puisque  $F$  est projectif, ce qui implique que, pour  $p+q = d+1$ ,  $E_{p,q}^2$  est nul sauf pour  $p = 0$ , auquel cas il s'identifie à  $F \otimes \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$ , ou pour  $q = 0$ , auquel cas il s'identifie à  $\mathbf{L}_{d+1}\Phi_*(\Phi^*F)$ . De plus, l'hypothèse de récurrence montre que  $E_{p,q}^2 = 0$  dès lors qu'on a à la fois  $0 < p \leq d$  et  $q \leq d$ .

On en déduit que les morphismes de coin fournissent une suite exacte

$$E_{0,d+1}^2 \simeq F \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow F \otimes \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow E_{d+1,0}^2 \simeq \mathbf{L}_{d+1}\Phi_*(\Phi^*F) \rightarrow \dots$$

$$E_{0,d}^2 \simeq F \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_d(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow F \otimes \mathcal{H}_d(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$$

mais cette dernière flèche est un isomorphisme par l'hypothèse de récurrence, de sorte que cette suite exacte se réduit à la suivante

$$E_{0,d+1}^2 \simeq F \otimes_{[\mathcal{D},+]} \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow F \otimes \mathcal{H}_{d+1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \rightarrow E_{d+1,0}^2 \simeq \mathbf{L}_{d+1}\Phi_*(\Phi^*F) \rightarrow 0,$$

qui fournit exactement l'isomorphisme naturel souhaité et achève la démonstration.  $\square$

On obtient en particulier le résultat suivant, qui généralise [15, § 2.3].

**Corollaire 1.33.** *Si  $\Phi$  est  $\mathbb{k}$ -excisif pour l'homologie stable et que  $F$  est un foncteur dans  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$ , on dispose d'un isomorphisme*

$$\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; F) \simeq \mathcal{H}_\bullet(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbf{L}_\bullet\Phi_*(F)$$

si  $\mathbb{k}$  est un corps ; en général<sup>3</sup> on a une suite exacte (scindée, de façon a priori non naturelle) de Künneth

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{H}_i(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbf{L}_j\Phi_*(F) \rightarrow \mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; F) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{k}}(\mathcal{H}_i(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}), \mathbf{L}_j\Phi_*(F)) \rightarrow 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; il suffit que  $\Phi$  soit  $\mathbb{k}$ -excisif pour l'homologie stable jusqu'en degré  $n$  pour que cela soit valable.

## 2 Étude dans le cas des groupes de congruence

### 2.1 Catégories additives à dualité et objets hermitiens

On note **Add** la catégorie des petites catégories additives dont les idempotents se scindent<sup>4</sup>, les morphismes étant les foncteurs additifs. On désigne par **Add** <sub>$\mathcal{D}$</sub>  la catégorie des objets de **Add** munis d'un foncteur de dualité ; les morphismes sont les foncteurs additifs commutant au foncteur de dualité (on renvoie par exemple au début de la section 4 de [12] pour plus de précisions à ce sujet).

3. On rappelle que  $\mathbb{k}$  est supposé de dimension homologique au plus 1.

4. Cette hypothèse, utile pour définir le foncteur  $\mathbf{H} : \mathbf{Add}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{CMHS}$  ci-dessous, n'est guère restrictive (on peut remplacer une catégorie additive par son enveloppe karoubienne) ; elle pourrait être supprimée en généralisant un petit peu le cadre formel des CMHS.

On note  $\mathbf{Add}^{ps}$  (resp.  $\mathbf{Add}_D^{ps}$ ) la sous-catégorie de  $\mathbf{Add}$  (resp.  $\mathbf{Add}_D$ ) ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les foncteurs pleins et faiblement surjectifs (i.e. essentiellement surjectifs à facteur direct près).

À côté du foncteur d'oubli  $\mathbf{Add}_D \rightarrow \mathbf{Add}$ , on dispose d'un foncteur  $\mathbf{Add} \rightarrow \mathbf{Add}_D$  associant la catégorie additive  $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$  munie de la dualité échangeant les deux facteurs à la catégorie additive  $\mathcal{A}$ .

L'exemple le plus important d'objet de  $\mathbf{Add}$  (resp.  $\mathbf{Add}_D$ ) est celui de  $\mathbf{P}(A)$ , où  $A$  est un anneau (resp. un anneau à involution), catégorie des  $A$ -modules à gauche projectifs de type fini (ou, plus précisément, un choix de squelette d'icelle) — le foncteur de dualité étant  $\mathrm{Hom}_A(-, A)$  dans le cas d'un anneau à involution.

On dispose d'un foncteur  $\mathbf{H} : \mathbf{Add}_D \rightarrow \mathbf{CMHS}$  associant à une catégorie additive  $\mathcal{A}$  munie d'un foncteur de dualité  $D_{\mathcal{A}}$  la catégorie d'objets hermitiens (non dégénérés) correspondante  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  (on fixe ici  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  pour inclure aussi le cas symplectique). La catégorie  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie d'éléments  $\mathcal{A}^T$  des objets hermitiens éventuellement dégénérés, qui sera aussi parfois notée  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$  (cette notation sera plus commode pour les morphismes : tout morphisme  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\mathbf{Add}_D$  induit un morphisme fortement monoïdal  $\mathbf{HD}(\Phi) : \mathbf{HD}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{HD}(\mathcal{B})$ ). Cette catégorie est elle aussi monoïdale symétrique pour la somme hermitienne, notée  $\overset{\perp}{\oplus}$ . On rappelle que le foncteur  $T$  (qui sera noté  $T_{\mathcal{A}}$  lorsqu'une ambiguïté est possible) est donné par  $T(x) = \mathcal{A}(x, Dx)_{\mathfrak{S}_2}$ , où l'action de  $\mathfrak{S}_2$  est donnée par l'auto-dualité du foncteur contravariant  $D$ , tordue par un signe  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  fixé une fois pour toutes, le cas  $\varepsilon = -1$  permettant d'inclure les groupes symplectiques. (On suit ici les notations de la section 4 de [12]).

On dispose par ailleurs d'un foncteur  $\mathbf{Add} \rightarrow \mathbf{Add}_D$  associant à  $\mathcal{A}$  la catégorie  $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$  munie de l'échange des deux facteurs. La composée  $\mathbf{Add} \rightarrow \mathbf{Add}_D \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbf{CMHS}$  est isomorphe au foncteur  $\mathbf{S}$  associant à une catégorie additive  $\mathcal{A}$  la catégorie  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  ayant les mêmes objets et dont les morphismes  $A \rightarrow B$  sont les couples  $(u, v) \in \mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, A)$  tels que  $vu = \mathrm{Id}_A$ . Si  $A$  est un anneau (resp. un anneau à involution), on notera  $\mathbf{S}(A)$  (resp.  $\mathbf{H}(A)$ ) pour  $\mathbf{S}(\mathbf{P}(A))$  (resp.  $\mathbf{H}(\mathbf{P}(A))$ ).

Si  $\mathcal{A}$  est un objet de  $\mathbf{Add}$ ,  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie des factorisations (cf. Quillen [29])  $\mathbf{F}(\mathcal{A})$ , qui s'identifie à  $\mathbf{HD}(\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A})$ .

Si  $\mathcal{A}$  est un objet de  $\mathbf{Add}_D$ , on note  $i_{\mathcal{A}} : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{HD}(\mathcal{A})$  et  $p_{\mathcal{A}} : \mathbf{HD}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  les foncteurs d'oubli (le premier est pleinement fidèle, le second — qui est le  $\pi^{T_{\mathcal{A}}}$  de nos notations générales — fidèle). On omettra les indices lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter. On dispose d'un isomorphisme naturel d'adjonction

$$\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}}(X), F) \simeq \mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})}(X, p^*(F)) \quad (9)$$

pour  $X$  dans  $(\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}, \mathbb{k})$  et  $F$  dans  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ , où le foncteur exact  $\omega_{\mathcal{A}} : (\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{A}^{op}, \mathbb{k})$  est donné sur les objets par

$$\omega_{\mathcal{A}}(X)(V) = \bigoplus_{\xi \in T(V)} X(V, \xi)$$

(ceci est un cas particulier des considérations générales d'extensions de Kan dans des catégories d'éléments — cf. (1)).

On dispose également d'un foncteur  $o_{\mathcal{A}} : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{A})$  qui est l'oubli sur les objets et associe à une flèche  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  la flèche  $(f, \xi_A^{-1} \bar{f} \xi_B)$ , où  $\bar{f} := D(f) : D(B) \rightarrow D(A)$  et où  $\xi_A : A \rightarrow D(A)$  désigne l'isomorphisme de  $A$  (dans  $\mathcal{A}$ ) donné par la forme hermitienne (autrement dit,  $\xi_A = \lambda + \epsilon \bar{\lambda}$  où  $\lambda$  est un relèvement dans  $\mathcal{A}(A, DA)$  de l'élément de  $T(A)$  qu'est la forme sur  $A$ ). Par ailleurs on dispose d'un foncteur  $h_{\mathcal{A}} : \mathbf{S}(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{H}(\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{A})$  induit par le morphisme  $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  de  $\mathbf{Add}_D$  dont la composante  $\mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ) est le foncteur de dualité (resp. l'identité). Les objets de l'image essentielle de  $h_{\mathcal{A}}$  sont par définition les objets hermitiens hyperboliques de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ . On utilisera un peu plus loin l'endofoncteur  $H_{\mathcal{A}} := h_{\mathcal{A}} o_{\mathcal{A}}$  de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ . Là encore, les références à  $\mathcal{A}$  en indice seront omises quand cela ne peut engendrer de confusion.

Si  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme de  $\mathbf{Add}_D$ , on dispose d'un foncteur  $\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)} : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Grp}$  qui sera parfois noté  $\Gamma_{\Phi}$  pour alléger ; on obtient donc, sous les hypothèses du lemme classique suivant (laissé au lecteur), un foncteur homologique  $\mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\Phi}; -) : \mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ , dont l'étude constitue l'objet de la suite de cet article.

**Lemme 2.1.** *Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}_D^{ps}$ . Le morphisme de CMHS  $\mathbf{H}(\Phi) : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{B})$  est faiblement surjectif et stablement plein.*

Les groupes de congruence hermitiens usuels s'obtiennent lorsque  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) est de la forme  $\mathbf{P}(A)$  (resp.  $\mathbf{P}(B)$ ),  $\Phi$  étant induit par un morphisme d'anneaux à involution  $A \rightarrow B$ . Les hypothèses du lemme sont vérifiées si ce morphisme est surjectif.

En particulier, si  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme de  $\mathbf{Add}$ , on obtient un foncteur  $\Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)} : \mathbf{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Grp}$  (parfois encore noté  $\Gamma_{\Phi}$ ), et un foncteur homologique  $\mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\Phi}; -) : \mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  lorsque  $\Phi$  est plein et essentiellement surjectif à facteur direct près. Cela s'applique à tout foncteur  $\mathbf{P}(A) \rightarrow \mathbf{P}(B)$  induit par un morphisme surjectif d'anneaux  $A \rightarrow B$  ; les  $\Gamma_{\Phi}$  correspondent alors aux groupes de congruence usuels (dans les groupes linéaires).

Pour certaines des considérations ultérieures, l'hypothèse supplémentaire suivante (qu'on ne fait pas de façon systématique) sur la catégorie additive à dualité  $\mathcal{A}$  sera utile.

