Verhulst e a equação logística na dinâmica populacional

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

Em 1838, o matemático belga Pierre-François Verhulst publicou um artigo no qual introduziu (com diferentes notações) a equação logística hoje bem conhecida pelo crescimento populacional

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\frac{K-P}{K} \tag{1}$$

[1] Ele ajustou os parâmetros dessa equação para dados populacionais de vários países, incluindo a Bélgica. O artigo não diz quais os valores de r e K foram obtidos. Mas parece da tabela apresentada que Verhulst baseou os cálculos para a Bélgica nas seguintes hipóteses, obtidas a partir de dados reais:

$$P(1815) = 3\,494\,985\,, \quad P(1824) = 3\,816\,249\,, \quad P(1833) = 4\,142\,257\,.$$

Com esses três pontos (observe que o modelo possui três parâmetros: r, Ke uma constante de integração), encontramos facilmente K = 8,43 milhões para a assíntota da população. De fato, se P_0, P_1 e P_2 são as populações em t_0, $t_1 = t_0 + T$ e $t_2 = t_0 + 2T$, temos

$$K = P_1\frac{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2}{P_1^2 - P_0P_2}\,.$$

Em 1845, Verhulst publicou outro artigo sobre o mesmo assunto. Ele introduziu o termo "equação logística" e explicou em mais detalhes como estimar os parâmetros. Desta vez, ele usou suposições ligeiramente diferentes, depois de uma análise mais detalhada dos dados:

$$P(1815) = 3\,627\,253\,, \quad P(1830) = 4\,247\,113\,, \quad P(1845) = 4\,800\,861\,. \tag{2}$$

Ele obteve K = 6,58 milhões [2], resultado muito menor que a estimativa anterior. Verhulst retornou a esse assunto em uma nota curta no ano seguinte [3] e, finalmente, em um artigo mais longo publicado em 1847. Nesses dois documentos, ele sugeriu que havia um erro na derivação da equação logística. Em vez disso, ele usou (novamente com notações diferentes) um modelo da forma

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\,\frac{K-P}{P} = r(K-P) \tag{3}$$

[4] Com os mesmos dados (2), ele obteve K = 9,44 milhões, resultado ainda bastante diferente dos dois resultados anteriores. Para este segundo modelo,

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}\,.$$

A equação logística foi reintroduzida várias décadas depois por diferentes pessoas, sem conhecer o trabalho de Verhulst [5]. Foi utilizado para o crescimento individual de animais, plantas, homens e órgãos do corpo [6], para o crescimento de populações de microrganismos [7], ou como Verhulst para o crescimento de populações humanas, como a população dos Estados Unidos [8]. O trabalho de Verhulst foi finalmente notado [9, p. 249] e o termo "equação logística" tornou-se comumente usado. Os debates sobre o significado dessa equação duraram muitos anos. Para uma discussão detalhada, consulte [10, p. 64-97]. A conclusão foi provavelmente que não era uma lei básica. Podemos usar essa equação para projeções de curto prazo, mas não para projeções de longo prazo. No entanto, eis como um famoso dicionário biográfico resume o trabalho de Verhulst sobre a população [11]:

> “Verhulst mostrou em 1846 que os obstáculos aumentam proporcionalmente à proporção entre o excesso de população e a população total. Assim, ele foi levado a dar o número 9.400.000 como o limite superior para a população da Bélgica (que, a propósito, era 9.581.000 em 1967). A pesquisa de Verhulst sobre a lei do crescimento populacional o torna precursor de especialistas modernos no assunto. "

Observe que este parágrafo se refere ao modelo (3) e não ao modelo (1), mesmo que atualmente nos lembremos do Verhulst apenas por causa do modelo (1). Além disso, dada a variabilidade dos resultados de Verhulst para a população máxima K , parece que comparar um único resultado com a população atual da Bélgica realmente não faz sentido. A citação anterior também foi uma fonte de confusão para referências posteriores a Verhulst. Desde 1996, por exemplo, um dos sites mais populares da história da matemática [12] cita [11] e conta a história de uma maneira ligeiramente modificada (e atualizada):

