

Verhulst en de logistieke vergelijking in populatiedynamica

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

In 1838 publiceerde de Belgische wiskundige Pierre-François Verhulst een artikel waarin hij (met verschillende notaties) de logistieke vergelijking introduceerde die nu bekend staat om de groei van een bevolking

$$\frac{dP}{dt} = rP \frac{K - P}{K} \quad (1)$$

[1]. Hij heeft de parameters van deze vergelijking aangepast aan bevolkingsgegevens uit verschillende landen, waaronder België. Het artikel zegt niet welke waarden van r en K werden verkregen. Maar uit de gepresenteerde tabel blijkt dat Verhulst zijn berekeningen voor België baseerde op de volgende hypothesen, verkregen uit echte gegevens:

$$P(1815) = 3\,494\,985, \quad P(1824) = 3\,816\,249, \quad P(1833) = 4\,142\,257.$$

Met deze drie punten (merk op dat het model drie parameters heeft: r , K en een integratieconstante), vinden we gemakkelijk $K = 8,43$ miljoen voor de asymptoot van de bevolking. Inderdaad, als P_0 , P_1 en P_2 zijn de populaties in t_0 , $t_1 = t_0 + T$ en $t_2 = t_0 + 2T$, dus

$$K = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}.$$

In 1845 publiceerde Verhulst nog een artikel over hetzelfde onderwerp. Hij introduceerde de term "logistiek" en legde in meer detail uit hoe de parameters te schatten. Deze keer gebruikte hij iets andere aannames, na een nadere blik op de gegevens:

$$P(1815) = 3\,627\,253, \quad P(1830) = 4\,247\,113, \quad P(1845) = 4\,800\,861. \quad (2)$$

Hij behaalde $K = 6,58$ miljoen [2], een resultaat dat veel lager is dan de vorige schatting. Verhulst kwam het jaar daarop in een korte notitie [3] en tenslotte in een langer artikel uit 1847 terug. In deze twee documenten suggereerde hij dat er een fout was in de "afleiding" van de vergelijking logistiek. In plaats daarvan gebruikte hij (opnieuw met verschillende notaties) een model van het formulier

$$\frac{dP}{dt} = rP \frac{K - P}{P} = r(K - P) \quad (3)$$

[4]. Met dezelfde gegevens (2) behaalde hij $K = 9,44$ miljoen, een resultaat dat nog steeds heel anders is dan de twee voorgaande resultaten. Voor dit tweede model,

$$K = \frac{P_1^2 - P_0 P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}.$$

De logistieke vergelijking (1) werd enkele decennia later opnieuw ingevoerd door verschillende mensen zonder het werk van Verhulst te kennen [5]. Het werd gebruikt voor de individuele groei van dieren, planten, mannen en lichaamsorganen [6], voor de groei van populaties van micro-organismen [7] of als Verhulst voor de groei van menselijke populaties zoals de populatie uit de Verenigde Staten [8]. Het werk van Verhulst werd eindelijk opgemerkt [9, p. 249] en de term "logistiek" werd algemeen gebruikt. Discussies over de betekenis van de logistieke vergelijking duurden vele jaren. Voor een gedetailleerde bespreking, zie [10, p. 64-97]. De conclusie was waarschijnlijk dat het geen basiswet was. We kunnen deze vergelijking gebruiken voor kortetermijnprojecties, maar niet voor projecties op lange termijn. Desalniettemin, hier is hoe een beroemd biografisch woordenboek het werk van Verhulst over de bevolking samenvat [11]:

"Verhulst toonde in 1846 aan dat de obstakels toenemen in verhouding tot de verhouding tussen het bevolkingsoverschot en de totale bevolking. Zo werd hij ertoe gebracht om het cijfer 9.400.000 als bovengrens voor de Belgische bevolking te geven (dat was trouwens 9.581.000 in 1967). Verhulst's onderzoek naar de wet van bevolkingsgroei maakt het een voorloper van moderne specialisten op dit gebied."

Merk op dat deze paragraaf verwijst naar het model (3) en niet naar het model (1), ook al herinneren we ons Verhulst tegenwoordig alleen vanwege het model (1). Bovendien lijkt het, gezien de variabiliteit van Verhulst's resultaten voor de maximale populatie K , dat het niet echt logisch is om één enkel resultaat te vergelijken met de huidige populatie in België. Het vorige citaat was ook een bron van verwarring voor latere verwijzingen naar Verhulst. Sinds 1996 citeert bijvoorbeeld een van de meest populaire sites in de geschiedenis van de wiskunde [12] [11] en vertelt het verhaal op een enigszins gewijzigde (en bijgewerkte) manier:

"De niet-lineaire differentiaalvergelijking die de groei van een biologische populatie beschrijft, die hij heeft afgeleid en bestudeerd, draagt nu zijn naam. Met zijn theorie voorspelde Verhulst dat de bovengrens van de Belgische bevolking 9.400.000 zou bedragen. De bevolking in 1994 was 10.118.000. Deze voorspelling lijkt redelijk goed, gezien het effect van immigratie."

