Верхульст и логистическое уравнение в динамике населения

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

В 1838 году бельгийский математик Пьер-Франсуа Верхульст опубликовал статью, в которой он представил (с различными обозначениями) логистическое уравнение, теперь хорошо известное для роста населения

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\frac{K-P}{K} \tag{1}$$

[1]. Он скорректировал параметры этого уравнения для данных о населении из нескольких стран, включая Бельгию. В статье не говорится, какие значения r и K были получены. Но из представленной таблицы может показаться, что Verhulst основал расчеты для Бельгии на следующих гипотезах, полученных из реальных данных:

$$P(1815) = 3\,494\,985\,, \quad P(1824) = 3\,816\,249\,, \quad P(1833) = 4\,142\,257\,.$$

С этими тремя точками (обратите внимание, что модель имеет три параметра: r, Kи интегральная константа), мы легко находим K = 8,43 миллиона для асимптоты населения. Действительно, если P_0, P_1 а также P_2 население в t_0, $t_1 = t_0 + T$ а также $t_2 = t_0 + 2T$, у нас есть

$$K = P_1\frac{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2}{P_1^2 - P_0P_2}\,.$$

В 1845 году Верхульст опубликовал еще одну статью на эту тему. Он ввел термин «логистическое уравнение» и более подробно объяснил, как оценивать параметры. На этот раз он использовал немного другие предположения, после более внимательного изучения данных:

$$P(1815) = 3\,627\,253\,, \quad P(1830) = 4\,247\,113\,, \quad P(1845) = 4\,800\,861\,. \tag{2}$$

Он получил K = 6,58 млн. [2], результат намного ниже, чем предыдущая оценка. Ферхулст вернулся к этому вопросу в короткой заметке на следующий год [3] и, наконец, в более длинной статье, опубликованной в 1847 году. В этих двух документах он предположил, что в выводе логистического уравнения была ошибка. Вместо этого он использовал (опять же с разными обозначениями) модель вида

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\,\frac{K-P}{P} = r(K-P) \tag{3}$$

[4]. С теми же данными (2) он получил K = 9,44 млн., Результат, который сильно отличается от двух предыдущих результатов. Для этой второй модели

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}\,.$$

Логистическое уравнение было вновь введено несколькими десятилетиями позже разными людьми, не зная работы Верхульста [5]. Он использовался для индивидуального роста животных, растений, людей и органов тела [6], для роста популяций микроорганизмов [7] или в качестве Verhulst для роста популяций людей, таких как популяция из США [8]. Работа Верхульста была наконец замечена [9, с. 249], и термин «логистическое уравнение» стал широко использоваться. Споры о значении этого уравнения длились много лет. Подробное обсуждение см. В [10, с. 64-97]. Вероятно, был сделан вывод, что это не основной закон. Мы можем использовать это уравнение для краткосрочных прогнозов, но не для долгосрочных прогнозов. Тем не менее, вот как известный биографический словарь подводит итог работы Верхульста по населению [11]:

> «Верхулст показал в 1846 году, что препятствия увеличиваются пропорционально отношению избытка населения к общей численности населения. Таким образом, он был вынужден дать цифру 9 400 000 в качестве верхнего предела для населения Бельгии (который, кстати, составлял 9 581 000 в 1967 году). Исследование Ферхулста о законе роста населения делает его предшественником для современных специалистов по этому вопросу. "

Обратите внимание, что этот абзац относится к модели (3), а не к модели (1), даже если мы в настоящее время помним Verhulst только из-за модели (1). Кроме того, учитывая изменчивость результатов Verhulst для максимальной совокупности K , может показаться, что сравнивать один результат с нынешним населением Бельгии не имеет смысла. Предыдущая цитата также была источником путаницы для последующих ссылок на Верхульста. Например, с 1996 года один из самых популярных сайтов по истории математики [12] цитирует [11] и рассказывает историю в слегка измененном (и обновленном) виде:

> «Нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее рост биологической популяции, которую он вывел и изучил, теперь носит его имя. С его теорией, Verhulst предсказал, что верхний предел населения Бельгии будет 9 400 000. Население в 1994 году было 10 118 000. Этот прогноз кажется довольно хорошим, учитывая эффект иммиграции. "

Отметим в этой цитате, что «его теория» относится к логистическому уравнению, что сам Верхульст в конце концов думает, что оно неверно. Кроме того, численный результат модели (3) приписывается модели (1), которая создает впечатление реабилитации логистического уравнения для долгосрочных демографических прогнозов. В недавней книге [13, с. 5], мы находим близкий вариант с новым обновлением:

> «С его теорией, Verhulst предсказал, что предельная вместимость населения в Бельгии будет 9,4 миллиона. Общая численность населения в Бельгии в январе 2000 года составляла 10,24 миллиона жителей, разница всего в 0,84 миллиона, главным образом из-за иммиграции. "

Книга [14, с. 10] рассказывает похожую историю. Как писал Рональд Фишер о творчестве Менделя [15, с. 6]:

> «История науки сильно пострадала от использования учителями материалов, бывших в употреблении, и последующего забвения обстоятельств и интеллектуальной атмосферы, в которой были сделаны великие открытия прошлого. Изучение из первых рук всегда поучительно, и часто. . .полон сюрпризов. "

Благодаря Интернету, исследования из первых рук теперь значительно упрощены. В библиотеке Геттингенского университета в Германии оцифрованы научные журналы со статьями Верхульста за 1845 и 1847 гг .: их можно скачать с сайта библиотеки. Что касается статьи 1838 года, то есть английский перевод в [16]. В заключение приведу краткую биографию Верхульста [17, 18]. Более свежие обсуждения см., Например, [19, 20, 21, 22]:

- 1804: рождение в Брюсселе.
- 1822-1825: учится в Гентском университете, диссертация по математике.

- 1829: публикация его перевода книги Джона Гершеля "Договор о свете".
- 1830: после революции, которая приводит к независимости Бельгии, интересуется политикой, историей и «политической арифметикой».
- 1834: начинает преподавать математику в l'École Royale Militaire,
- 1835: его бывший профессор Кветле издает " Essai de physique sociale«[23]. Это отправная точка для исследований Verhulst по росту населения.
- 1835-1840: профессор Свободного университета Брюсселя.
- 1841: публикация его математического трактата об эллиптических функциях. Выборы в Королевскую академию Бельгии.
- 1848: президент Академии.
- 1849: смерть в Брюсселе (вероятно, от туберкулеза).

Библиографические ссылки

1. Verhulst, P. –F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. –F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. –F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920. On the rate of growth ofthe population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre – Франпротивоis). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre Франпротивоis Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. http: //www-history.mcs.standrews. ac.uk/Biographies/Verhulst.html
13. Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H., 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P., Keyfitz, N., 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A., 1850. Pierre – Франпротивоis Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R., 1933. Pierre – Франпротивоis Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A., 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b
19. Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre – Франпротивоis Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B., 2004. Pierre – Франпротивоis Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf
21. Ausloos, M., Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d