

فر هولست والمعادلة اللوجستية في ديناميات السكان

European Communications in Mathematical and Theoretical Biology 10 (2008) 24 – 26

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01562340>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, France
nicolas.bacaer@ird.fr

في عام 1838 ، نشر عالم الرياضيات البلجيكي بيير فرانسوا فير هولست مقالاً عرض فيه (مع رموز مختلفة) المعادلة اللوجيستية المعروفة الآن بنمو السكان

$$\frac{dP}{dt} = r P \frac{K - P}{K} \quad (1)$$

[1]. قام بتعديل معايير هذه المعادلة ليبيانات السكان من عدة بلدان ، بما في ذلك بلجيكا. لا توضح المقالة قيم r و K التي تم الحصول عليها. ولكن يبدو من الجدول المقدم أن Verhulst استندت حساباتها لبلجيكا على الفرضيات التالية التي تم الحصول عليها من البيانات الحقيقية:

$$P(1815) = 3\,494\,985, \quad P(1824) = 3\,816\,249, \quad P(1833) = 4\,142\,257.$$

بهذه النقاط الثلاث (لاحظ أن النموذج له ثلاث معلمات: r ، K وثابت للتكامل) نجدها بسهولة $K = 8,43$ مليون خط مقارب للسكان. في الواقع ، إذا P_0 ، P_1 و P_2 هم السكان في t_0 ، $t_1 = t_0 + T$ و $t_2 = t_0 + 2T$ ، ثم

$$K = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2 P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}.$$

في عام 1845 ، نشر Verhulst مقالاً آخر حول نفس الموضوع. قدم مصطلح "اللوجستيات" وشرح بمزيد من التفصيل كيفية تقدير المعلمات. هذه المرة استخدم افتراضات مختلفة قليلاً ، بعد إلقاء نظرة فاحصة على البيانات:

$$P(1815) = 3\,627\,253, \quad P(1830) = 4\,247\,113, \quad P(1845) = 4\,800\,861. \quad (2)$$

حصل على $K = 6.58$ مليون [2] ، وهي نتيجة أقل بكثير من التقدير السابق. عاد Verhulst إلى هذا الموضوع في ملاحظة قصيرة في العام التالي [3] وأخيراً في مقال أطول نُشر عام 1847. واقترح في هاتين الوثيقتين وجود خطأ في "اشتقاق" المعادلة اللوجستيات. بدلاً من ذلك ، استخدم (مرة أخرى مع رموز مختلفة) نموذجًا من النموذج

$$\frac{dP}{dt} = r P \frac{K - P}{P} = r(K - P) \quad (3)$$

[4]. باستخدام نفس البيانات (2) ، حصل على $K = 9.44$ مليون ، وهي نتيجة لا تزال مختلفة تمامًا عن النتيجة السابقة. بالنسبة لهذا النموذج الثاني ،

$$K = \frac{P_1^2 - P_0 P_2}{2 P_1 - P_0 - P_2}.$$

أعيد تقديم المعادلة اللوجستية (1) بعد عدة عقود من قبل أشخاص مختلفين دون معرفة عمل [5] Verhulst. تم استخدامه للنمو الفردي للحيوانات والنباتات والرجال وأعضاء الجسم [6] ، لنمو تجمعات الكائنات الحية الدقيقة [7] ، أو Verhulst لنمو السكان مثل السكان من الولايات المتحدة [8]. لوحظ عمل Verhulst أخيراً [9] ، ص. 249] وأصبح مصطلح "اللوجستيات" شائع الاستخدام. استمرت المناقشات حول معنى المعادلة اللوجستية لسنوات عديدة. للاطلاع على مناقشة تفصيلية ، انظر [10] ، ص. 64-97. ربما كان الاستنتاج أنه لم يكن قانوناً أساسياً. يمكننا استخدام هذه المعادلة للتوقعات قصيرة المدى ، ولكن ليس للإسقاطات طويلة المدى. ومع ذلك ، إليك كيف يلخص قاموس السيرة الذاتية الشهير عمل Verhulst على السكان [11]:

