فرهولست والمعادلة اللوجستية في ديناميات السكان

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

في عام 1838 ، نشر عالم الرياضيات البلجيكي بيير فرانسوا فيرهولست مقالًا عرض فيه (مع رموز مختلفة) المعادلة اللوجيستية المعروفة الآن بنمو السكان

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\frac{K-P}{K} \tag{1}$$

[1]. قام بتعديل معايير هذه المعادلة لبيانات السكان من عدة بلدان ، بما في ذلك بلجيكا. لا توضح المقالة قيم r و K *التي* تم الحصول عليها. ولكن يبدو من الجدول المقدم أن Verhulst استند في حسابات بلجيكا على الفرضيات التالية ، التي تم الحصول عليها من البيانات الحقيقية:

$$P(1815) = 3\,494\,985\,, \quad P(1824) = 3\,816\,249\,, \quad P(1833) = 4\,142\,257\,.$$

بهذه النقاط الثلاث (لاحظ أن النموذج له ثلاث معلمات: r، Kوثابت الاندماج) نجد بسهولة $K = 8.43$ مليون لخط التقارب السكاني. في الواقع ، إذاP_0 ، P_1 و P_2 هم السكان في t_0، $t_1 = t_0 + T$ و $t_2 = t_0 + 2T$، نملك

$$K = P_1\frac{P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2}{P_1^2 - P_0P_2}\,.$$

في عام 1845 ، نشر Verhulst مقالًا آخر حول نفس الموضوع. قدم مصطلح "معادلة لوجستية" وشرح بمزيد من التفصيل كيفية تقدير المعلمات. هذه المرة استخدم افتراضات مختلفة قليلاً ، بعد إلقاء نظرة فاحصة على البيانات:

$$P(1815) = 3\,627\,253\,, \quad P(1830) = 4\,247\,113\,, \quad P(1845) = 4\,800\,861\,. \tag{2}$$

حصل على $K = 6.58$ مليون [2] ، وهي نتيجة أقل بكثير من التقدير السابق. عاد Verhulst إلى هذا الموضوع في ملاحظة قصيرة في العام التالي [3] وأخيرًا في مقال أطول نُشر في عام 1847. واقترح في هاتين الوثيقتين وجود خطأ في اشتقاق المعادلة اللوجيستية. بدلاً من ذلك ، استخدم (مرة أخرى مع رموز مختلفة) نموذجًا من النموذج

$$\frac{dP}{dt} = r\,P\,\frac{K-P}{P} = r(K-P) \tag{3}$$

[4]. باستخدام نفس البيانات (2) ، حصل على $K = 9.44$ مليون ، وهي نتيجة لا تزال مختلفة تمامًا عن النتيجتين السابقتين. بالنسبة لهذا النموذج الثاني ،

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}\,.$$

أعيد تقديم المعادلة اللوجستية بعد عدة عقود من قبل أشخاص مختلفين دون معرفة عمل Verhulst [5]. تم استخدامه للنمو الفردي للحيوانات والنباتات والرجال وأعضاء الجسم [6] ، لنمو تجمعات الكائنات الحية الدقيقة [7] ، أو Verhulst لنمو السكان مثل السكان من الولايات المتحدة [8]. لوحظ عمل Verhulst أخيرًا [9 ، ص. 249] أصبح مصطلح "معادلة لوجستية" شائع الاستخدام. استمرت المناقشات حول معنى هذه المعادلة لسنوات عديدة. للاطلاع على مناقشة تفصيلية ، انظر [10 ، ص. 64-97]. ربما كان الاستنتاج أنه لم يكن قانونًا أساسيًا. يمكننا استخدام هذه المعادلة للتوقعات قصيرة المدى ، ولكن ليس للإسقاطات طويلة المدى. ومع ذلك ، إليك كيف يلخص قاموس السيرة الذاتية الشهير عمل Verhulst على السكان [11]:

> أظهر فيرهولست عام 1846 أن العقبات تزداد بما يتناسب مع نسبة الزيادة السكانية إلى إجمالي السكان. وهكذا تم دفعه إلى إعطاء الرقم 9،400،000 كحد أعلى لسكان بلجيكا (والذي كان بالمناسبة 9،581،000 في عام 1967). إن بحث Verhulst حول قانون النمو السكاني يجعله مقدمة للمتخصصين الحديثين في هذا الموضوع. "

لاحظ أن هذه الفقرة تشير إلى النموذج (3) وليس إلى النموذج (1) ، حتى لو تذكرنا في الوقت الحاضر Verhulst فقط بسبب النموذج (1). بالإضافة إلى ذلك ، نظرًا لتنوع نتائج Verhulst لأقصى عدد من السكان K ، يبدو أن مقارنة نتيجة واحدة مع السكان الحاليين في بلجيكا لا معنى له حقًا. كان الاقتباس السابق أيضًا مصدرًا للارتباك للإشارات اللاحقة إلى Verhulst. منذ عام 1996 على سبيل المثال ، أحد المواقع الأكثر شعبية في تاريخ الرياضيات [12] يقتبس [11] ويحكي القصة بطريقة معدلة قليلاً (ومحدثة):