**Hypothèse 2.2.** Le foncteur (quadratique)  $T : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  est facteur direct d'un foncteur diagonalisable, c'est-à-dire d'un foncteur isomorphe à la précomposition par la diagonale d'un foncteur  $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  additif relativement à chaque variable.

Cette hypothèse est vérifiée dans deux cas particuliers fondamentaux :

1.  $\mathcal{A}$  appartient à l'image essentielle du foncteur  $\mathbf{Add} \rightarrow \mathbf{Add}_D$   $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$  explicité précédemment ;
2.  $T$  est à valeurs dans les  $\mathbb{Z}[1/2]$ -modules.

Cette hypothèse sera utilisée par l'intermédiaire de la proposition suivante.

**Proposition 2.3.** *Soit  $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  un foncteur additif. On a  $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{k}[A]}(\mathbb{k}[T], A) = 0$  et  $\mathrm{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathbb{k})}^i(A, \mathbb{k}^T) = 0$  pour  $i \leq 1$ . Ces annulations s'étendent à tous les degrés (co)homologiques  $i$  si l'hypothèse 2.2 est satisfaite ou que 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$ .*

*Démonstration.* Le lemme d'annulation de Pirashvili [27] implique qu'on a  $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{k}[A]}(\mathbb{k}[S], A) = 0$  et  $\mathrm{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathbb{k})}^i(A, \mathbb{k}^S) = 0$  pour tout  $i$  si  $S$  est un foncteur diagonalisable, ce qui montre d'emblée la deuxième assertion (si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$ ,  $\mathbb{k}[T]$  est facteur direct de  $\mathbb{k}[S]$  pour le foncteur  $S$  ci-après). Pour la première, on note que  $T$  est le conoyau d'un endomorphisme (donné par  $f \mapsto \bar{f} - \epsilon f$ ) du foncteur diagonalisable  $S : x \mapsto \mathcal{A}(x, Dx)$ . La conclusion découle donc du même lemme de Pirashvili ainsi que de la première assertion du lemme 2.4 ci-dessous.  $\square$

La propriété suivante (qui nous sera de nouveau utile un peu plus tard) constitue une variante du résultat de Troesch [35, Théorème 4].

**Lemme 2.4.** *Soient  $\mathcal{A}$  une petite catégorie additive et  $A : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  et  $B : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  des foncteurs additifs.*

1. *Le foncteur gradué*

$$X \mapsto \mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[A]}(\mathbb{k}[X], B)$$

*défini sur  $(\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Ab})$  est homologique.*

2. *Il existe un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[A]}(\mathbb{k}[A], B) \simeq \mathrm{Tor}_{\bullet}^A(A, B)$$

*(où l'on note par abus, dans le terme de droite,  $B$  pour l'image de ce foncteur dans  $\mathbf{A}\text{-Mod}$ , c'est-à-dire sa post-composition par le foncteur d'oubli  $\mathbb{k}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ).*

(Le membre de gauche de l'isomorphisme se calcule dans la catégorie de tous les foncteurs vers  $\mathbb{k}\text{-Mod}$ , tandis que celui de droite se calcule dans la catégorie des foncteurs additifs vers  $\mathbf{Ab}$ .)

*Démonstration.* La résolution barre et le lemme d'annulation de Pirashvili susmentionné montrent le premier point. Le deuxième s'en déduit puisqu'il se réduit au lemme de Yoneda lorsque  $A$  est projectif (dans  $\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$ ).  $\square$

Donnons maintenant quelques précisions sur les processus de stabilisation en jeu. Comme pour toute catégorie de modèles pour l'homologie stable,  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  (pour  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbf{Add}_D$ ) est munie de l'auto-action par translations à gauche pour la somme hermitienne. Quand à  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ , on la munit de l'action de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  par somme hermitienne. Cela permet d'utiliser la proposition-définition 1.9 pour obtenir des adjonctions

$$i_* : \mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) \rightleftarrows \mathbf{St}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) : i^*$$

et

$$\mathbf{Li}_* : \mathbf{D}_{st}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) \rightleftarrows \mathbf{D}_{st}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) : i^*. \quad (10)$$

*Remarque 2.5.* On pourrait aussi munir  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$  de son auto-action canonique (i.e. se placer exactement dans le cadre de [14]). Il n'est pas difficile de voir que cette autre action donne lieu à la même catégorie  $\mathbf{St}$  (car tout objet hermitien dégénéré se plonge dans un objet hermitien non dégénéré); on peut voir *a posteriori* que les notions d'objet polynomial sont stablement les mêmes (ce n'est revanche pas vrai pour les foncteurs *fortement* polynomiaux), mais l'auteur n'en connaît pas de démonstration simple (on peut voir ce résultat comme une conséquence des considérations du paragraphe suivant). Quoi qu'il en soit, la notion d'objet polynomial associée à l'action de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  est la plus adaptée dans notre contexte.

## 2.2 Comparaison de $D_{st}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ et $D_{st}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ sur des objets polynomiaux

Dans tout ce paragraphe,  $\mathcal{A}$  désigne un objet de  $\mathbf{Add}_D$  et  $\mathcal{M}$  une catégorie de Grothendieck  $\mathbb{k}$ -linéaire.

Avant de démontrer nos résultats principaux, nous avons besoin de quelques préliminaires sur les foncteurs polynomiaux.

**Notation 2.6.** Soit  $E$  un ensemble fini. On note  $T_E$  l'endofoncteur  $\mathbf{H}^{\oplus E} \oplus \text{Id}$  de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ .

Si  $I$  est une partie de  $E$ , on dispose d'une transformation naturelle  $\alpha_I : \text{Id} \rightarrow T_E$  qui sur l'objet  $V$  est le morphisme  $V \rightarrow \mathbf{H}(V)^{\oplus E} \oplus V$  dont le morphisme de  $\mathcal{A}$  sous-jacent a pour composantes l'identité  $V \rightarrow V$  et soit l'inclusion canonique  $V \hookrightarrow V \oplus DV$ , soit  $0, V \rightarrow \mathbf{H}(V)$  selon que le facteur correspondant est étiqueté par un élément de  $E$  appartenant ou non à  $I$ .

On définit l'*effet croisé hermitien* associé à  $E$  comme la transformation naturelle

$$cr_E := \sum_{I \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{|I|} \alpha_I^* : \text{Id} \rightarrow T_E^*$$

d'endofoncteurs de  $(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$ , où  $|I|$  désigne le cardinal de  $I$ .

On dispose d'une version duale de cette transformation naturelle, encore notée  $cr_E : T_E^* \rightarrow \text{Id}$ , entre endofoncteurs de  $(\mathbf{H}(\mathcal{A})^{op}, \mathcal{M})$ .

Si  $X$  (resp.  $F$ ) est un foncteur contravariant (resp. covariant) sur  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ , on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}(T_E^* X, F) & \xrightarrow{cr_E(F)^*} & \text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}(T_E^* X, T_E^* F) \\ & \searrow_{cr_E(X)^*} & \downarrow \\ & & \text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}(X, F) \end{array} \quad (11)$$

dont la flèche verticale est induite par l'endofoncteur  $T_E$  de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ .

La remarque suivante est immédiate et cruciale :  $\mathbf{H}$  ne s'étend pas en un endofoncteur de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ , mais  $\mathbf{H}(V)$  est un objet de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$  bien défini si  $V$  est un objet de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ , et donc  $T_E(V)$  également. De plus, la formule ci-avant s'étend pour définir un morphisme  $\alpha_I(V) : V \rightarrow \mathbf{H}(V)$  de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ . On dispose aussi d'une forme faible de functorialité de  $\mathbf{H}$  et de  $T_E$  sur  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$  (outre la functorialité évidente relative aux isomorphismes) : tout morphisme  $U \rightarrow V$  de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$  dont la source  $U$  appartient à  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  induit des morphismes  $\mathbf{H}(U) \rightarrow \mathbf{H}(V)$  et  $T_E(U) \rightarrow T_E(V)$ , compatibles à la composition et aux applications  $\alpha_I$  en un sens évident.

Cela nous permet d'énoncer la proposition suivante (qui s'inspire, de même que les énoncés qu'on en déduit ensuite, de Scorichenko [31] ; voir aussi [12, § 5.1] pour une utilisation dans un cadre hermitien du critère de Scorichenko), dont la vérification est immédiate.

**Proposition 2.7.** *Soit  $F$  un foncteur de  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ . Si  $E$  est un ensemble fini de cardinal au moins  $d + 1$ . Alors pour tout objet  $V$  de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ , le morphisme  $cr_E(p^* F)(V)$  est nul.*

**Notation 2.8.** Soient  $X$  un objet de  $\mathbf{D}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  et  $V$  un objet de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ . On note  $R_V(X)$  le cône (dans  $\mathbf{D}(\mathbb{k}\text{-Mod})$ ) du morphisme canonique

$$i^* P_V^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}} \otimes_{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}^{\mathbf{L}} i^* X \rightarrow P_V^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}} \otimes_{\mathbb{k}[\mathbf{HD}(\mathcal{A})]}^{\mathbf{L}} X \simeq X(V)$$

induit par le foncteur  $i : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{HD}(\mathcal{A})$ .

**Proposition 2.9.** Soient  $d \in \mathbb{N}$ ,  $V$  un objet de  $\mathbf{HD}(\mathcal{A})$ ,  $E$  un ensemble fini de cardinal  $d + 1$  et  $X$  un foncteur de  $(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  tel que  $cr_E(i^* X) = 0$  et  $cr_E(X)(V) = 0$ .

Alors le morphisme

$$R_V(X) \rightarrow R_{T_E(V)}(X)$$

induit par le morphisme canonique  $V \rightarrow T_E(V) = \mathbf{H}(V)^{\oplus E} \oplus V$  (qui n'est autre que  $\alpha_\emptyset$ ) induit 0 en homologie.

*Démonstration.* Cela vient formellement des faits suivants :

- comme  $cr_E(i^* X) = 0$ , le diagramme (11) montre que  $cr_E(i^* P_V^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}})$  induit 0 quand on applique  $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}(-, i^* X)$ ;
- l'observation de naturalité faible de  $T_E$  fournit un morphisme

$$i^* P_V^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}} \rightarrow T_E^* i^* P_{T_E(V)}^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}}$$

et la composée de celui-ci avec  $cr_E : T_E^* i^* P_{T_E(V)}^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}} \rightarrow i^* P_{T_E(V)}^{\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}}$  coïncide avec le morphisme induit par  $cr_E \in \mathbb{k}[\mathbf{HD}(\mathcal{A})(V, T_E(V))]$ ;

- si  $I \in \mathcal{P}(E)$  est non vide, le morphisme  $\alpha_I(V) \in \mathbf{HD}(\mathcal{A})(V, T_E(V))$  factorise par un objet de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  (ce fait élémentaire mais crucial se trouve par exemple dans le dernier point du lemme 5.2 de [12]), de sorte que le morphisme qu'il induit  $R_V(X) \rightarrow R_{T_E(V)}(X)$  induit 0 en homologie.  $\square$

Comme le foncteur  $i : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{HD}(\mathcal{A})$  est pleinement fidèle, il en est de même pour  $i_*$  et  $\mathbf{L}i_*$  — ce qui équivaut (dans ce dernier cas) à dire que l'unité  $\mathrm{Id} \rightarrow i^* \mathbf{L}i_*(X)$  est un isomorphisme. On rappelle que  $\mathbf{D}_{st}^\omega(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  désigne la sous-catégorie de  $\mathbf{D}_{st}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  des complexes dont l'homologie est analytique.