"أظهر فير هولست في عام 1846 أن العقبات تزداد بما يتناسب مع نسبة الزيادة السكانية إلى إجمالي السكان. وهكذا تم دفعه إلى إعطاء الرقم 9,400,000 كحد أعلى لسكان بلجيكا (والذي كان بالمناسبة 9,581,000 في عام 1967). إن بحث Verhulst حول قانون النمو السكاني يجعله مقدمة للمتخصصين الحديثين في هذا الموضوع."

لاحظ أن هذه الفقرة تشير إلى النموذج (3) وليس إلى النموذج (1) ، حتى إذا تذكرنا في الوقت الحاضر Verhulst فقط بسبب النموذج (1). بالإضافة إلى ذلك ، نظراً لتنوع نتائج Verhulst لأقصى عدد من السكان K ، يبدو أن مقارنة نتيجة واحدة مع السكان الحاليين في بلجيكا لا معنى له حقاً. كان الاقتباس السابق أيضاً مصدرًا للإشارات اللاحقة إلى Verhulst. منذ عام 1996 على سبيل المثال ، أحد أشهر المواقع في تاريخ الرياضيات [12] يقتبس [11] ويخبر القصة بطريقة معدلة قليلاً (ومحدثة):

"إن المعادلة التفاضلية غير الخطية التي تصف نمو مجموعة بيولوجية ، والتي استنتجها ودرسها ، تحمل الآن اسمه. مع نظريته ، تتبأ Verhulst بأن الحد الأعلى للسكان البلجيكين سيكون 9,400,000. وكان عدد السكان في عام 1994 10,118,000. ويبدو هذا التنبؤ جيداً إلى حد ما ، نظراً لتأثير الهجرة. "

دعونا نلاحظ في هذا الاقتباس أن "نظريته" تشير إلى المعادلة اللوجيستية ، التي انتهى بها Verhulst نفسه معتقداً أنها غير صحيحة. بالإضافة إلى ذلك ، تُعزى النتيجة العددية للنموذج (3) إلى النموذج (1) ، الذي يعطي انطباقاً بإعادة تأهيل المعادلة اللوجيستية للتوقعات السكانية طويلة المدى. في كتاب حديث [13 ، ص. 5] ، هناك متغير قريب مع تحديث جديد:

"من خلال نظريته ، يتنبأ Verhulst أن القدرة القصوى للسكان في بلجيكا ستكون 9.4 مليون. بلغ مجموع السكان في بلجيكا في يناير 2000 10.24 مليون نسمة ، بفارق 0.84 مليون فقط ، ويرجع ذلك أساساً إلى الهجرة. "

الكتاب [14 ، ص. 10] يحكي قصة مماثلة. كما كتب رونالد فيشر عن عمل مندل [15 ، ص. 6]:

"لقد عانى تاريخ العلوم إلى حد كبير من استخدام المدرسين للمواد المستعملة ، ومن النسيان الناجم عن الظروف والجو الفكري الذي تم فيه اكتشافات الماضي العظيمة. دائماً ما تكون الدراسة المباشرة مفيدة ، وغالباً ما تكون مفيدة. . مليء بالمفاجآت. "

بفضل الويب ، أصبحت الدراسات المباشرة الآن مبسطة إلى حد كبير. قامت مكتبة جامعة غوتنغن في ألمانيا برقمنة الصحف بمقالات Verhulst من عام 1845 و 1847: يمكن تنزيلها من موقع المكتبة على الإنترنت. أما مقال 1838 فيوجد ترجمة إنجليزية في [16]. في الختام ، هنا سيرة ذاتية قصيرة من [17 ، 18] [Verhulst]. لمزيد من المناقشات الأخيرة ، انظر على سبيل المثال [19 ، 20 ، 21 ، 22]:

