Verhulst e l'equazione logistica nella dinamica della popolazione

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

Nel 1838, il matematico belga Pierre-François Verhulst pubblicò un articolo in cui introduceva (con diverse notazioni) l'equazione logistica ormai ben nota per la crescita della popolazione

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\frac{K-P}{K} \tag{1}$$

[1]. Ha adattato i parametri di questa equazione ai dati sulla popolazione di diversi paesi, tra cui il Belgio. L'articolo non dice quali valori di r e K sono stati ottenuti. Ma dalla tabella presentata sembra che Verhulst abbia basato i calcoli per il Belgio sulle seguenti ipotesi, ottenute da dati reali:

$$P(1815) = 3\,494\,985\,, \quad P(1824) = 3\,816\,249\,, \quad P(1833) = 4\,142\,257\,.$$

Con questi tre punti (notare che il modello ha tre parametri: r, Ke una costante di integrazione), troviamo facilmente K = 8,43 milioni per l'asintoto della popolazione. Anzi, se P_0, P_1 e P_2 sono le popolazioni in t_0, $t_1 = t_0 + T$ e $t_2 = t_0 + 2T$, noi abbiamo

$$K = P_1\frac{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2}{P_1^2 - P_0P_2}\,.$$

Nel 1845 Verhulst pubblicò un altro articolo sullo stesso argomento. Ha introdotto il termine "equazione logistica" e ha spiegato in modo più dettagliato come stimare i parametri. Questa volta ha usato ipotesi leggermente diverse, dopo uno sguardo più attento ai dati:

$$P(1815) = 3\,627\,253\,, \quad P(1830) = 4\,247\,113\,, \quad P(1845) = 4\,800\,861\,. \tag{2}$$

Ha ottenuto K = 6,58 milioni [2], un risultato molto inferiore alla stima precedente. Verhulst tornò su questo argomento in una breve nota l'anno successivo [3] e infine in un articolo più lungo pubblicato nel 1847. In questi due documenti, suggerì che c'era un errore nella derivazione dell'equazione logistica. Invece ha usato (sempre con notazioni diverse) un modello del modulo

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\,\frac{K-P}{P} = r(K-P) \tag{3}$$

[4]. Con gli stessi dati (2), ha ottenuto K = 9,44 milioni, un risultato ancora abbastanza diverso dai due risultati precedenti. Per questo secondo modello,

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}\,.$$

L'equazione logistica è stata reintrodotta diversi decenni dopo da persone diverse senza conoscere il lavoro di Verhulst [5]. Era utilizzato per la crescita individuale di animali, piante, uomini e organi del corpo [6], per la crescita di popolazioni di microrganismi [7] o come Verhulst per la crescita di popolazioni umane come la popolazione dagli Stati Uniti [8]. Il lavoro di Verhulst fu finalmente notato [9, p. 249] e il termine "equazione logistica" divenne comunemente usato. I dibattiti sul significato di questa equazione sono durati per molti anni. Per una discussione dettagliata, vedere [10, p. 64-97]. La conclusione fu probabilmente che non era una legge di base. Possiamo usare questa equazione per proiezioni a breve termine, ma non per proiezioni a lungo termine. Tuttavia, ecco come un famoso dizionario biografico riassume il lavoro di Verhulst sulla popolazione [11]:

> “Verhulst mostrò nel 1846 che gli ostacoli aumentavano in proporzione al rapporto tra l'eccesso di popolazione e la popolazione totale. Fu così portato a dare la cifra a 9.400.000 come limite massimo per la popolazione belga (che a proposito era di 9.581.000 nel 1967). La ricerca di Verhulst sulla legge della crescita della popolazione ne fa un precursore per i moderni specialisti in materia. "