**Théorème 2.10.** Pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{D}_{st}^\omega(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$ , la coïtité  $\mathbf{L}i_*(i^* X) \rightarrow X$  de l'adjonction (10) est un isomorphisme.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier l'assertion lorsque  $X$  appartient à l'image essentielle de  $p^* : \mathbf{D}_{st}^\omega(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}_{st}^\omega(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  — disons  $X = p^*(F)$ ; on peut même se contenter de le faire lorsque l'homologie de  $F$  appartient à  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  pour un certain  $d \in \mathbb{N}$ . Cela provient formellement de la pleine fidélité de  $\mathbf{L}i_*$  et de ce que le corollaire 6.20 de [14] montre que la sous-catégorie triangulée de  $\mathbf{D}_{st}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  stable par sommes directes engendrée par l'image des  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  dans  $\mathbf{D}_{st}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  est exactement  $\mathbf{D}_{st}^\omega(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$ , et de ce que tous les foncteurs en jeu sont triangulés et commutent aux sommes directes.

La conclusion se déduit alors de la proposition 2.9.  $\square$

**Corollaire 2.11.** 1. L'adjonction (10) induit une équivalence entre les catégories  $\mathbf{D}_{st}^\omega(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  et  $\mathbf{D}_{st}^\omega(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$ .

2. Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $i^* : \mathcal{P}ol_d(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$  est une équivalence de catégories.

**Théorème 2.12** (Cf. [14]). Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , les foncteurs  $p^*$  et  $i^*$  induisent des équivalences de catégories

$$\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{M})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_d(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M}).$$

*Démonstration.* Le fait que  $p^*$  et  $i^*$  induisent des équivalences de catégories

$$\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{M})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_d(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})$$

découle directement des résultats précédents et du théorème 6.19 de [14].

Pour obtenir le renforcement annoncé, on utilise notre théorème 1.18 et la proposition 6.17 de [14], qui montrent qu'il suffit de vérifier l'annulation de  $\text{Ext}_{(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{M})}^i(A, C)$  pour  $i \leq 1$ ,  $A$  additif (factorisant par  $pi : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ) et  $C$  constant. Le théorème 2.10 montre qu'il suffit de vérifier l'annulation de  $\text{Ext}_{(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})}^i(A, C)$  pour  $i \leq 1$ ,  $A$  additif (factorisant par  $p : \mathbf{HD}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ) et  $C$  constant. On obtient cette annulation par adjonction (dans le cadre général des catégories d'éléments — cf. (1)) :  $\text{Ext}_{(\mathbf{HD}(\mathcal{A}), \mathcal{M})}^\bullet(A, C) \simeq \text{Ext}_{(\mathcal{A}, \mathcal{M})}^\bullet(A, C^T)$  (avec des abus de notation évidents), de sorte que la proposition 2.3 permet de conclure.  $\square$

### 2.3 Extensions de Kan dérivées associées à un foncteur additif

**Proposition 2.13.** Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  des petites catégories additives et  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif.

1. Pour tous  $i, d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{L}_i(\Phi_*) : (\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathbb{k})$  envoie  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{B}, \mathbb{k})$ .
2. Pour tout entier  $d \geq 0$ , on dispose d'un isomorphisme naturel gradué

$$cr_d^{\mathcal{B}} \circ \mathbf{L}_\bullet(\Phi_*) \simeq \mathbf{L}_\bullet(\Phi_*^{\times d}) \circ cr_d^{\mathcal{A}}$$

de foncteurs  $(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{B}^d, \mathbb{k})$ , où  $cr_d^{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{A}^d, \mathbb{k})$  désigne le  $d$ -ème effet croisé et  $\Phi_*^{\times d} : \mathcal{A}^d \rightarrow \mathcal{B}^d$  le foncteur additif  $(a_1, \dots, a_d) \mapsto (\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_d))$ .

3. Si  $\mathbb{k}$  est un corps, on dispose de la formule de Künneth suivante :

$$\mathbf{L}_n(\Phi_*)(F \otimes G) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathbf{L}_i(\Phi_*)(F) \otimes \mathbf{L}_j(\Phi_*)(G)$$

(isomorphisme monoïdal symétrique naturel en les foncteurs  $F$  et  $G$  de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ ).

4. Supposons que le foncteur  $\Phi$  appartient à  $\mathbf{Add}^{ps}$ . Alors, pour tout  $e \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (a) les foncteurs  $\mathbf{L}_i(\Phi_*) \circ \Phi^* : (\mathcal{B}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathbb{k})$  sont nuls pour  $0 < i < e$ ;

- (b) les foncteurs  $\mathbf{L}_i(\Phi_*) \circ \Phi^* : (\mathcal{B}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathbb{k})$  sont nuls sur les foncteurs additifs pour  $0 < i < e$  ;
- (c) les foncteurs  $\mathbf{L}_i(\Phi_*) \circ \Phi^* : (\mathcal{B}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathbb{k})$  sont nuls sur les foncteurs du type  $\mathbb{k}[A]$  pour  $A \in \text{Ob } \mathcal{B}\text{-Mod}$  (i.e.  $A$  additif) et  $0 < i < e$  ;
- (d) si  $A$  et  $B$  sont des objets de  $\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  respectivement, on a  $\text{Tor}_i^{\mathcal{A}}(\Phi^*(A), \Phi^*(B)) = 0$  pour  $0 < i < e$  — autrement dit, si  $\mathbf{L}_{\bullet}^{\text{add}}(\Phi_*)$  désigne le dérivé à gauche du foncteur qu'induit  $\Phi_*$  de  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  dans  $\mathcal{B}\text{-Mod}$ , c'est-à-dire du foncteur adjoint à gauche au foncteur qu'induit  $\Phi^*$  de  $\mathcal{B}\text{-Mod}$  dans  $\mathcal{A}\text{-Mod}$ , le foncteur  $\mathbf{L}_i^{\text{add}}(\Phi_*) \circ \Phi^*$  est nul sur  $\mathcal{B}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  (vu comme sous-catégorie de  $\mathcal{B}\text{-Mod}$  par le même abus qu'au lemme 2.4) pour  $0 < i < e$ . De manière générale, le morphisme canonique  $\mathbf{L}_{\bullet}^{\text{add}}(\Phi_*)(A) \rightarrow \mathbf{L}_{\bullet}(\Phi_*)(A)$  est un isomorphisme pour  $A$  dans  $\mathcal{A}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$ .

La notation  $\mathbf{L}_{\bullet}^{\text{add}}$  sera conservée dans la suite.

*Démonstration.* Les trois premières propriétés sont des conséquences aisées de l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}_{\bullet}(\Phi_*)(F)(V) \simeq \text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[A]}(\Phi^*P_V^{\mathcal{B}^{\text{op}}}, F)$$

et du fait que le foncteur  $\Phi^*P_V^{\mathcal{B}^{\text{op}}}$  est exponentiel.

L'équivalence entre (4a) et (4c) provient d'un argument formel de comparaison de foncteurs homologiques, étant donné que la coïtité  $\Phi_*\Phi^* \rightarrow \text{Id}_{(\mathcal{B}, \mathbb{k})}$  est un isomorphisme en raison de la plénitude et de la faible surjectivité de  $\Phi$ .

L'équivalence entre (4b) et (4d) se déduit du lemme 2.4.

Le fait que (4d) implique (4c) s'obtient par un argument formel à partir de l'isomorphisme naturel

$$\mathbb{k}[A] \otimes_{\mathbb{k}[A]} \mathbb{k}[B] \simeq \mathbb{k}[A \otimes_{\mathcal{A}} B]$$

(pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  respectivement) en utilisant la correspondance de Dold-Kan et une résolution projective de  $A$  ou de  $B$  (cf. la construction des foncteurs dérivés à la Dold-Puppe [17]).  $\square$

**Proposition 2.14.** *Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}_D^{\text{ps}}$ . Il existe un foncteur homologique  $\bar{\mathbf{L}}_{\bullet}^H(\Phi) : (\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  et des morphismes de foncteurs homologiques  $\bar{\mathbf{L}}_{\bullet}^H(\Phi) \rightarrow \mathbf{L}_{\bullet}(\mathbf{HD}(\Phi)_*) \circ p^* \rightarrow p^* \circ \mathbf{L}_{\bullet}(\Phi_*)$  vérifiant les propriétés suivantes.*

1. Elles s'insèrent dans une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bar{\mathbf{L}}_i^H(\Phi) \rightarrow \mathbf{L}_i(\mathbf{HD}(\Phi)_*) \circ p^* \rightarrow p^* \circ \mathbf{L}_i(\Phi_*) \rightarrow \bar{\mathbf{L}}_{i-1}^H(\Phi) \rightarrow \dots \\ \rightarrow \bar{\mathbf{L}}_0^H(\Phi) \rightarrow \mathbf{HD}(\Phi)_* \circ p^* \rightarrow p^* \circ \Phi_* \rightarrow 0 \end{aligned}$$

de foncteurs  $(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .

2. Pour tous  $i, d \in \mathbb{N}$ , la composée de  $\bar{\mathbf{L}}_i^H(\Phi) : (\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  et du foncteur canonique  $(\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  envoie  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .
3. Si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$ , ou que l'hypothèse 2.2 est satisfaite dans  $\mathcal{A}$  et dans  $\mathcal{B}$ , ce foncteur envoie même  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .

*Démonstration.* Grâce à l'isomorphisme (9), le foncteur  $\mathbf{L}_\bullet(\mathbf{HD}(\Phi)_*) \circ p^*$  est décrit par un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}_\bullet(\mathbf{HD}(\Phi)_*)(p^*F)(E) \simeq \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{k}[A]}(\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{HD}(\Phi)^*P_E^{\mathbf{HD}(\mathcal{B})^{op}}), F).$$

On constate que le foncteur  $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{HD}(\Phi)^*P_E^{\mathbf{HD}(\mathcal{B})^{op}})$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{k}[X_E]$ , où  $X_E : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  désigne le foncteur (de degré 2)

$$\Phi^*\mathcal{B}(-, E) \times_{\Phi^*T_{\mathcal{B}}} T_{\mathcal{A}},$$

le produit fibré étant relatif au morphisme  $\Phi^*\mathcal{B}(-, E) \rightarrow \Phi^*T_{\mathcal{B}}$  induit par  $\mathcal{B}(-, E) \rightarrow T_{\mathcal{B}}$  (obtenu en tirant en arrière la forme hermitienne sur  $E$ ) et  $T_{\mathcal{A}} \rightarrow \Phi^*T_{\mathcal{B}}$  induit par  $\Phi$ .

Comme  $\Phi$  est plein, le morphisme  $T_{\mathcal{A}} \rightarrow \Phi^*T_{\mathcal{B}}$  qu'il induit est surjectif, de sorte que  $X_E$  s'insère dans une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow T_{\Phi} \rightarrow X_E \rightarrow \Phi^*\mathcal{B}(-, E) \rightarrow 0$$

où  $T_{\Phi}$  désigne le noyau de  $T_{\mathcal{A}} \rightarrow \Phi^*T_{\mathcal{B}}$ . Le foncteur homologique  $\bar{\mathbf{L}}_\bullet^H(\Phi)$  est défini par

$$\bar{\mathbf{L}}_\bullet^H(\Phi)(F)(E) := \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{k}[A]}(\mathrm{Ker}(\mathbb{k}[X_E] \rightarrow \Phi^*P_{p(E)}^{\mathcal{B}^{op}}), F),$$

ce qui donne aussitôt des transformations naturelles vérifiant la première propriété.