> "إن المعادلة التفاضلية غير الخطية التي تصف نمو مجموعة بيولوجية ، والتي استنتجها ودرسها ، تحمل الآن اسمه. مع نظريته ، تنبأ Verhulst بأن الحد الأعلى للسكان البلجيكيين سيكون 9،400،000. وكان عدد السكان في عام 1994 10،118،000. ويبدو هذا التنبؤ جيدًا إلى حد ما ، نظرًا لتأثير الهجرة. "

لاحظ في هذا الاقتباس أن "نظريته" تشير إلى المعادلة اللوجيستية ، التي انتهى بها Verhulst نفسه معتقدًا أنها غير صحيحة. بالإضافة إلى ذلك ، يتم تعيين النتيجة العددية للنموذج (3) إلى النموذج (1) ، والذي يعطي انطباعًا بإعادة تأهيل المعادلة اللوجيستية للتوقعات السكانية طويلة المدى. في كتاب حديث [13 ، ص. 5] ، نجد صيغة قريبة مع تحديث جديد:

> "من خلال نظريته ، تنبأ Verhulst أن القدرة الاستيعابية للسكان في بلجيكا ستكون 9.4 مليون. بلغ مجموع السكان في بلجيكا في يناير 2000 10.24 مليون نسمة ، بفارق 0.84 مليون فقط ، ويرجع ذلك أساسا إلى الهجرة. "

الكتاب [14 ، ص. 10] يحكي قصة مماثلة. كما كتب رونالد فيشر عن عمل مندل [15 ، ص. 6]:

> "لقد عانى تاريخ العلوم بشكل كبير من استخدام المدرسين للمواد المستعملة وما نتج عنها من نسيان الظروف والجو الفكري الذي تم فيه اكتشافات الماضي العظيمة. الدراسة المباشرة مفيدة دائمًا وغالبًا. . .مليئة بالمفاجآت. "

بفضل الويب ، أصبحت الدراسات المباشرة الآن مبسطة إلى حد كبير. قامت مكتبة جامعة غوتنغن في ألمانيا برقمنة المجلات العلمية بمقالات Verhulst من عام 1845 و 1847: يمكن تنزيلها من موقع المكتبة. أما مقال 1838 فيوجد ترجمة إنجليزية في [16]. في الختام ، هنا سيرة ذاتية قصيرة من 18 ، 17] Verhulst]. لمزيد من المناقشات الأخيرة ، انظر على سبيل المثال [19 ، 20 ، 21 ، 22]:

- 1804: الولادة في بروكسل.
- 1822-1825: دراسات في جامعة غينت ، أطروحة في الرياضيات.
- 1829: نشر ترجمته لكتاب جون هيرشل "معاهدة النور".
- 1830: بعد الثورة التي أدت إلى استقلال بلجيكا ، تهتم بالسياسة والتاريخ و "الحساب السياسي".
- 1834: بدأ تدريس الرياضيات في l'École Royale Militaire.
- 1835: أستاذه السابق Quetelet ينشر "Essai de physique sociale"[23]. هذه هي نقطة البداية لدراسات Verhulst حول النمو السكاني.
- 1835-1840: أستاذ في جامعة بروكسل الحرة.
- 1841: نشر أطروحته الرياضية حول الوظائف الإهليلجية. انتخاب للأكاديمية الملكية في بلجيكا.
- 1848: رئيس الأكاديمية.
- 1849: الوفاة في بروكسل (ربما بسبب مرض السل).

المراجع البيبليوغرافية

1. Verhulst, P. −F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 − 121.
2. Verhulst, P. −F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles − Lettres de Bruxelles, vol. XV http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. −F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles − Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re parti
4. Verhulst, P. −F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux − Arts de Belgique, vol. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic cur Population Studies 21, 99 − 108.
6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical signi Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 − 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro − organisms : A

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920.
On the rate of growth ofthe population of the United States since 1790 and its mathematical rep
Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre – Franضois).
In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre Franضois Verhulst.
The MacTutor History of Mathematics archive. http: //www-history.mcs.standrews.
ac.uk/Biographies/Verhulst.html
13.
Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender – structured Population Modeling
Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H., 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16.
Smith, D. P., Keyfitz, N., 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New
17. Quetelet, A., 1850. Pierre – Franضois Verhulst.
Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97
Traduction en anglais dans : Miner, J. R., 1933. Pierre – Franضois Verhulst, the discoverer of
Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A., 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle.
C. Mucquardt, Bruxelles. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b
19. Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre – Franضois Verhulst : une population dynamique.
Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B., 2004. Pierre – Franضois Verhulst et la loi logistique de la population.
Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. http://www.ehess.fr/revue-
msh/pdf/N167R893.pdf
21. Ausloos, M., Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos :
From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23.
Quetelet, A., 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique social
Bachelier, Paris. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d