Laten we in dit citaat opmerken dat "zijn theorie" verwijst naar de logistieke vergelijking, dat Verhulst zelf uiteindelijk denkt dat het niet correct was. Bovendien wordt het numerieke resultaat van model (3) toegeschreven aan model (1), wat de indruk wekt van een rehabilitatie van de logistieke vergelijking voor langetermijnbevolkingsprojecties. In een recent boek [13, p. 5], er is een sterk gelijkende variant met een nieuwe update:

"Met zijn theorie voorspelt Verhulst dat de limietcapaciteit van de bevolking in België 9,4 miljoen zou bedragen. De totale bevolking in België in januari 2000 was 10,24 miljoen inwoners, een verschil van slechts 0,84 miljoen, voornamelijk als gevolg van immigratie."

Het boek [14, p. 10] vertelt een soortgelijk verhaal. Zoals Ronald Fisher schreef over het werk van Mendel [15, p. 6]:

“De geschiedenis van de wetenschap heeft enorm geleden onder het gebruik door docenten van tweedehands materiaal en de daaruit voortvloeiende vergetelheid van de omstandigheden en de intellectuele sfeer waarin de grote ontdekkingen van het verleden werden gedaan. Een onderzoek uit de eerste hand is altijd leerzaam en vaak . . . vol verrassingen. ”

Dankzij het web worden onderzoeken uit de eerste hand nu aanzienlijk vereenvoudigd. De bibliotheek van de universiteit van Göttingen in Duitsland heeft de kranten gedigitaliseerd met Verhulst's artikelen uit 1845 en 1847: ze kunnen worden gedownload van de website van de bibliotheek. Wat betreft het artikel van 1838, er is een Engelse vertaling in [16]. Tot slot volgt hier een korte biografie van Verhulst [17, 18]. Zie voor recentere discussies bijvoorbeeld [19, 20, 21, 22]:

- 1804: geboorte in Brussel.
- 1822-1825: studies aan de Universiteit Gent, scriptie wiskunde.
- 1829: publicatie van zijn vertaling van John Herschels boek "Treaty of Light".
- 1830: na de revolutie die leidt tot de onafhankelijkheid van België, is geïnteresseerd in politiek, geschiedenis en "politieke rekenkunde".
- 1834: begint wiskunde te onderwijzen bij l'École Royale Militaire.
- 1835: zijn voormalige professor Quetelet publiceert " Essai de physique sociale"[23]. Dit is het uitgangspunt voor Verhulst-onderzoeken naar bevolkingsgroei.
- 1835-1840: professor aan de Vrije Universiteit Brussel.
- 1841: publicatie van zijn wiskundige verhandeling over elliptische functies. Verkiezing aan de Koninklijke Academie van België.
- 1848: president van de Academie.
- 1849: overlijden in Brussel (waarschijnlijk door tuberculose).

Referenties

1. Verhulst, P. –F. , 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F. , 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XVIII, 1 – 45. http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. –F. , 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re partie, 226 – 227.
4. Verhulst, P. –F. , 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. XX, 1 – 32. http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J. , 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B. , 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G. , Kesava Pai, M. , 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A mathematical study. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R. , Reed, L. J. , 1920. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
9. Pearl, R. , 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
10. Kingsland, S. E. , 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
11. Pelseneer, J. , 1976. Verhulst (Pierre – François). In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
12. O'Connor, J. J. , Robertson, E. F. , 1996. Pierre François Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-historie.mcs.stand.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>
13. Iannelli, M. , Martcheva, M. , Milner, F. A. , 2005. Gender – structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
14. Istas, J. , 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
15. Bennett, J. H. , 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
16. Smith, D. P. , Keyfitz, N. , 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York.
17. Quetelet, A. , 1850. Pierre – François Verhulst. Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97 – 124. Traduction en anglais dans : Miner, J. R. , 1933. Pierre – François Verhulst, the discoverer of the logistic curve. Human Biology 5, 673 – 689.
18. Quetelet, A. , 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle. C. Mucquardt, Bruxelles. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b>
19. Mawhin, J. , 2002. Les héritiers de Pierre – François Verhulst : une population dynamique. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
20. Delmas, B. , 2004. Pierre – François Verhulst et la loi logistique de la population. Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. <http://www.chess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf>
21. Ausloos, M. , Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
22. Bacaër, N. , 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
23. Quetelet, A. , 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Bachelier, Paris. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d>