La résolution barre montre que le foncteur  $\mathbb{k}[X_E] \rightarrow \Phi^*P_{p(E)}^{\mathcal{B}^{op}}$  est quasi-isomorphe (et ce naturellement en  $E$ ) à un complexe de chaînes de foncteurs  $(\mathbb{k}[X_E] \otimes \mathbb{k}[T_{\Phi}]^{\otimes n})_{n \geq 1}$  (où  $\mathbb{k}[-]$  désigne la partie réduite du foncteur  $\mathbb{k}[-]$ ). En utilisant derechef la résolution barre, et le fait que  $E \mapsto X_E$  est polynomial de degré 1, on obtient que l'application de  $\delta_{H_1} \dots \delta_{H_r}$  à  $E \mapsto \mathbb{k}[X_E]$  est quasi-isomorphe, naturellement et stablement en  $E$ , à un complexe dont chaque terme est un produit tensoriel de  $r$  foncteurs *réduits*, ce qui permet facilement de conclure en utilisant le lemme d'annulation de Pirashvili et la proposition 2.3 (ainsi que la première partie du lemme 2.4 qui montre que l'annulation de la proposition 2.3 vaut en remplaçant  $T$  par  $T_{\Phi}$ ).  $\square$

*Remarque 2.15.* Si le foncteur  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  possède une section, la démonstration précédente se simplifie;  $\bar{\mathbf{L}}_\bullet^H(\Phi)$  est alors facteur direct de  $\mathbf{L}_\bullet(\mathbf{HD}(\Phi)_*) \circ p^*$  et se factorise par  $p^* : (\mathcal{B}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{HD}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .

Le corollaire 1.33 et la proposition 2.14 donnent des renseignements précis (donnant la possibilité de faire des calculs sur des foncteurs raisonnables) sur l'homologie stable des groupes de congruence à coefficients polynomiaux dans le cas excisif (qui sera caractérisé dans le théorème 2.29), à partir de l'homologie stable des mêmes groupes à coefficients constants.

**Théorème 2.16.** *Soient  $d \in \mathbb{N}$  et  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}_D^{ps}$ .*

1. *Le foncteur homologique  $\mathbf{L}_\bullet\mathbf{H}(\Phi)_* : \mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  envoie  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .*

2. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{A}, \mathbb{k}) & \longrightarrow & \mathcal{P}ol_d(\mathcal{B}, \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{B}, \mathbb{k}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) & \longrightarrow & \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) \end{array}$$

commute (à isomorphisme canonique près), où les flèches verticales sont les équivalences induites par  $\pi$  d'après le théorème 2.12 et les flèches horizontales sont induites par  $\mathbf{L}_\bullet(\Phi_*)$  et  $\mathbf{L}_\bullet\mathbf{H}(\Phi)_*$ .

3. Si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$  ou que l'hypothèse 2.2 est satisfaite dans  $\mathcal{A}$  et dans  $\mathcal{B}$ , on a même la commutation du diagramme analogue

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathcal{A}, \mathbb{k}) & \longrightarrow & \mathcal{P}ol_d(\mathcal{B}, \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathcal{B}, \mathbb{k}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) & \longrightarrow & \mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d-2}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) \end{array} .$$

*Démonstration.* Combiner les théorèmes 2.10, 2.12 et la proposition 2.14.  $\square$

## 2.4 Étude des produits tensoriels sur les foncteurs polynomiaux

Soit  $\mathcal{A}$  une petite catégorie additive à dualité. Si  $F$  est un foncteur défini sur  $\mathcal{A}$ , on notera  $F^\vee$  la précomposition par le foncteur de dualité  $D : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ .

**Notation 2.17.** Soient  $F$  et  $G$  des foncteurs dans  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ . On note  $F \otimes_{(\mathcal{A}, \tau)} G$  le foncteur de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  défini par

$$(F \otimes_{(\mathcal{A}, \tau)} G)(x) := \tau_x(F)^\vee \otimes_{\mathbb{k}[\mathcal{A}]} \tau_x(G)$$

et, plus généralement, pour  $i \in \mathbb{N}$ , on définit un foncteur  $\mathrm{Tor}_i^{(\mathcal{A}, \tau)}(F, G)$  par

$$\mathrm{Tor}_i^{(\mathcal{A}, \tau)}(F, G)(x) := \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{A}}(\tau_x(F)^\vee, \tau_x(G)).$$

Cette construction se remonte aux catégories dérivées, fournissant un foncteur

$$- \otimes_{(\mathcal{A}, \tau)}^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \times \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathbb{k}).$$

Le foncteur  $\otimes_{(\mathcal{A}, \tau)}$  définit une structure monoïdale symétrique sur  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  (par auto-adjonction du foncteur  $D$ ) et les produits tensoriels (dérivés) possèdent les mêmes propriétés formelles (commutation aux colimites filtrantes, bifoncteur homologique en chaque variable...) que les produits tensoriels usuels (dérivés), du fait que les foncteurs de translation préservent les objets projectifs de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .

Les projections naturellement scindées  $\tau_x(F)^\vee \rightarrow F(x)$  et  $\tau_x(G) \rightarrow G(x)$  (où les buts sont vus comme foncteurs constants) induisent des transformations naturelles

$$\otimes_{(\mathcal{A}, \tau)} \rightarrow \otimes, \quad \mathrm{Tor}_i^{(\mathcal{A}, \tau)} \rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{k}}$$

de foncteurs  $(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \times (\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathcal{A}, \mathbb{k})$  et

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} \\ \otimes \\ (\mathcal{A}, \tau) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{L} \\ \otimes \\ \mathbb{k} \end{array}$$

de foncteurs  $\mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \times \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  qui sont des épimorphismes scindés dont les noyaux seront notés respectivement

$$\begin{array}{c} \bar{\otimes} \\ (\mathcal{A}, \tau) \end{array}, \quad \overline{\mathrm{Tor}}_i^{(\mathcal{A}, \tau)}, \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \mathbf{L} \\ \bar{\otimes} \\ (\mathcal{A}, \tau) \end{array}.$$

Le résultat suivant est immédiat.

**Lemme 2.18.** *Soient  $i, a, b \in \mathbb{N}$  et  $F, G$  des foncteurs de  $\mathcal{P}ol_a(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  et  $\mathcal{P}ol_b(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  respectivement. Alors  $\mathrm{Tor}_i^{(\mathcal{A}, \tau)}(F, G)$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{a+b}(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  tandis que  $\overline{\mathrm{Tor}}_i^{(\mathcal{A}, \tau)}(F, G)$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{a+b-2}(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .*

**Notation 2.19.** Si  $x$  est un objet de  $\mathcal{A}$ , on note  $d_x$  l'endofoncteur  $-\bar{\otimes}_{(\mathcal{A}, \tau)}(\mathbb{k} \otimes \mathcal{A}(Dx, -))$  de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .

On dispose donc d'isomorphismes canoniques

$$d_x(F)(t) \simeq (\mathbb{k} \otimes \mathcal{A}(-, x)) \otimes_{\mathbb{k}[\mathcal{A}]} \tau_t(F) \simeq (\mathbb{k} \otimes \mathcal{A}(-, x)) \otimes_{\mathbb{k}[\mathcal{A}]} (F \oplus cr_2(F))(t, -). \quad (12)$$

Ici, comme dans toute la suite de ce paragraphe, les effets croisés  $cr$  ont la signification usuelle issue d'Eilenberg-Mac Lane [18, chapitre II] (et non celle du § 2.2).

On notera  $\bar{d}_x$  l'endofoncteur  $F \mapsto (t \mapsto (\mathbb{k} \otimes \mathcal{A}(-, x)) \otimes_{\mathbb{k}[\mathcal{A}]} cr_2(F)(t, -))$  de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ ; ainsi  $\bar{d}_x(F)$  s'identifie à la partie réduite de  $d_x(F)$ , tandis que son terme constant s'identifie à l'évaluation en  $x$  du plus grand quotient additif de  $F$ .

Cette construction possède une functorialité en  $\mathcal{A}$  : si  $\Xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme de  $\mathbf{Add}_D$ ,  $F$  un objet de  $(\mathcal{B}, \mathbb{k})$  et  $x$  un objet de  $\mathcal{A}$ , on dispose d'un morphisme naturel

$$d_x(\Xi^* F) \rightarrow \Xi^* d_{\Xi(x)}(F) \quad (13)$$

dans  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .

**Proposition 2.20.** *1. Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , il existe une suite exacte*

$$(\delta_x)^2 \rightarrow \delta_x \rightarrow d_x \rightarrow 0$$

*d'endofoncteurs de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .*

*2. Soient  $F$  un foncteur polynomial de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  polynomial et  $d \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $d_x(F)$  est de degré au plus  $d-1$  pour tout  $x \in \mathrm{Ob} \mathcal{A}$ . Alors  $F$  appartient à  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .*

*3. Si  $F$  appartient à  $\mathcal{P}ol_2(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ , alors on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\bar{d}_x(F)(t) \simeq cr_2(F)(x, t).$$

*4. Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , le foncteur  $d_x$  est une dérivation au sens où l'on dispose d'un isomorphisme*

$$d_x(F \otimes_{\mathbb{k}} G) \simeq (d_x(F) \otimes_{\mathbb{k}} G) \oplus (F \otimes_{\mathbb{k}} d_x(G))$$

*naturel et monoïdal symétrique en les objets  $F$  et  $G$  de  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ .*

*Démonstration.* Le premier point résulte de (12) et de la suite exacte classique

$$\bar{\mathbb{k}}[\mathcal{A}(-, x)]^{\otimes 2} \rightarrow \bar{\mathbb{k}}[\mathcal{A}(-, x)] \rightarrow \mathcal{A}(-, x) \otimes \mathbb{k} \rightarrow 0 \quad (14)$$

de  $(\mathcal{A}^{op}, \mathbb{k})$ . Le deuxième s'en déduit aussitôt. Le troisième provient directement de (12) et de ce que  $\mathbb{k} \otimes \mathcal{A}(-, x)$  est le plus grand quotient additif de  $\mathbb{k}[\mathcal{A}(-, x)]$  (ce qu'indique aussi (14)).

L'assertion 4 se déduit directement de la définition de  $d_x$  et du lemme d'annulation de Pirashvili.  $\square$

*Remarque 2.21.* Les foncteurs  $d_x$  sont des variantes des foncteurs considérés dans [11, §3].

Avant d'utiliser le produit tensoriel  $- \otimes_{(\mathcal{A}, \tau)} -$  (dont les foncteurs  $d_x$  constituent le cas particulier le plus important), nous aurons besoin du résultat général suivant.