- 1804: الولادة في بروكسل.
- 1822-1825: دراسات في جامعة غينت ، أطروحة في الرياضيات.
- 1829: نشر ترجمته لكتاب جون هيرشل "معاهدة الضوء".
- 1830: بعد الثورة التي أدت إلى استقلال بلجيكا ، تهتم بالسياسة والتاريخ و "الحساب السياسي".
- 1834: بدأ تدريس الرياضيات في l'École Royale Militaire.
- 1835: أستاذه السابق Quetelet ينشر "Essai de physique sociale" [23]. هذه هي نقطة البداية لدراسات Verhulst حول النمو السكاني.
- 1835-1840: أستاذ في جامعة بروكسل الحرة.
- 1841: نشر أطروحته الرياضية حول الوظائف الإهليلجية. انتخاب للأكاديمية الملكية في بلجيكا.
- 1848: رئيس الأكاديمية.
- 1849: الوفاة في بروكسل (ربما بسبب مرض السل).

المراجع

1. Verhulst, P. –F. , 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol. X, 113 – 121.
2. Verhulst, P. –F. , 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Bruxelles, vol. XV http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
3. Verhulst, P. –F. , 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Belgique, vol. XIII, 1re parti
4. Verhulst, P. –F. , 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique, vol. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013
5. Lloyd, P. J. , 1967. American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve. Population Studies 21, 99 – 108.
6. Robertson, T. B. , 1908. On the normal rate of growth of an individual and its biochemical signifi. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581 – 614.
7. McKendrick, A. G. , Kesava Pai, M. , 1911. The rate of multiplication of micro – organisms : A

- Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 31, 649 – 655.
8. Pearl, R. , Reed, L. J. , 1920.
On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation
Proceedings of the National Academy of Sciences 6, no.6, 275 – 288.
 9. Pearl, R. , 1922. The Biology of Death. Lippincott, Philadelphie.
 10. Kingsland, S. E. , 1985. Modeling Nature. Presses de l'Université de Chicago.
 11. Pelseneer, J. , 1976. Verhulst (Pierre – François).
In : Gillispie, C. C. (Ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol.13. C. Scribner's sons, New York
 12. O'Connor, J. J. , Robertson, E. F. , 1996. Pierre François Verhulst.
The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>
 13.
Iannelli, M. , Martcheva, M. , Milner, F. A. , 2005. Gender – structured Population Modeling
Mathematical Methods, Numerics, and Simulations. SIAM, Philadelphie.
 14. Istas, J. , 2005. Mathematical Modeling for the Life Sciences. Springer, New York.
 15. Bennett, J. H. , 1965. Experiments in Plant Hybridisation. Oliver & Boyd, Édimbourg.
 16.
Smith, D. P. , Keyfitz, N. , 1977. Mathematical Demography : Selected Papers. Springer, New York
 17. Quetelet, A. , 1850. Pierre – François Verhulst.
Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux – Arts de Belgique 16, 97
Traduction en anglais dans : Miner, J. R. , 1933. Pierre – François Verhulst, the discoverer of t
Human Biology 5, 673 – 689.
 18. Quetelet, A. , 1867. Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXe siècle.
C. Mucquardt, Bruxelles. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b>
 19. Mawhin, J. , 2002. Les héritiers de Pierre – François Verhulst : une population dynamique.
Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 349 – 378.
 20. Delmas, B. , 2004. Pierre – François Verhulst et la loi logistique de la population.
Mathématiques et Sciences Humaines 167, 51 – 81. <http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf>
 21. Ausloos, M. , Dirickx, M. (ed.), 2006. The Logistic Map and the Route to Chaos :
From the Beginnings to Modern Applications. Springer – Verlag, Berlin.
 22. Bacaër, N. , 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
 23.
Quetelet, A. , 1835. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique social
Bachelier, Paris. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d>