> "A equação diferencial não linear que descreve o crescimento de uma população biológica, que ele deduziu e estudou, agora leva seu nome. Com sua teoria, Verhulst previu que o limite superior da população belga seria 9.400.000, em 1994 era de 10.118.000, e parece bastante bom, dado o efeito da imigração. "

Observe nesta citação que "a teoria dele" se refere à equação logística, que o próprio Verhulst acaba pensando que não estava correto. Além disso, o resultado numérico do modelo (3) é atribuído ao modelo (1), que dá a impressão de uma reabilitação da equação logística para projeções populacionais de longo prazo. Em um livro recente [13, p. 5], encontramos uma variante próxima com uma nova atualização:

> “Com sua teoria, Verhulst previu que a capacidade limite da população na Bélgica seria de 9,4 milhões. A população total da Bélgica em janeiro de 2000 era de 10,24 milhões de habitantes, uma diferença de apenas 0,84 milhão, principalmente devido à imigração. "

O livro [14, p. 10] conta uma história semelhante. Como Ronald Fisher escreveu sobre o trabalho de Mendel [15, p. 6]:

> “A História da Ciência sofreu muito com o uso pelos professores de materiais de segunda mão, e o consequente esquecimento das circunstâncias e da atmosfera intelectual em que foram feitas as grandes descobertas do passado. Um estudo em primeira mão é sempre instrutivo e geralmente. . .Cheio de surpresas. "

Graças à Web, os estudos em primeira mão agora são bastante simplificados. A biblioteca da Universidade de Göttingen, na Alemanha, digitalizou jornais científicos com os artigos de Verhulst de 1845 e 1847: eles podem ser baixados no site da biblioteca. Quanto ao artigo de 1838, há uma tradução para o inglês em [16]. Para concluir, aqui está uma pequena biografia de Verhulst [17, 18]. Para discussões mais recentes, veja por exemplo [19, 20, 21, 22]:

- 1804: nascimento em Bruxelas.
- 1822-1825: estudos na Universidade de Ghent, tese em matemática.
- 1829: publicação de sua tradução do livro de John Herschel "Tratado da Luz".
- 1830: após a revolução que leva à independência da Bélgica, interessa-se por política, história e "aritmética política".

- 1834: começa a ensinar matemática na l'École Royale Militaire.
- 1835: seu ex-professor Quetelet publica " Essai de physique sociale"[23] Este é o ponto de partida para os estudos de Verhulst sobre crescimento populacional.
- 1835-1840: professor da Universidade Livre de Bruxelas.
- 1841: publicação de seu tratado matemático sobre funções elípticas. Eleição para a Academia Real da Bélgica.
- 1848: presidente da Academia.
- 1849: morte em Bruxelas (provavelmente por tuberculose).

Referências bibliográficas

1. Verhulst, P. −F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 − 121.
2. Verhulst, P. −F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles − Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 − 45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. −F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles − Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 − 227.
4. Verhulst, P. −F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux − Arts de Belgique, vol. XX, 1 − 32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 − 108.
6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 − 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro − organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 − 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920. On the rate of growth ofthe population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 − 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre − Franvsois). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre Franvsois Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. http: //www-history.mcs.standrews. ac.uk/Biographies/Verhulst.html
13. Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender − structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H., 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P., Keyfitz, N., 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A., 1850. Pierre − Franvsois Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux − Arts de Belgique 16, 97 − 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R., 1933. Pierre − Franvsois Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 − 689.
18. Quetelet, A., 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b
19. Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre − Franvsois Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 − 378.
20. Delmas, B., 2004. Pierre − Franvsois Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 − 81. http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf
21. Ausloos, M., Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer − Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d