**Lemme 2.22.** *Soient  $\mathcal{A}$  un objet de  $\mathbf{Add}_D$ ,  $\mathcal{C}$  la catégorie des factorisations associée à  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  (ainsi, les objets de  $\mathcal{C}$  sont les triplets  $(x, t, f)$  constitués d'objets  $x$  et  $t$  de  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  et d'un morphisme  $f \in \mathbf{H}(\mathcal{A})(x, t)$ ),  $\mathfrak{c} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  le foncteur composé de  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{A}) \quad (x, t, f) \mapsto x - t$  et du foncteur d'oubli  $\mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  et  $\mathfrak{i} :$*

*$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  le foncteur composé de  $(x, t, f) \mapsto x$  et du même foncteur d'oubli,  $\mathfrak{r} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  le foncteur composé de  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{A})^{op} \quad (x, t, f) \mapsto t$ , de l'oubli  $\mathbf{H}(\mathcal{A})^{op} \rightarrow \mathcal{A}^{op}$  et du foncteur de dualité  $D : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ . On dispose ainsi d'une transformation naturelle canonique  $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{i}$ . Si  $F$  est un foncteur dans  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ , le foncteur  $\mathfrak{c}^*F$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{k})$  est naturellement quasi-isomorphe à un complexe de cochaînes*

$$\left( (\mathfrak{r}, \dots, \mathfrak{r})^* cr_n(F) \oplus (\mathfrak{i}, \mathfrak{r}, \dots, \mathfrak{r})^* cr_{n+1}(F) \right)_{n \geq 0}$$

*et le conoyau du morphisme canonique  $\mathfrak{c}^*F \rightarrow \mathfrak{i}^*F$  est naturellement quasi-isomorphe à un complexe de cochaînes*

$$\left( (\mathfrak{r}, \dots, \mathfrak{r})^* cr_{i+1}(F) \oplus (\mathfrak{i}, \mathfrak{r}, \dots, \mathfrak{r})^* cr_{i+2}(F) \right)_{i \geq 0}.$$

*Démonstration.* Évaluée sur un objet  $(x, t, f)$ , la transformation naturelle canonique  $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{i}$  est le monomorphisme scindé  $x - t \rightarrow x$  de  $\mathcal{A}$  isomorphe à  $x - t \rightarrow t \oplus (x - t)$ . En utilisant les décompositions canoniques  $F(x) \simeq cr_0(F) \oplus cr_1(F)(x)$  et  $F(x) \simeq F(t \oplus (x - t)) \simeq cr_0(F) \oplus cr_1(F)(x - t) \oplus cr_1(F)(t) \oplus cr_2(F)(x - t, t)$ , on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow F(x - t) \rightarrow cr_0(F) \oplus cr_1(F)(x) \rightarrow cr_1(F)(t) \oplus cr_2(F)(x - t, t) \rightarrow 0.$$

En utilisant l'isomorphisme (de  $\mathcal{A}$ )  $t \simeq Dt$  donné par la forme hermitienne sur  $t$  et le morphisme canonique  $x - t \rightarrow t$ , on déduit de cette suite exacte courte une suite exacte

$$0 \rightarrow F(x - t) \rightarrow cr_0(F) \oplus cr_1(F)(x) \rightarrow cr_1(F)(Dt) \oplus cr_2(F)(x, Dt)$$

où le conoyau de la dernière flèche s'identifie à

$$cr_2(F)(x, Dt) / cr_2(F)(x - t, Dt) \simeq cr_2(F)(t, Dt) \oplus cr_3(F)(x - t, t, Dt);$$

une récurrence immédiate permet de poursuivre pour obtenir une suite exacte

$$0 \rightarrow F(x \underset{f}{-} t) \rightarrow$$

$$cr_0(F) \oplus cr_1(F)(x) \rightarrow cr_1(F)(Dt) \oplus cr_2(F)(x, Dt) \rightarrow cr_2(F)(Dt, Dt) \oplus cr_3(F)(x, Dt, Dt) \rightarrow \dots$$

dont la deuxième ligne est exactement l'évaluation en  $(x, t, f)$  du complexe de cochaînes de l'énoncé (la naturalité est immédiate). De plus, le monomorphisme canonique  $F(x \underset{f}{-} t) \rightarrow F(x)$  s'identifie via ce quasi-isomorphisme à la troncature au-delà terme de degré 0,  $cr_0(F) \oplus cr_1(F)(x) \simeq F(x)$ , ce qui permet d'en déduire le deuxième quasi-isomorphisme annoncé.  $\square$

On en déduit aussitôt :

**Lemme 2.23.** *Soient  $\mathcal{A}$  un objet de  $\mathbf{Add}_D$ ,  $F$  un foncteur dans  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ . Le  $\mathbb{k}$ -module  $\omega_t^{\mathbf{H}(\mathcal{A})}((pi)^*F)(x)$  (resp. le conoyau du morphisme naturel  $\omega_t^{\mathbf{H}(\mathcal{A})}((pi)^*F)(x) \rightarrow \mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})](t, x) \otimes ((pi)^*F)(x)$ ) est quasi-isomorphe à un complexe de cochaînes*

$$(\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})](t, x) \otimes (cr_n(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{n+1}(F)(x, Dt, \dots, Dt)))_{n \geq 0}$$

$$(resp. (\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})](t, x) \otimes (cr_{i+1}(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{i+2}(F)(x, Dt, \dots, Dt)))_{i \geq 0})$$

naturellement en  $t \in \text{Ob } \mathbf{H}(\mathcal{A})^{op}$  et  $x \in \text{Ob } \mathbf{H}(\mathcal{A})$ .

**Théorème 2.24.** *Soient  $\mathcal{A}$  un objet de  $\mathbf{Add}_D$  et  $a, b, i$  des entiers naturels.*

1. *Le foncteur  $\text{Tor}_i^{\mathbf{H}(\mathcal{A}), \oplus}$  envoie  $\mathcal{P}ol_a(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) \times \mathcal{P}ol_b(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_{a+b}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ .*
2. *Le foncteur  $\overline{\text{Tor}}_i^{\mathbf{H}(\mathcal{A}), \oplus}$  envoie  $\mathcal{P}ol_a(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k}) \times \mathcal{P}ol_b(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_{a+b-2}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ .*
3. *Si  $F$  et  $G$  sont des foncteurs de  $\mathcal{P}ol_a(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  et  $\mathcal{P}ol_b(\mathcal{A}, \mathbb{k})$  respectivement, alors il existe un morphisme naturel*

$$\overline{\text{Tor}}_i^{\mathbf{H}(\mathcal{A}), \oplus}((pi)^*F, (pi)^*G) \rightarrow (pi)^*\overline{\text{Tor}}_i^{(\mathcal{A}, \tau)}(F, G)$$

dont noyau et conoyau appartiennent à  $\mathcal{P}ol_{a+b-4}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ .

*Démonstration.* Le théorème 2.12 montre qu'il suffit de montrer la dernière assertion. Pour ce faire, on part de l'isomorphisme canonique

$$\overline{\text{Tor}}_{\bullet}^{\mathbf{H}(\mathcal{A}), \oplus}((pi)^*F, (pi)^*G)(x) \simeq$$

$$\text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}(\text{Coker}(\omega_t^{\mathbf{H}(\mathcal{A})}((pi)^*F)(x) \rightarrow \mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})](t, x) \otimes ((pi)^*F)(x)), (pi)^*G)$$

qui est isomorphe par le lemme 2.23 à l'homologie du complexe

$$C_{\bullet}(F, x, -) \underset{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}{\overset{\mathbf{L}}{\otimes}} (pi)^*G$$

où  $C_{\bullet}(F, x, t)$  est un complexe de chaînes tel que

$$C_i(F, x, t) = \mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})](t, x) \otimes (cr_{-i+1}(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{-i+2}(F)(x, Dt, \dots, Dt))$$

concentré en degrés  $i \leq 0$ . Par conséquent, on dispose d'une suite spectrale d'hyperhomologie

$$E_{r,s}^1 = \mathrm{Tor}_s^{\mathbb{k}[\mathbf{H}(\mathcal{A})]}(C_r(F, x, -), (pi)^*G) \Rightarrow \overline{\mathrm{Tor}}_{r+s}^{[\mathbf{H}(\mathcal{A}), \oplus]}((pi)^*F, (pi)^*G)(x)$$

(où  $E_{r,s}^1$  est nul sauf si  $\leq 0$ ; la différentielle  $d^n$  est de bidegré  $(-n, n-1)$ ). Comme  $F$  est polynomial, le complexe  $C_\bullet(F, x, t)$  est borné, de sorte qu'il n'y a pas de problème de convergence, contrairement à ce qui arriverait sans cette hypothèse de polynomialité.

On note que  $C_r(F, x, -)$  s'identifie à la restriction à  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  du foncteur de  $(\mathbf{HD}(\mathcal{A})^{op}, \mathbb{k})$  donné par

$$t \mapsto \mathbb{k}[\mathbf{HD}(\mathcal{A})(t, x)] \otimes (cr_{-r+1}(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{-r+2}(F)(x, Dt, \dots, Dt)),$$

de sorte que la polynomialité de  $G$  et le théorème 2.10, combinés à l'isomorphisme d'adjonction (9), donnent un isomorphisme naturel

$$E_{r,s}^1 \simeq \mathrm{Tor}_s^{\mathbb{k}[\mathcal{A}]}(t \mapsto \mathbb{k}[\mathcal{A}(t, x)] \otimes (cr_{-r+1}(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{-r+2}(F)(x, Dt, \dots, Dt)), G)$$

stablement en  $x$ ; le terme de droite s'identifie à

$$\mathrm{Tor}_s^{\mathbb{k}[\mathcal{A}]}(t \mapsto (cr_{-r+1}(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{-r+2}(F)(x, Dt, \dots, Dt)), \tau_x(G))$$

qui pour  $r = 0$  se réduit à  $\overline{\mathrm{Tor}}_s^{(\mathcal{A}, \tau)}(F, G)(x)$

Par adjonction somme/diagonale, on a en général

$$\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{k}[\mathcal{A}]}(t \mapsto (cr_n(F)(Dt, \dots, Dt) \oplus cr_{n+1}(F)(x, Dt, \dots, Dt)), \tau_x(G)) \simeq$$

$$\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{k}[\mathcal{A}^n]}(cr_n(F^\vee) \oplus cr_{n+1}(F)(x, -)^\vee, (t_1, \dots, t_d) \mapsto G(x \oplus t_1 \oplus \dots \oplus t_n))$$

$$\simeq \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{k}[\mathcal{A}^n]}(cr_n(F^\vee) \oplus cr_{n+1}(F)(x, -)^\vee, cr_n(G) \oplus cr_{n+1}(G)(x, -))$$

qui est polynomial de degré au plus  $a + b - 4$  en  $x$  lorsque  $n \geq 2$ , d'où la conclusion.  $\square$

*Remarque 2.25.* En utilisant la comparaison des foncteurs polynomiaux sur  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}$  [14, théorème 6.17], on voit facilement qu'on dispose stablement d'un isomorphisme naturel

$$F \underset{[\mathbf{H}(\mathcal{A}), \oplus]}{\widetilde{\otimes}} G \simeq \tilde{F} \otimes \tilde{G}$$

lorsque  $F$  et  $G$  sont des foncteurs polynomiaux (ou analytiques) sur  $\mathbf{H}(\mathcal{A})$  (noter que cet isomorphisme vit en fait dans  $(\mathcal{A}, \mathbb{k})$ ). Cependant, il paraît difficile d'utiliser la même voie pour étudier précisément sur les  $\mathrm{Tor}^{[\mathbf{H}(\mathcal{A}), +]}$  de degré supérieur.

## 2.5 Homologie des groupes de congruence

On commence par montrer que l'homologie (en chaque degré) des groupes de congruence définit des foncteurs faiblement polynomiaux. On utilise à cet effet la notion de *donnée triangulaire* introduite dans la définition 1.15. Signalons que

les résultats antérieurs de polynomialité de cette homologie reposant sur des méthodes de stabilité homologique [28, 6, 5, 7] conduisent à de la polynomialité forte ([7] donne une meilleure borne sur le degré faible que celle donnée par le degré fort, mais sans s'affranchir d'une hypothèse de rang stable de Bass fini qui garantit la polynomialité forte).

