人口動態におけるVerhulstとロジスティック方程式

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 − 26
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

1838年、ベルギーの数学者Pierre-FrançoisVerhulstが記事を発表し、人口の増加についてよく知られているロジスティック方程式を（異なる表記で）紹介しました

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\frac{K-P}{K} \tag{1}$$

[1]。彼はこの方程式のパラメーターをベルギーを含むいくつかの国からの人口データに調整しました。記事では、rとKのどの値が取得されたかについては触れられていません。しかし、提示された表から、Verhulstは実際のデータから得られた以下の仮説に基づいてベルギーの計算に基づいていると思われます。

$$P(1815) = 3\,494\,985\,, \quad P(1824) = 3\,816\,249\,, \quad P(1833) = 4\,142\,257\,.$$

これらの3つのポイント（モデルには3つのパラメーターがあることに注意してください： r、 Kと積分定数）、人口漸近線のK = 843万を簡単に見つけることができます。確かに P_0、 P_1 そして P_2 人口は t_0、 $t_1 = t_0 + T$ そして $t_2 = t_0 + 2T$、 我々は持っています

$$K = P_1\frac{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2}{P_1^2 - P_0P_2}\,.$$

1845年、Verhulstは同じ主題に関する別の記事を発表しました。彼は「ロジスティック方程式」という用語を導入し、パラメーターを推定する方法をより詳細に説明しました。今回は、データを詳しく調べた後、少し異なる仮定を使用しました。

$$P(1815) = 3\,627\,253\,, \quad P(1830) = 4\,247\,113\,, \quad P(1845) = 4\,800\,861\,. \tag{2}$$

彼はK = 6.58百万[2] を取得しました。これは以前の推定よりもはるかに低い結果です。Verhulstは翌年[3]の短いメモでこの主題に戻り、最後に1847年に発行されたより長い記事でこの主題に戻りました。これら2つの文書で、彼はロジスティック方程式の導出に誤りがあることを示唆しました。代わりに、彼は（再び異なる表記法で）フォームのモデルを使用しました

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\,\frac{K-P}{P} = r(K-P) \tag{3}$$

[4]。同じデータ（2）を使用して、K = 944万を取得しました。この結果は、前の2つの結果とはかなり異なっています。この2番目のモデルでは、

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}\,.$$

ロジスティクスの方程式は、数十年後、Verhulstの仕事を知らずにさまざまな人々によって再導入されました[5]。動物、植物、男性、身体器官の個々の成長[6]、微生物の個体群の成長[7]、または人口などの人間の個体群の成長のVerhulstとして使用されましたアメリカ合衆国から[8]。ヴァーフルストの作品はようやく注目された[9、p。249]と「ロジスティック方程式」という用語が一般的に使用されるようになりました。この方程式の意味についての議論は長年続いた。詳細については、[10、p。64-97]。結論はおそらくそれが基本法ではなかったということでした。この方程式を短期予測に使用できます。しかし、長期的な予測ではありません。それにもかかわらず、ここに有名な伝記の辞書が人口に関するバーフルストの研究を要約する方法があります[11]：

> 「Verhulstは1846年に、総人口に対する過剰人口の比率に比例して障害が増加することを示しました。このようにして彼はベルギーの人口の上限として9,400,000という数字を与えるように導かれました（ちなみに1967

年には9,581,000でした）。人口増加の法則に関するVerhulstの研究は、これを現代の専門家の先駆けとしています。」

この段落はモデル（1）ではなくモデル（3）を参照していることに注意してください。たとえモデル（1）だけのために今日Verhulstを覚えているとしてもです。さらに、最大母集団Kに対するVerhulstの結果の変動性を考えると、単一の結果を現在のベルギーの母集団と比較しても、実際には意味がないように思われます。以前の引用は、後にVerhulstを参照する際の混乱の原因にもなりました。たとえば1996年以来、数学の歴史で最も人気のあるサイトの1つ[12]は[11]を引用し、少し修正（および更新）された方法でストーリーを伝えています。

> 「彼が推論して研究した、生物集団の成長を説明する非線形微分方程式は、現在彼の名前を持っています。ベルフルストは彼の理論に基づいて、ベルギーの人口の上限は9,400,000人になると予測しました。1994年の人口は10,118,000人でした。移民の影響を考えると、この予測はかなり良いようです。」

この引用では、「彼の理論」はロジスティック方程式を指すことに注意してください。Verhulst自身は、それが正しくなかったと考えてしまいます。さらに、モデル（3）の数値結果はモデル（1）に割り当てられます。これは、長期的な人口予測のロジスティック方程式のリハビリテーションの印象を与えます。最近の本[13、p。5]、我々は新しいアップデートで近いバリアントを見つけます：

> 「彼の理論により、ベルフルストはベルギーの人口の限界収容能力は940万人になると予測した。2000年1月のベルギーの総人口は1,024万人で、主に移民によるもので、わずか84万人の差でした。」

本[14、p。10]も同様の話をしています。ロナルド・フィッシャーがメンデルの仕事について書いたように[15、p。6]：

> 「科学の歴史は、教師による中古資料の使用と、その結果としての過去のすばらしい発見がなされた状況と知的雰囲気の忘却に大きな影響を受けました。直接的な研究は常に有益であり、しばしば...驚きに満ちています。」

Webのおかげで、直接的な調査が大幅に簡素化されました。ドイツのゲッティンゲン大学の図書館は、1845年と1847年のVerhulstの記事で科学雑誌をデジタル化しました。これらは図書館サイトからダウンロードできます。1838年の記事は[16]に英訳があります。結論として、これがVerhulstの短い伝記です[17、18]。より最近の議論については、例えば[19、20、21、22]を参照してください：

- 1804年：ブリュッセルで誕生。
- 1822-1825：ゲント大学での研究、数学の論文。
- 1829年：ジョンハーシェルの著書「光のトリーティー」の彼の翻訳の出版。
- 1830年：ベルギーの独立につながる革命後、政治、歴史、「政治計算」に関心を持つ。
- 1834年：数学を教え始める l'École Royale Militaire。
- 1835年：彼の元教授ケトレは出版しました Essai de physique sociale「[23]。これは、人口増加に関するVerhulstの研究の出発点です。
- 1835-1840：ブリュッセル自由大学の教授。
- 1841年：楕円関数に関する彼の数学的論文の出版。ベルギー王立アカデミー選挙。
- 1848：アカデミーの大統領。
- 1849年：ブリュッセルでの死（おそらく結核による）。

参考文献

1. Verhulst, P. –F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. –F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. –F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.

6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920. On the rate of growth ofthe population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre – Fran对ois). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre Fran对ois Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. http：//www-history.mcs.standrews。ac.uk/Biographies/Verhulst.html
13. Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H., 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P., Keyfitz, N., 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A., 1850. Pierre – Fran对ois Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R., 1933. Pierre – Fran对ois Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A., 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b
19. Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre – Fran对ois Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B., 2004. Pierre – Fran对ois Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf
21. Ausloos, M., Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d