



**HAL**  
open science

## Cas d'existence de solutions d'EDP.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

| Samy Skander Bahoura. Cas d'existence de solutions d'EDP.. 2017. hal-01559242v9

**HAL Id: hal-01559242**

**<https://hal.science/hal-01559242v9>**

Submitted on 6 Jan 2021 (v9), last revised 18 Jul 2022 (v17)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## CAS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'EDP.

SAMY SKANDER BAHOURA

### 1. CAS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'EDP

RÉSUMÉ. Estimations uniformes pour l'équation de Yamabe, l'équation du type Yamabe, l'équation de la courbure scalaire prescrite, l'équation du type courbure scalaire prescrite, l'équation de Gauss, l'équation de type Gauss. On se pose la question de savoir s'il y a des solutions.

#### En dimension 2 :

1) Les solutions de Liouville en fonction des fonctions holomorphes dont les dérivées ne s'annulent pas, voir le livre de C. Bandle.

2) Sur la boule unité, il y a des solutions radiales, nulle au bord, cela revient à résoudre une équation différentielle.

3) Si le domaine n'est plus une boule, par la méthode des sur et sous solutions, il y a des solutions au problème de Gelfand,  $u = 0$  est sous solution et la fonction distance est une sur solution. (Voir Dupaigne).

4) Par la méthode variationnelle, il y a toujours des solutions, c'est lié à la compacité de l'injection de Moser-Trudinger dans  $L^1$ .

Pour la dimension 2, sur des surfaces compactes sans bord, il y a des résultats d'existence dans le livre d'Aubin, par la méthode variationnelle si la courbure scalaire  $S = -1$  on peut minorer les solutions, lorsque  $S = 0$  il se peut qu'on ne puisse pas minorer les solutions.

Pour une courbure scalaire négative, on peut résoudre le problème de la courbure scalaire prescrite avec une courbure prescrite  $f \leq 0$  par la méthode des sur et sous solutions, puis on rajoute une constante ou fonction petite  $f + c$  ou  $f + g$ ,  $c, g > 0$ . Dans ce cas, il se peut qu'on puisse minorer les solutions. C'est fait dans le livre d'Aubin.

Dans le cas nul (courbure scalaire nulle, par la méthode variationnelle), on peut résoudre le problème de la courbure prescrite, pour une courbure prescrite  $f$  changeant de signe et  $\int f < 0$ . Dans ce cas il se peut que les solutions ne soient pas minorables. C'est le problème de Kazdan-Warner. C'est fait dans le livre d'Aubin.

En ce qui nous concerne, on se placera sur la partie positive de  $f + c = c > 0$  et  $f + g = g > 0$ .

On peut résoudre le Problème de la courbure scalaire sur une surface compacte non orientable, c'est fait dans le livre d'Aubin pour le Projectif réel de dimension 2,  $\mathbb{P}_2$ .

#### En dimension $\geq 3$ .

1) Pour l'équation de Yamabe (5 et 6) et l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 : Quand la variété est compacte sans bord, les résultats existent par Aubin-Schoen en dimension 5 et 6.

Si on considère une fonction  $f$  changeant de signe et que la courbure scalaire  $S_g = 0$  (et de métrique  $g$ ), par la méthode variationnelle  $f$  est courbure scalaire d'une métrique conforme, voir le livre de Hebey (pour les dimensions 3, 4, le théorème d'Escobar-Schoen) et le livre d'Aubin (le Théorème d'Escobar-Schoen dans le cas conformément plat et le Théorème de Bismuth). Voir aussi dans le livre d'Aubin d'autres conditions sur  $f$  pour qu'elle soit courbure scalaire d'une métrique conforme. Dans le cas, changeant de signe on se placera sur l'ensemble  $\{f > 0\}$ . Ceci est valable en toute dimension  $\geq 3$  (conformément plat, Escobar-Schoen et Aubin et invariant de Yamabe positif).

Pour la dimension 6, on résout le problème de la courbure scalaire prescrite sur une variété de courbure scalaire  $S_g = -1$  (de métrique  $g$ ), pour une courbure prescrite  $f \leq 0$ , par exemple une cutoff avec  $f = 0$  une boule, puis par un théorème dans le livre d'Aubin, il existe un voisinage de  $f$  dans  $C^\alpha$ , dans lequel on peut résoudre le problème de la courbure prescrite.