**Lemme 2.26.** *Soient  $\mathcal{A}$  une petite catégorie additive et  $V$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Alors les formules  $T_V^s(A) = \mathcal{A}(A, V) \simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \text{Aut}_{\mathcal{A}}(V \oplus A) \simeq \tau_V \text{Aut}_{\mathbf{S}(\mathcal{A})}(A)$  et  $T_V^i(A) = \mathcal{A}(V, A) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \subset \text{Aut}_{\mathcal{A}}(V \oplus A)$  définissent des sous-foncteurs  $T_V^s$  et  $T_V^i$  de  $\tau_V \text{Aut}_{\mathbf{S}(\mathcal{A})} : \mathbf{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Grp}$  (où les functorialités en  $V$  s'entendent via les foncteurs canoniques  $\mathbf{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}^{op}$  et  $\mathbf{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ).*

*De plus, l'ensemble  $\{T_V^s, T_V^i\}$  est une donnée triangulaire en  $V$  sur  $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ .*

*Démonstration.* La première assertion est évidente.

La seconde résulte du calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans  $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(V \oplus V)$ . □

**Théorème 2.27.** *Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}^{ps}$ . Pour tout entier  $n$ , l'objet  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k})$  (où l'on note  $\Gamma_{\Phi}$  pour  $\Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)}$ ) de  $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2n}(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ . Plus généralement, pour  $X$  dans  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{S}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ ,  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\Phi}; X)$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2n+d}(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$  selon le schéma suivant : notant  $(H_n)$  l'assertion selon laquelle  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k})$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2n}(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  pour tout  $m < n$  et  $(H'_m)$  celle que  $\mathcal{H}_m(\Gamma_{\Phi}; X)$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2m+d}(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  pour tout  $m < n$ , tout  $d \in \mathbb{N}$  et tout  $X$  de  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{S}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ , on établit les implications

$$(H_n) \Rightarrow (H'_n) \Rightarrow (H_{n+1}).$$

Le fait que  $(H_n)$  entraîne  $(H'_n)$  découle directement des théorèmes 1.31, 2.16 et 2.24.

Supposons  $(H'_n)$  vérifiée et montrons que  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k})$  est de degré au plus  $2n$ . On utilise pour cela la proposition 1.16 avec la donnée triangulaire du lemme 2.26 et  $G = \Gamma_{\Phi}$ . On définit  $T_{V, \Phi}^s(A) := \text{Ker}(\mathcal{A}(A, V) \rightarrow \mathcal{B}(\Phi(A), \Phi(V)))$  (morphisme induit par  $\Phi$ ;  $T_{V, \Phi}^s$  est une abréviation pour  $(T_V^s)_{\Gamma_{\Phi}}$ ) et de même  $T_{V, \Phi}^i(A) := \text{Ker}(\mathcal{A}(V, A) \rightarrow \mathcal{B}(\Phi(V), \Phi(A)))$ . On vérifie aussitôt les trois premières hypothèses sur ces foncteurs requises dans la proposition 1.16, tandis que la quatrième, pour  $d = 2n - 1$  provient de ce que  $H_j(T_{V, \Phi}^s; \mathbb{k})$  et  $H_j(T_{V, \Phi}^i; \mathbb{k})$  sont des foncteurs polynomiaux de degré au plus  $j$ , puisque  $T_{V, \Phi}^s$  et  $T_{V, \Phi}^i$  prennent leurs valeurs dans les groupes abéliens. Il suffit donc d'appliquer la proposition 1.17 pour conclure. □

On déduit maintenant de ce résultat la généralisation hermitienne suivante<sup>5</sup> :

---

5. Il serait naturel de démontrer directement ce résultat, mais les notions de donnée et d'extension triangulaires que nous avons introduites en 1.15 ne semblent pas le permettre si facilement.

**Théorème 2.28.** *Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}_D^{ps}$ . Pour tout entier  $n$ , l'objet  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$  de  $\mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2n}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ . Plus généralement, pour  $X$  dans  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ ,  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\Phi}; X)$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2n+d}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'établir l'assertion à coefficients dans  $\mathbb{k}$ , dont la seconde se déduit exactement comme dans la démonstration précédente.

Les foncteurs  $o_{\mathcal{A}} : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{A})$  et  $h_{\mathcal{A}} : \mathbf{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{A})$  (et leurs analogues sur  $\mathcal{B}$ ) introduits au § 2.1 induisent des transformations naturelles

$$\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)} \rightarrow o_{\mathcal{A}}^* \Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)} \rightarrow o_{\mathcal{A}}^* h_{\mathcal{A}}^* \Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)},$$

d'où dans  $\mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  des applications graduées

$$\mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k}) \rightarrow o_{\mathcal{B}}^* \mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)}; \mathbb{k}) \rightarrow o_{\mathcal{B}}^* h_{\mathcal{B}}^* \mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$$

dont la composée est induite par les morphismes

$$\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}(E) \rightarrow \Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}(E \oplus DE) \quad f \mapsto f \oplus \bar{f}^{-1},$$

qui sont isomorphes, en utilisant l'isomorphisme  $E \simeq DE$  donné par la forme hermitienne, à

$$\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}(E) \rightarrow \Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}(E \oplus E) \quad f \mapsto f \oplus f.$$

Raisonnant par récurrence sur le degré homologique  $n$  (on suppose donc  $\mathcal{H}_i(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)})$  de degré au plus  $2i$  pour  $i < n$ ) et utilisant le théorème 2.27 et la formule de Künneth, on voit que la transformation naturelle  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}) \xrightarrow{i_*^1 + i_*^2} \mathcal{H}_n(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}) \circ (E \mapsto E \overset{\perp}{\oplus} E)$ , où  $i^1$  et  $i^2$  sont les deux inclusions canoniques  $E \mapsto E \overset{\perp}{\oplus} E$ , se factorise par  $o_{\mathcal{B}}^* \mathcal{H}_n(\Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)}; \mathbb{k}) \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_{2n}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  dans la catégorie  $\mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_{2n-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ , ce dont on déduit le résultat par une variante de la proposition 1.14.  $\square$

**Théorème 2.29.** *Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}_D^{ps}$ . Notons  $e$  la borne inférieure dans  $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$  des entiers  $i > 0$  tels que  $\mathbf{L}_i^{add}(\Phi_*) \circ \Phi^*$  soit non nul sur  $\mathcal{B}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$ , avec les notations de la proposition 2.13. Alors  $\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}$  est  $\mathbb{k}$ -excisif en degrés  $< e$ .*

*Si  $e$  est fini,  $\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}$  n'est pas  $\mathbb{k}$ -excisif en degré  $e$ ; de plus,  $\mathcal{H}_e(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$  est polynomial de degré 2, et son image dans  $\mathcal{P}ol_2(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_1(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) \simeq \mathcal{P}ol_2(\mathcal{B}, \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_1(\mathcal{B}, \mathbb{k})$  — et même dans  $\mathcal{P}ol_2(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_0(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) \simeq \mathcal{P}ol_2(\mathcal{B}, \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_0(\mathcal{B}, \mathbb{k})$  si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$  ou que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  vérifient l'hypothèse 2.2 — (cf. théorème 2.12) est isomorphe à*

$$V \mapsto \text{Tor}_e^{\mathcal{A}}(\Phi^* \mathcal{B}(-, V), \mathbb{k} \otimes \Phi^* \mathcal{B}(DV, -))_{\mathfrak{S}_2},$$

où l'action de  $\mathfrak{S}_2$  est induite par l'auto-adjonction du foncteur de dualité  $D$ .

*Démonstration.* Ce résultat se déduit des propositions 1.32, 2.13, 2.14 et 2.20 (et de la formule (12)) ainsi que des théorèmes 2.24 et 2.28.  $\square$

En particulier :

**Théorème 2.30.** Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}^{ps}$ . Notons  $e$  la borne inférieure dans  $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$  des entiers  $i > 0$  tels que  $\mathbf{L}_i^{add}(\Phi_*) \circ \Phi^*$  soit non nul sur  $\mathcal{B}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  (avec les notations de la proposition 2.13). Alors  $\Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)}$  est  $\mathbb{k}$ -excisif en degrés  $< e$ .

Si  $e$  est fini,  $\Gamma_{\mathbf{S}(\Phi)}$  n'est pas  $\mathbb{k}$ -excisif en degré  $e$ ; de plus,  $\mathcal{H}_e(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k})$  est polynomial de degré 2, et son image dans  $\mathcal{P}ol_2(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_0(\mathbf{S}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) \simeq \mathcal{P}ol_2(\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{B}, \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_0(\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{B}, \mathbb{k})$  (cf. théorème 2.12) est isomorphe à

$$(U, V) \mapsto \mathrm{Tor}_e^A(\Phi^* \mathcal{B}(-, V), \mathbb{k} \otimes \Phi^* \mathcal{B}(U, -)).$$

**Corollaire 2.31** (Suslin [33]). Soient  $A$  un anneau et  $I$  un idéal bilatère de  $A$ . Notons  $e$  la borne inférieure dans  $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$  des entiers  $i > 0$  tels que  $\mathrm{Tor}_i^A(A/I, \mathbb{k} \otimes A/I)$  soit non nul. Alors l'anneau sans unité  $I$  est  $\mathbb{k}$ -excisif pour la  $K$ -théorie algébrique jusqu'en degrés  $< e$ ; de plus, on dispose d'un isomorphisme

$$H_e(\mathrm{Ker}(GL_n(A) \rightarrow GL_n(A/I)); \mathbb{k}) \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathrm{Tor}_e^A(A/I, \mathbb{k} \otimes A/I))$$

dans  $\mathcal{P}ol_2(\mathbf{S}(A/I), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_0(\mathbf{S}(A/I), \mathbb{k})$ .

Poussons maintenant l'examen de l'homologie stable de nos groupes de type congruence au-delà du premier degré non excisif :

**Proposition 2.32.** Soient  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Add}_D^{ps}$  et  $e \in \mathbf{N}^*$ . On suppose que  $\mathbf{L}_i^{add} \Phi_* \Phi^*$  est nul sur  $\mathcal{B}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  pour  $0 < i < e$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k})$  est de degré au plus  $2 \lfloor \frac{n}{e} \rfloor$  (où les crochets indiquent la partie entière). De plus, si  $n = me$  et que  $F$  est un objet de  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ , on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k}) \underset{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \overset{\perp}{\oplus}]}{\otimes} F \simeq \mathcal{H}_{(m-1)e}(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k}) \otimes \mathbf{L}_e(\mathbf{H}(\Phi)_*) \mathbf{H}(\Phi)^*(F)$$

dans  $\mathcal{P}ol_{d+2m-2}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{d+2m-4}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .

*Démonstration.* On pose  $m = \lfloor \frac{n}{e} \rfloor$ . Par récurrence, on peut supposer que  $\mathcal{H}_N(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k})$  est de degré au plus  $2 \lfloor \frac{N}{e} \rfloor$  pour  $N < n$ . On examine alors les suites spectrales du théorème 1.31 (associées à  $\mathbf{H}(\Phi)$  et au foncteur  $X = \mathbf{H}(\Phi)^* F$ ) modulo  $\mathcal{P}ol_{d+2m-4}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .

