

Verhulst和种群动力学中的逻辑方程

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

1838年，比利时数学家Pierre-François Verhulst发表了一篇文章，其中（用不同的符号）介绍了以人口增长而闻名的逻辑方程

$$\frac{dP}{dt} = rP \frac{K - P}{K} \quad (1)$$

[1]。他将该方程的参数调整为来自包括比利时在内的多个国家的人口数据。该文章没有说得到 r 和 K 的值。但是从提供的表格中可以看出，Verhulst根据下列假设从比利时得出的计算是基于真实数据得出的：

$$P(1815) = 3\,494\,985, \quad P(1824) = 3\,816\,249, \quad P(1833) = 4\,142\,257.$$

考虑到这三点（请注意，模型具有三个参数： r ， K 和积分常数），我们很容易找到 $K = 8,43$ 百万人口的渐近线。确实，如果 P_0 ， P_1 和 P_2 是在人口 t_0 ， $t_1 = t_0 + T$ 和 $t_2 = t_0 + 2T$ ，然后

$$K = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}.$$

1845年，Verhulst发表了关于同一主题的另一篇文章。他介绍了“物流”一词，并详细解释了如何估算参数。在仔细研究数据之后，这次他使用了略有不同的假设：

$$P(1815) = 3\,627\,253, \quad P(1830) = 4\,247\,113, \quad P(1845) = 4\,800\,861. \quad (2)$$

他获得了 $K = 658$ 万[2]，这一结果大大低于之前的估计。Verhulst在第二年[3]中以简短的注释重新讨论了该主题，最后在1847年发表的一篇较长的文章中。在这两个文档中，他建议方程的“推导”有误物流。相反，他（再次使用不同的符号）使用了表格的模型

$$\frac{dP}{dt} = rP \frac{K - P}{P} = r(K - P) \quad (3)$$

[4]。使用相同的数据（2），他获得了 $K = 944$ 万，这个结果仍然与之前的两个结果大不相同。对于第二个模型，

$$K = \frac{P_1^2 - P_0 P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}.$$

逻辑方程（1）在几十年后由不同的人重新引入，却不知道Verhulst的工作[5]。它被用于动植物，人和身体器官的个体生长[6]，用于微生物种群的生长[7]，或作为Verhulst用于人类种群（例如种群）的生长来自美国[8]。终于注意到了Verhulst的作品[9, p. 1]。[249]和“物流”一词成为常用语。关于物流方程意义的争论持续了多年。有关详细讨论，请参见[10, p. 1. 64-97]。结论可能是这不是基本法。我们可以将这个方程用于短期预测，但不适用于长期预测。然而，这是著名的传记字典如何总结Verhulst对人口的研究[11]：

“沃勒斯特（Verhulst）在1846年证明，障碍物的增加与人口过剩与总人口之比成正比。因此，他被要求给这个数字9,400,000作为比利时人口的上限（顺便说一句，1967年为9,581,000）。Verhulst对人口增长定律的研究使其成为该领域现代专家的先驱。”

请注意，即使我们今天仅因为模型（1）记住了Verhulst，本段也只涉及模型（3），而不涉及模型（1）。此外，考虑到Verhulst结果对于最大人口 K 的可变性，将单个结果与比利时当前人口进行比较似乎没有任何意义。前一引用也为以后引用Verhulst造成混乱。例如，自1996年以来，数学史上最受欢迎的网站之一[12]引用了[11]，并以稍微修改（和更新）的方式讲述了这个故事：

他推论和研究的描述生物种群增长的非线性微分方程现在以他的名字命名。根据他的理论，Verhulst预测比利时人口的上限为9,400,000，1994年为10,118,000，考虑到移民的影响，这一预测似乎还不错。”

让我们在这句话中指出，“他的理论”是指逻辑方程式，Verhulst本人最终认为这是不正确的。此外，模型（3）的数值结果可归因于模型（1），这给人以对长期人口预测的逻辑方程的复原印象。在最近的一本书中[13, p. 5]，有一个带有新更新的紧密变体：

“根据他的理论，Verhulst预测比利时的人口极限容量为940万。比利时2000年1月的总人口为1024万，相差仅84万，主要是由于移民。”

这本书[14, p. 10]讲述了一个类似的故事。正如罗纳德·费舍尔（Ronald Fisher）关于孟德尔[15, p. 1]的著作所写。6]：

“科学史受到教师使用二手资料的痛苦，以及随之而来的遗忘情况和过去创造重大发现的知识氛围所遭受的巨大痛苦。亲自学习总是很有启发性的，而且经常...充满惊喜。”

由于有了Web，第一手研究现在大大简化了。德国哥廷根大学图书馆已经用Verhulst的1845年和1847年的文章对报纸进行了数字化处理：可以从图书馆的网站上下载它们。至于1838年的文章，[16]中有英文翻译。总而言之，这是Verhulst的简短传记[17, 18]。有关更多最新讨论，请参见例如[19, 20, 21, 22]：

- 1804年：在布鲁塞尔出生。
- 1822-1825年：在根特大学攻读数学论文。
- 1829年：出版了约翰·赫歇尔（John Herschel）的著作《光之条约》的译本。
- 1830年：革命导致比利时独立后，对政治，历史和“政治算术”感兴趣。
- 1834年：开始在 l'École Royale Militaire。
- 1835年：他的前教授Quetelet发表了《Essai de physique sociale》[23]。这是Verhulst对人口增长进行研究的起点。
- 1835-1840年：布鲁塞尔自由大学教授。
- 1841年：发表了有关椭圆函数的数学论文。入选比利时皇家学院。
- 1848年：学院院长。
- 1849年：在布鲁塞尔逝世（可能是结核病）。

参考文献

1. Verhulst, P. -F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. -F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. -F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. -F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J., 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B., 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G., Kesava Pai, M., 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R., Reed, L. J., 1920. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R., 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphia.
10. Kingsland, S. E., 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre – François). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996. Pierre François Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>
13. Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphia.
14. Istas, J., 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.

15. Bennett, J. H. , 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P. , Keyfitz, N. , 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A. , 1850. Pierre – François Verhulst.
Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124.
Traduction en anglais dans : Miner, J. R. , 1933. Pierre – François Verhulst, the discoverer of the logistic curve.
Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A. , 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle.
C. Mucquardt, Bruxelles. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b>
19. Mawhin, J. , 2002. Les héritiers de Pierre – François Verhulst : une population dynamique.
Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B. , 2004. Pierre – François Verhulst et la loi logistique de la population.
Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. <http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf>
21. Ausloos, M. , Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos :
From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N. , 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A. , 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d>