Verhulst y la ecuación logística en la dinámica de la población.

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

En 1838, el matemático belga Pierre-François Verhulst publicó un artículo en el que introdujo (con diferentes anotaciones) la ecuación logística ahora conocida por el crecimiento de la población.

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\frac{K-P}{K} \tag{1}$$

[1] Ajustó los parámetros de esta ecuación a los datos de población de varios países, incluida Bélgica. El artículo no dice qué valores de r y K se obtuvieron. Pero parecería de la tabla presentada que Verhulst basó los cálculos para Bélgica en las siguientes hipótesis, obtenidas de datos reales:

$$P(1815) = 3\,494\,985\,, \quad P(1824) = 3\,816\,249\,, \quad P(1833) = 4\,142\,257\,.$$

Con estos tres puntos (tenga en cuenta que el modelo tiene tres parámetros: r, Ky una constante de integración), encontramos fácilmente K = 8.43 millones para la asíntota de la población. De hecho, si P_0, P_1 y P_2 son las poblaciones en t_0, $t_1 = t_0 + T$ y $t_2 = t_0 + 2T$, se tiene

$$K = P_1\frac{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2}{P_1^2 - P_0P_2}\,.$$

En 1845, Verhulst publicó otro artículo sobre el mismo tema. Introdujo el término "ecuación logística" y explicó con más detalle cómo estimar los parámetros. Esta vez utilizó suposiciones ligeramente diferentes, después de una mirada más cercana a los datos:

$$P(1815) = 3\,627\,253\,, \quad P(1830) = 4\,247\,113\,, \quad P(1845) = 4\,800\,861\,. \tag{2}$$

Obtuvo K = 6.58 millones [2], un resultado muy inferior al estimado anterior. Verhulst volvió a este tema en una breve nota al año siguiente [3] y finalmente en un artículo más largo publicado en 1847. En estos dos documentos, sugirió que había un error en la derivación de la ecuación logística. En su lugar, utilizó (de nuevo con diferentes anotaciones) un modelo de la forma

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\,\frac{K-P}{P} = r(K-P) \tag{3}$$

[4] Con los mismos datos (2), obtuvo K = 9,44 millones, un resultado todavía bastante diferente de los dos resultados anteriores. Para este segundo modelo,

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}\,.$$

La ecuación logística fue reintroducida varias décadas después por diferentes personas sin conocer el trabajo de Verhulst [5]. Fue utilizado para el crecimiento individual de animales, plantas, hombres y órganos del cuerpo [6], para el crecimiento de poblaciones de microorganismos [7], o como Verhulst para el crecimiento de poblaciones humanas como la población de los Estados Unidos [8]. El trabajo de Verhulst finalmente se notó [9, p. 249] y el término "ecuación logística" se utilizó comúnmente. Los debates sobre el significado de esta ecuación duraron muchos años. Para una discusión detallada, ver [10, p. 64-97]. La conclusión fue probablemente que no era una ley básica. Podemos usar esta ecuación para proyecciones a corto plazo, pero no para proyecciones a largo plazo. Sin embargo, así es como un famoso diccionario biográfico resume el trabajo de Verhulst sobre la población [11]:

> “Verhulst demostró en 1846 que los obstáculos aumentan en proporción a la proporción del exceso de población con respecto a la población total. Por lo tanto, fue llevado a dar la cifra de 9,400,000 como el límite superior para la población de Bélgica (que por cierto era de 9,581,000 en 1967). La investigación de Verhulst sobre la ley del crecimiento de la población lo convierte en un precursor para los especialistas modernos en el tema. "

Tenga en cuenta que este párrafo se refiere al modelo (3) y no al modelo (1), incluso si hoy en día recordamos a Verhulst solo por el modelo (1). Además, dada la variabilidad de los resultados de Verhulst para la población máxima K , parece que comparar un solo resultado con la población actual de Bélgica realmente no tiene sentido. La cita anterior también fue una fuente de confusión para referencias posteriores a Verhulst. Desde 1996, por ejemplo, uno de los sitios más populares sobre la historia de las matemáticas [12] cita [11] y cuenta la historia de una manera ligeramente modificada (y actualizada):

> "La ecuación diferencial no lineal que describe el crecimiento de una población biológica, que dedujo y estudió, ahora lleva su nombre. Con su teoría, Verhulst predijo que el límite superior de la población belga sería de 9,400,000. La población en 1994 fue de 10,118,000. Esta predicción parece bastante buena, dado el efecto de la inmigración. "

Tenga en cuenta en esta cita que "su teoría" se refiere a la ecuación logística, que Verhulst mismo termina pensando que no era correcta. Además, el resultado numérico del modelo (3) se asigna al modelo (1), que da la impresión de una rehabilitación de la ecuación logística para las proyecciones de población a largo plazo. En un libro reciente [13, p. 5], encontramos una variante cercana con una nueva actualización:

> “Con su teoría, Verhulst predijo que la capacidad límite de la población en Bélgica sería de 9,4 millones. La población total en Bélgica en enero de 2000 era de 10,24 millones de habitantes, una diferencia de solo 0,84 millones, principalmente debido a la inmigración. "

El libro [14, p. 10] cuenta una historia similar. Como Ronald Fisher escribió sobre el trabajo de Mendel [15, p. 6]:

> “La Historia de la Ciencia ha sufrido mucho por el uso por parte de los maestros de materiales de segunda mano y el consiguiente olvido de las circunstancias y la atmósfera intelectual en la que se hicieron los grandes descubrimientos del pasado. Un estudio de primera mano siempre es instructivo, y a menudo. . .lleno de sorpresas. "

Gracias a la Web, los estudios de primera mano ahora se simplifican enormemente. La biblioteca de la Universidad de Gotinga en Alemania ha digitalizado revistas científicas con los artículos de Verhulst de 1845 y 1847: se pueden descargar del sitio de la biblioteca. En cuanto al artículo de 1838, hay una traducción al inglés en [16]. Para concluir, aquí hay una breve biografía de Verhulst [17, 18]. Para discusiones más recientes, ver por ejemplo [19, 20, 21, 22]:

- 1804: nacimiento en Bruselas.
- 1822-1825: estudios en la Universidad de Gante, tesis en matemáticas.
- 1829: publicación de su traducción del libro de John Herschel "Tratado de la Luz".
- 1830: después de la revolución que lleva a la independencia de Bélgica, se interesa por la política, la historia y la "aritmética política".

- 1834: comienza a enseñar matemáticas en l'École Royale Militaire.
- 1835: su antiguo profesor Quetelet publica " Essai de physique sociale"[23]. Este es el punto de partida para los estudios de Verhulst sobre el crecimiento de la población.
- 1835-1840: profesor en la Universidad Libre de Bruselas.
- 1841: publicación de su tratado matemático sobre funciones elípticas. Elección a la Real Academia de Bélgica.
- 1848: presidente de la Academia.
- 1849: muerte en Bruselas (probablemente por tuberculosis).

Referencias bibliográficas

1. Verhulst, P. –F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. –F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. –F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920. On the rate of growth ofthe population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre – Franvsois). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre Franvsois Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. http: //www-history.mcs.standrews. ac.uk/Biographies/Verhulst.html
13. Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H., 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P., Keyfitz, N., 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A., 1850. Pierre – Franvsois Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R., 1933. Pierre – Franvsois Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A., 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b
19. Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre – Franvsois Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B., 2004. Pierre – Franvsois Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf
21. Ausloos, M., Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d