L'hypothèse d'excisivité en degrés  $< e$  montre qu'on dispose d'isomorphismes  $E_{p,q}^2 \simeq \mathrm{Tor}_p^{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \overset{\perp}{\oplus}]}(F, \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k}))$  pour  $p < e$ . Si on a également  $q < n$ , l'hypothèse de récurrence et le théorème 2.24 montrent que le noyau et le conoyau du morphisme canonique  $E_{p,q}^2 \rightarrow \mathrm{Tor}_p^{\mathbb{k}}(F, \mathcal{H}_q(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k}))$  sont de degré au plus  $2 \lfloor \frac{q}{e} \rfloor + d - 2$ , qui est toujours inférieur à  $2m + d - 2$ , et même à  $2m + d - 4$  si  $n$  est multiple de  $e$ .

Quant aux termes  $E_{p,q}^2$  pour  $p \geq e$  et  $p + q = n$ , l'hypothèse de récurrence et les théorèmes 2.16 et 2.24 (ainsi que la suite spectrale  $E'$  qui aboutit à ces termes) montrent qu'ils sont de degré au plus  $2 \lfloor \frac{q}{e} \rfloor + d \leq 2 \lfloor \frac{n-e}{e} \rfloor + d = 2m + d - 2$ . Ils sont même de degré au plus  $2m + d - 4$  si  $n$  est multiple de  $e$  et  $p > e$ , car on a alors  $\lfloor \frac{q}{e} \rfloor = m - 2$ , tandis que pour  $p = e$  (toujours en supposant  $n$  multiple de  $e$ ), les termes  $E_{i,j}^2$  pour lesquels  $i + j = e$  ne peuvent être non nuls que pour  $i = 0$ , auquel cas il est isomorphe à  $\mathcal{H}_{(m-1)e}(\Gamma_{\Phi}; \mathbb{k}) \underset{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \overset{\perp}{\oplus}]}{\otimes} \mathbf{L}_e(\mathbf{H}(\Phi)_*) \mathbf{H}(\Phi)^*(F)$ ,

qui est lui-même isomorphe modulo  $\mathcal{P}ol_{d+2m-4}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  à  $\mathcal{H}_{(m-1)e}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \otimes \mathbf{L}_e(\mathbf{H}(\Phi)_*)\mathbf{H}(\Phi)^*(F)$  (en utilisant toujours le théorème 2.24).

En conclusion, les termes  $E_{p,q}^2$  tels que  $p+q=n$  sont tous de degré au plus  $2m+d-2$ , sauf  $E_{0,n}^2$ , qui donne lieu au morphisme de coin

$$E_{0,n}^2 \simeq \mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \otimes_{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \dot{\oplus}]} F \rightarrow \mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; \mathbf{H}(\Phi)^*F)$$

dont le conoyau est extension de  $\mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \otimes_{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \dot{\oplus}]} F$  par  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{k}}(\mathcal{H}_{n-1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}), F)$

(par la formule de Künneth, puisque l'action de  $\Gamma_\Phi$  sur  $\mathbf{H}(\Phi)^*F$  est triviale). Le terme  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{k}}(\mathcal{H}_{n-1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}), \mathbb{k})$  est isomorphe, dans la catégorie quotient, à  $E_{1,n-1}^2$  (on a vu en effet plus haut que le morphisme canonique  $E_{1,n-1}^2 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{k}}(F, \mathcal{H}_{n-1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}))$  est un isomorphisme dans la catégorie quotient), on en déduit donc que  $\mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; \mathbb{k}) \otimes_{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \dot{\oplus}]} F$  est de degré au plus  $2m+d-2$  (pour tout

$F$  de degré  $d$ ), ce qui implique que  $\mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  est polynomial de degré au plus  $2m$  (en utilisant la polynomialité de  $\mathcal{H}_n(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$ , donnée par le théorème 2.28, ainsi que le théorème 2.24 et la proposition 2.20); lorsque  $n$  est multiple de  $e$  on obtient également l'isomorphisme désiré. En effet, le seul terme hors  $E_{0,me}^2$  potentiellement non nul dans la catégorie quotient, hors  $E_{1,me-1}^2$  qui compense exactement la partie de torsion dans la suite exacte de Künneth, est  $E_{e,(m-1)e}^2$ , où n'entre ni ne sort aucune différentielle non nulle dans la catégorie quotient, à l'exception éventuelle de la différentielle  $d^e : E_{e,(m-1)e}^e \rightarrow E_{0,me-1}^e$  qui ne pose pas de problème car le noyau du morphisme de coin  $E_{0,me-1}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{me-1}(\Gamma_\Phi; \mathbb{k})$  est de degré au plus  $2m+d-4$ .  $\square$

**Théorème 2.33.** *Plaçons-nous dans la situation du théorème 2.29 et supposons  $e$  fini. Alors  $\mathcal{H}_n(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$  est de degré au plus  $2\lfloor \frac{n}{e} \rfloor$ , avec égalité lorsque  $n$  est multiple de  $e$ . De plus, la structure multiplicative sur  $\mathcal{H}_\bullet(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$  induit pour tout  $m \in \mathbb{N}$  un isomorphisme*

$$(\mathcal{H}_e(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})^{\otimes m})_{\mathfrak{S}_m} \simeq \mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k}),$$

l'action de  $\mathfrak{S}_m$  par permutation des facteurs du produit tensoriel étant tordue par la signature si  $e$  est impair, dans  $\mathcal{P}ol_{2m}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{2m-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  et même dans  $\mathcal{P}ol_{2m}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{2m-2}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$  ou que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  vérifient l'hypothèse 2.2.

*Démonstration.* On note tout d'abord que, en vertu du théorème 2.24, remplacer le produit tensoriel usuel par  $\otimes_{[\mathbf{H}(\mathcal{B}), \dot{\oplus}]}$  ne change pas le membre de gauche de

l'isomorphisme dans la catégorie quotient considérée, ce qui explique pourquoi le produit y induit une flèche

$$(\mathcal{H}_e(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})^{\otimes m})_{\mathfrak{S}_m} \rightarrow \mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k}). \quad (15)$$

On note également que la proposition 2.32 fournit un isomorphisme

$$d_x(\mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})) \simeq \mathcal{H}_{(m-1)e}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k}) \otimes \mathbf{L}_e^{add}(\Phi_*)(\mathbb{k} \otimes \Phi^*\mathcal{B}(Dx, -)) \quad (16)$$

(dans la catégorie quotient appropriée) naturel en l'objet  $x$  de  $\mathcal{B}$ . Cet isomorphisme possède également une functorialité en la flèche  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\mathbf{Add}_D^{ps}$  en le sens suivant.

Supposons que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Xi \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{\Phi'} & \mathcal{B}' \end{array}$$

est un diagramme commutatif (à isomorphisme près) de  $\mathbf{Add}_D$  dans lequel  $\Phi$  et  $\Phi'$  appartiennent à  $\mathbf{Add}_D^{ps}$ ; supposons également que le plus petit entier  $i > 0$  tel que  $\mathbf{L}_i^{add}(\Phi'_*) \circ \Phi'^*$  soit non nul sur  $\mathcal{B}'\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  soit  $e$  (comme pour  $\Phi$ ). Alors on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} d_x(\mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}_{(m-1)e}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k}) \otimes \mathbf{L}_e^{add}(\Phi_*)(\mathbb{k} \otimes \Phi^* \mathcal{B}(Dx, -)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Xi^* d_{\Xi(x)}(\mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi')}; \mathbb{k})) & \xrightarrow{\simeq} & \Xi^* \mathcal{H}_{(m-1)e}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi')}; \mathbb{k}) \otimes \Xi^* \mathbf{L}_e^{add}(\Phi'_*)(\mathbb{k} \otimes \Phi'^* \mathcal{B}'(D\Xi(x), -)) \end{array}$$

dans  $\mathcal{P}ol_{2m-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{2m-2}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  (ou dans  $\mathcal{P}ol_{2m-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})/\mathcal{P}ol_{2m-3}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$  ou que  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  vérifient l'hypothèse 2.2) où la flèche verticale de gauche est induite par le morphisme canonique  $\mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k}) \rightarrow \Xi^* \mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi')}; \mathbb{k})$  et (13) et celle de droite est analogue à ce qui est explicité après le théorème 1.31 (c'est d'ailleurs la functorialité des suites spectrales de ce théorème — et des autres isomorphismes utilisés dans nos raisonnements précédents — qui atteste de la commutativité du diagramme précédent).

Comme la structure multiplicative sur  $\mathcal{H}_{\bullet}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$  est induite par le diagramme commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi \times \Phi} & \mathcal{B} \times \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B} \end{array}$$

de  $\mathbf{Add}_D$  dont les flèches verticales sont données par la somme directe, on en déduit que l'isomorphisme (16) est compatible à la structure multiplicative en le sens suivant : notant  $H_m$  pour  $\mathcal{H}_{me}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$  et  $L_x$  pour  $\mathbf{L}_e^{add}(\Phi_*)(\mathbb{k} \otimes \Phi^* \mathcal{B}(Dx, -))$ , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} d_x(H_m \otimes H_n) & \xrightarrow{\simeq} & (d_x(H_m) \otimes H_n) \oplus (H_m \otimes d_x(H_n)) & \xrightarrow{\simeq} & (H_{m-1} \otimes H_n \otimes L_x) \oplus (H_m \otimes H_{n-1} \otimes L_x) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ d_x(H_{m+n}) & \xrightarrow{\simeq} & & & H_{m+n-1} \otimes L_x \end{array}$$

où le premier isomorphisme est induit par la propriété de dérivation de  $d_x$  (proposition 2.20.4), les autres par (16) et les flèches verticales par la structure multiplicative. Cette même propriété de dérivation donne des isomorphismes  $d_x(T^{\otimes m}) \simeq d_x(T) \otimes T^{\otimes(m-1)} \uparrow_{\mathfrak{S}_{m-1}}^{\mathfrak{S}_m} (\mathfrak{S}_m\text{-équivariant})$  puis  $d_x((T^{\otimes m})_{\mathfrak{S}_m}) \simeq$

$d_x(T) \otimes (T^{\otimes(m-1)})_{\mathfrak{S}_{m-1}}$ , ce qui montre que le morphisme (15) induit un isomorphisme dans  $\mathcal{P}ol_{2m-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_{2m-2}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  (ou dans  $\mathcal{P}ol_{2m-1}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_{2m-3}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  si 2 est inversible dans  $\mathbb{k}$  ou que  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  vérifient l'hypothèse 2.2), ce qui permet facilement de conclure en utilisant derechef la proposition 2.20.  $\square$

Signalons également un résultat à coefficients tordus, dans lequel on se limite au cas où  $\mathbb{k}$  est un corps afin de simplifier l'énoncé.

**Corollaire 2.34.** *Supposons que  $\mathbb{k}$  est un corps. Soient  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme de  $\mathbf{Ad}^{ps}$  et  $d \geq 0, n \geq 0, e > 0$  des entiers. On suppose que  $\mathbf{L}_i^{add}(\Phi_*) \circ \Phi^*$  est nul sur  $\mathcal{B}\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$  pour  $0 < i < e$ . Pour tout  $F$  dans  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathbb{k})$ ,  $\mathcal{H}_{ne}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; F)$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{2n+d}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$  et est naturellement isomorphe à*

$$\mathbf{H}(\Phi)_*(F) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{H}_{ne}(\Gamma_{\mathbf{H}(\Phi)}; \mathbb{k})$$

dans la catégorie  $\mathcal{P}ol_{2n+d}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k}) / \mathcal{P}ol_{2(n-1)+d}(\mathbf{H}(\mathcal{B}), \mathbb{k})$ .