Si noti che questo paragrafo fa riferimento al modello (3) e non al modello (1), anche se oggigiorno ricordiamo Verhulst solo a causa del modello (1). Inoltre, data la variabilità dei risultati di Verhulst per la popolazione massima K , sembrerebbe che confrontare un singolo risultato con l'attuale popolazione del Belgio non abbia davvero senso. La citazione precedente era anche fonte di confusione per riferimenti successivi a Verhulst. Dal 1996 ad esempio, uno dei siti più popolari sulla storia della matematica [12] cita [11] e racconta la storia in modo leggermente modificato (e aggiornato):

> "L'equazione differenziale non lineare che descrive la crescita di una popolazione biologica, che ha dedotto e studiato, ora porta il suo nome. Con la sua teoria, Verhulst predisse che il limite superiore della popolazione belga sarebbe stato di 9.400.000, mentre la popolazione nel 1994 era di 10.118.000 e questa previsione sembra piuttosto buona, dato l'effetto dell'immigrazione. "

Nota in questa citazione che "la sua teoria" si riferisce all'equazione logistica, che lo stesso Verhulst finisce per pensare che non fosse corretto. Inoltre, il risultato numerico del modello (3) è assegnato al modello (1), che dà l'impressione di una riabilitazione dell'equazione logistica per le proiezioni della popolazione a lungo termine. In un libro recente [13, p. 5], troviamo una variante simile con un nuovo aggiornamento:

> “Con la sua teoria, Verhulst ha previsto che la capacità limite della popolazione in Belgio sarebbe stata di 9,4 milioni. La popolazione totale in Belgio nel gennaio 2000 era di 10,24 milioni di abitanti, una differenza di soli 0,84 milioni, principalmente a causa dell'immigrazione. "

Il libro [14, p. 10] racconta una storia simile. Come scrisse Ronald Fisher sull'opera di Mendel [15, p. 6]:

> “La storia della scienza ha sofferto molto per l'uso da parte degli insegnanti di materiali di seconda mano e il conseguente oblio delle circostanze e dell'atmosfera intellettuale in cui sono state fatte le grandi scoperte del passato. Uno studio di prima mano è sempre istruttivo e spesso. . .pieno di sorprese. "

Grazie al Web, gli studi di prima mano sono ora notevolmente semplificati. La biblioteca dell'Università di Gottinga in Germania ha digitalizzato le riviste scientifiche con gli articoli di Verhulst dal 1845 al 1847: possono essere scaricati dal sito della biblioteca. Per quanto riguarda l'articolo del 1838, c'è una traduzione inglese in [16]. Per concludere, ecco una breve biografia di Verhulst [17, 18]. Per discussioni più recenti, vedi ad esempio [19, 20, 21, 22]:

- 1804: nascita a Bruxelles.
- 1822-1825: studi all'Università di Gand, tesi in matematica.
- 1829: pubblicazione della sua traduzione del libro di John Herschel "Trattato di luce".
- 1830: dopo la rivoluzione che porta all'indipendenza del Belgio, si interessa di politica, storia e "aritmetica politica".
- 1834: inizia a insegnare matematica a l'École Royale Militaire.
- 1835: il suo ex professore Quetelet pubblica " Essai de physique sociale"[23]. Questo è il punto di partenza per gli studi di Verhulst sulla crescita della popolazione.
- 1835-1840: professore alla Libera Università di Bruxelles.
- 1841: pubblicazione del suo trattato matematico sulle funzioni ellittiche. Elezione alla Royal Academy of Belgium.
- 1848: presidente dell'Accademia.
- 1849: morte a Bruxelles (probabilmente per tubercolosi).

Riferimenti bibliografici

1. Verhulst, P. –F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. –F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. –F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920. On the rate of growth ofthe population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre – Franvsois). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre Franvsois Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. http: //www-history.mcs.standrews. ac.uk/Biographies/Verhulst.html
13. Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H., 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P., Keyfitz, N., 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A., 1850. Pierre – Franvsois Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R., 1933. Pierre – Franvsois Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A., 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b
19. Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre – Franvsois Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B., 2004. Pierre – Franvsois Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf
21. Ausloos, M., Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d