## A Conjectures pour l'homologie des groupes $IA$

Nous nous penchons désormais (suivant la fin du mémoire [10]) sur le cas du morphisme de CMHS  $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbb{Z})$  donné par l'abélianisation, où  $\mathcal{G}$  désigne comme dans [16] la CMHS associée aux groupes d'automorphismes des groupes libres (cf. la remarque 1.21), de sorte que  $\Gamma_{\Phi}(F_n)$  (où  $F_n$  est un groupe libre de rang  $n$ ) est le groupe, souvent noté  $IA_n$ , noyau de l'épimorphisme de groupes canonique  $\text{Aut}(F_n) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ .

On dispose donc pour tout  $d \in \mathbb{N}$  d'un objet  $\mathcal{H}_d(IA; \mathbb{k})$  de  $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}); \mathbb{k})$  (cf. la proposition-définition 1.26), et même d'un foncteur  $H_d(IA; \mathbb{k})$  dans  $(\mathbf{S}(\mathbb{Z}); \mathbb{k})$  (voir la remarque 1.27).

Le résultat classique suivant (qui découle sans peine de travaux anciens de Magnus [23] et est démontré explicitement par Kawazumi [22, théorème 6.1]) fournit une description complète en degré 1 :

**Proposition A.1** (Magnus, Kawazumi...). *Il existe un isomorphisme*

$$H_1(IA; \mathbb{Z})(V) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \Lambda^2(V))$$

naturel en l'objet  $V$  de  $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ .

En particulier,  $H_1(IA; \mathbb{k})$  est polynomial de degré (faible ou fort) exactement 3 (lorsque l'anneau  $\mathbb{k}$  est non nul) :  $\Phi$  n'est pas excisif pour l'homologie stable.

La compréhension de  $\mathcal{H}_d(IA; \mathbb{Z})$  (et même de  $\mathcal{H}_d(IA; \mathbb{Q})$ ) devient dramatiquement compliquée pour  $d \geq 2$ .

Au vu des résultats de finitude connus pour l'homologie des groupes de congruence associés à un anneau sans unité raisonnable, et de la stabilité homologique pour les groupes  $\text{Aut}(F_n)$ , il paraît raisonnable de conjecturer :

**Conjecture A.2.** *Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $H_d(IA; \mathbb{Z})$  de  $(\mathbf{S}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$  est fortement polynomial.*

Au-delà de cette conjecture, que l'on ne s'attend pas à pouvoir aborder par les méthodes *stables* du présent article, on soupçonne :

**Conjecture A.3.** *Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_d(IA; \mathbb{Z})$  appartient à  $\mathcal{P}ol_{3d}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ , mais pas à  $\mathcal{P}ol_{3d-1}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ .*

(On pourrait espérer ensuite décrire l'image de cet objet dans la catégorie quotient  $\mathcal{P}ol_{3d}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})/\mathcal{P}ol_{3d-1}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ , voire  $\mathcal{P}ol_{3d}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})/\mathcal{P}ol_{3d-2}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ .)

Les résultats partiels de Pettet [26] sur le degré homologique 2 montrent que  $\mathcal{H}_2(IA; \mathbb{Q})$  n'appartient pas à  $\mathcal{P}ol_5(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$ , mais on ne semble guère savoir dire davantage à l'heure actuelle (voir néanmoins Miller-Patz-Wilson [24, théorème A]).

La stratégie qu'on espère pouvoir mettre en œuvre pour établir la conjecture A.3 reposerait sur le même schéma général que celle du § 2.5 : utiliser des arguments de données et extensions triangulaires appropriés, s'appuyer sur les propriétés de  $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \oplus}$  établies au § 2.4 et étudier le comportement (stable) sur les foncteurs polynomiaux de l'extension de Kan dérivée à gauche le long de  $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbb{Z})$ . Cela pourrait être décomposé en plusieurs étapes :

1. étudier le comportement de l'extension de Kan dérivée à gauche le long du foncteur canonique  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  en généralisant [9] (notamment son théorème 1.5), dont on conserve les notations ( $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  est comme  $\mathcal{G}$  une catégorie ayant les mêmes objets que la catégorie usuelle  $\mathbf{gr}$  — sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Grp}$  — des groupes libres de rang fini ; le foncteur  $\Phi$  se factorise par le foncteur canonique  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ , qui est l'identité sur les objets) ;
2. étudier l'extension de Kan dérivée à gauche le long du foncteur (toujours induit par l'abélianisation)  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathbb{Z})$  sur des foncteurs polynomiaux en se ramenant à l'analogie entre catégories de factorisations  $\mathbf{F}(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbb{Z})$ . On pourrait pour cela s'inspirer du § 2.2, ainsi que de [16, § 5, 6] et [9, théorème 1.3] ;
3. les catégories de factorisations étant des catégories d'éléments, se ramener finalement à l'étude d'extensions de Kan dérivées à gauche le long du foncteur usuel d'abélianisation, ce que fait la proposition suivante.

**Proposition A.4.** *Soient  $i, d$  des entiers naturels et  $\Psi : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{Z})$  le foncteur d'abélianisation entre les catégories usuelles de groupes (abéliens au but) libres de rang fini.*

1. *Le foncteur  $\mathbf{L}_i(\Psi_*) : (\mathbf{gr}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{k})$  envoie  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr}, \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_{d+i}(\mathbf{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{k})$ .*
2. *Le foncteur  $\mathbf{L}_i(\Psi_*^{op}) : (\mathbf{gr}^{op}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{P}(\mathbb{Z})^{op}, \mathbb{k})$  envoie  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr}^{op}, \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{P}(\mathbb{Z})^{op}, \mathbb{k})$ .*
3. *Le foncteur  $\mathbf{L}_i((\Psi^{op} \times \Psi)_*) : (\mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}, \mathbb{k}) \rightarrow (\mathbf{P}(\mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{k})$  envoie  $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}, \mathbb{k})$  dans  $\mathcal{P}ol_{d+i}(\mathbf{P}(\mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{k})$ .*

*Esquisse de démonstration.* La résolution barre et la formule de Künneth montrent que  $\mathbf{L}_i(\Psi_*)$  envoie la  $d$ -ème puissance tensorielle de l'abélianisation tensorisée par  $\mathbb{k}$  sur un foncteur de degré  $d+i$  (pour  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{L}_i(\Psi_*)$  envoie l'abélianisation sur l'homologie en degré  $i+1$  sur les groupes abéliens libres, c'est-à-dire sur la  $i+1$ -ème puissance extérieure). Le premier point s'en déduit, par récurrence sur le degré polynomial, en utilisant [16, § 3].

La deuxième assertion découle formellement de ce que les catégories  $\mathbf{gr}$  et  $\mathbf{P}(\mathbb{Z})$  possèdent un objet nul et des coproduits finis que le foncteur  $\Psi$  préserve, par un argument d'adjonction somme/diagonale.

La dernière assertions se déduit formellement des deux précédentes et de la suite spectrale de Künneth

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^{\mathbb{k}[\mathcal{C}]}(A, c \mapsto \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{k}[\mathcal{D}]}(B, X(c, -))) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^{\mathbb{k}[\mathcal{C} \times \mathcal{D}]}(A \boxtimes B, X)$$

où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des petites catégories,  $X$  est un objet de  $(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathbb{k})$  et  $A$  et  $B$  des objets de  $(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{k})$  et  $(\mathcal{D}^{op}, \mathbb{k})$  respectivement dont l'un prend des valeurs  $\mathbb{k}$ -plates.  $\square$

## Références

- [1] Leovigildo Alonso Tarrío, Ana Jeremías López, and María José Souto Salorio. Localization in categories of complexes and unbounded resolutions. *Canad. J. Math.*, 52(2) :225–247, 2000.
- [2] Marcel Bökstedt and Amnon Neeman. Homotopy limits in triangulated categories. *Compositio Math.*, 86(2) :209–234, 1993.
- [3] Frank Calegari. The stable homology of congruence subgroups. *Geom. Topol.*, 19(6) :3149–3191, 2015.
- [4] Ruth Charney. On the problem of homology stability for congruence subgroups. *Comm. Algebra*, 12(17-18) :2081–2123, 1984.
- [5] Thomas Church and Jordan Ellenberg. Homology of fi-modules. Prépublication arXiv :1506.01022.
- [6] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, Benson Farb, and Rohit Nagpal. FI-modules over Noetherian rings. *Geom. Topol.*, 18(5) :2951–2984, 2014.
- [7] Thomas Church, Jeremy Miller, Rohit Nagpal, and Jens Reinhold. Linear and quadratic ranges in representation stability. Prépublication arXiv :1706.03845.
- [8] Guillermo Cortiñas. The obstruction to excision in  $K$ -theory and in cyclic homology. *Invent. Math.*, 164(1) :143–173, 2006.
- [9] Aurélien Djament. Décomposition de hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres. Prépublication disponible sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01214646>.
- [10] Aurélien Djament. Méthodes fonctorielles pour l'étude de l'homologie stable des groupes. Mémoire d'habilitation, disponible sur <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~djament/HDR.pdf>.
- [11] Aurélien Djament. Foncteurs de division et structure de  $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$  dans la catégorie  $\mathcal{F}$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(6) :1771–1823, 2007.
- [12] Aurélien Djament. Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [13] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. *Fund. Math.*, 233(3) :197–256, 2016.
- [14] Aurélien Djament and Christine Vespa. Foncteurs faiblement polynomiaux. A paraître à IMRN.
- [15] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.

- [16] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes d’automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. *Comment. Math. Helv.*, 90(1) :33–58, 2015.
- [17] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.
- [18] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups  $H(\Pi, n)$ . II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [19] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.
- [20] Thomas Geisser and Lars Hesselholt. Bi-relative algebraic  $K$ -theory and topological cyclic homology. *Invent. Math.*, 166(2) :359–395, 2006.
- [21] Daniel Grayson. Higher algebraic  $K$ -theory. II (after Daniel Quillen). In *Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976)*, pages 217–240. Lecture Notes in Math., Vol. 551. Springer, Berlin, 1976.
- [22] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of Magnus expansions. arXiv : math.GT/0505497, 2006.
- [23] Wilhelm Magnus. über  $n$ -dimensionale Gittertransformationen. *Acta Math.*, 64(1) :353–367, 1935.
- [24] Jeremy Miller, Peter Patzt, and Jennifer C. H. Wilson. Central stability for the homology of congruence subgroups and the second homology of Torelli groups. Prépublication arXiv :1704.04449.
- [25] Amnon Neeman. *Triangulated categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [26] Alexandra Pettet. The Johnson homomorphism and the second cohomology of  $IA_n$ . *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :725–740, 2005.
- [27] T. I. Pirashvili. Higher additivizations. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :44–54, 1988.
- [28] Andrew Putman. Stability in the homology of congruence subgroups. *Invent. Math.*, 202(3) :987–1027, 2015.
- [29] Daniel Quillen. Higher algebraic  $K$ -theory. I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.
- [30] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. Prépublication arXiv :1409.3541.
- [31] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring*. PhD thesis, Evanston, 2000.
- [32] C. Serpé. Resolution of unbounded complexes in Grothendieck categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 177(1) :103–112, 2003.
- [33] A. A. Suslin. Excision in integer algebraic  $K$ -theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 208(Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom.) :290–317, 1995. Dedicated to Academician Igor’ Rostislavovich Shafarevich on the occasion of his seventieth birthday (Russian).
- [34] Andrei A. Suslin and Mariusz Wodzicki. Excision in algebraic  $K$ -theory. *Ann. of Math. (2)*, 136(1) :51–122, 1992.

- [35] Alain Troesch. Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques. *Comm. Algebra*, 30(7) :3351–3382, 2002.