Voir dans le livre d'Aubin la condition de Rauzy, Ouyang, Tang, Vazquez-Veron, la valeur propre du Laplacien doit être plus grande que la courbure scalaire pour résoudre dans le cas négatif le problème de la courbure scalaire prescrite avec une courbure prescrite  $f$  cutoff. Or en prenant des petites boules, on a grâce au Théorème de Levy-Brhul, le comportement asymptotique des valeurs propres du Laplacien des petites boules géodésiques (elle le prouve dans le cas de variétés Riemanniennes analytiques), voir l'article et le monographe de Leon Karp-Mark Pinsky (ils le prouvent dans le cas de variétés Riemanniennes  $C^\infty$ ). (C'est la condition de Rellich sur les valeurs propres, développement asymptotique).

On résout le problème de la courbure prescrite pour des fonctions cutoff  $f \leq 0$ , par exemple (de boules petites), puis on ajoute une constante positive petite pour avoir  $f + c$  courbure prescrite d'une métrique conforme telle que  $f + c = c > 0$  = boule et  $f + c$  est négative dans un autre ensemble. Alors on remarque que la ou la solution est minimum, alors elle est minorée par une constante strictement positive. On vient de construire un exemple de solutions minorées par une constante positive, qui est un exemple de solutions en dimension 6 pour la quelle le minimum est minoré par une constante positive et est solution de Yamabe dans la boule ou  $f + c = c > 0$ . (le minorant est  $m = 1/(1 - c)$ , si on suppose,  $0 \geq f \geq -1$ , par exemple, (on peut remplacer  $-1$  par  $-\bar{M} < 0$  quelconque dans  $0 \geq f \geq -\bar{M}$ ), utiliser l'équation et le fait qu'en  $P$  point minimum de la solution  $u$ ,  $\Delta u(P) \leq 0$ ). (Journal of Functional Analysis).

Pour la dimension 4 et l'équation de la courbure prescrite, il suffit de suivre le même chemin que pour la dimension 6, en remplaçant  $c > 0$  par une fonction positive voisine de  $c$ ,  $c > 0$  petite, alors les solutions sont minorées par une constante  $m > 0$ . (Voir Travail de These dans le cas plat (JMPA) et Journal of Mathematical Analysis and Applications).

Quand la variété a un bord :

En dimension 5, il y a des solutions voir l'article de Z-C. Han et YY.Li, l'opérateur doit être de type positif, ce qui est possible si on considère des boules géodésiques, la courbure moyenne est alors presque constante et positive (proche de de la sphère), on choisit la courbure scalaire et de Ricci non constantes pour avoir un point non ombilique. (Journal of Functional Analysis).

2) Pour l'équation du type Yamabe : si  $R = \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g$  avec  $S_g$  la courbure scalaire et  $g$  la métrique.

Quand la variété est compacte sans bord, à partir de la dimension 4, il y a les résultats d'Aubin pour un opérateur du type  $(\Delta + a$ , avec  $a < R$  en un point). (Bulletin des Sciences Mathématiques).

Quand la variété a un bord, à partir de la dimension 5, il y a les résultats de Holzman pour un opérateur du type  $(\Delta + a$ , avec  $a < R$  en un point intérieur). (Bulletin des Sciences Mathématiques).

3) Pour l'équation du type courbure scalaire prescrite :

Dans le cas sous-critique tendant vers le critique, il y a des solutions par la méthode variationnelle car l'injection de Sobolev est compacte dans ce cas. (Travail de Thèse).

4) Dans le cas radial, il y a des exemples dans l'article de C.C.Chen- C.S. Lin, propositions 4.2 et 4.3 (de : Comm. Pure. Applied. Math. 1997). avec des courbures prescrites de la forme  $V = 1 - Kr^\rho$ ,  $1 < \rho < n - 2$ . (Voir travail de These, pour les fonctions radiales).

Il y a les résultats de Brezis-Nirenberg dans le cas d'un ouvert de l'espace euclidien en dimension  $\geq 4$ , pour une perturbation non linéaire sous critique de l'équation de Yamabe dans le cas d'un ouvert plat. (Voir travail de Thèse).

Pour l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, on en a parlé ci-dessus, il suffit de considérer une courbure prescrite changeant de signe de telle manière que les solutions soient positives et minorées et se placer sur la partie positive de la courbure prescrite. (Voir Travail de These dans le cas plat (JMPA) et Journal of Mathematical Analysis and Applications).

Pour la dimension 2, les estimations a priori ont pour but de prouver l'existence de solutions par la méthode du degré topologique de Leray-Schauder, comme dans De Figueiredo-Lions-Nussbaum, une des conditions est que l'opérateur compact  $M$  est nulle en 0, ici cette condition n'est pas satisfaite car il y a une exponentielle. Cette méthode peut s'appliquer à l'exponentielle, et aux problèmes des valeurs propres non-linéaires. (Crandall-Rabinowitz prouvent l'existence d'une solution  $u_\lambda$  stable et la condition de stabilité implique que  $(u_\lambda)$  est bornée dans  $C^0$ . De Figueiredo-Lions-Nussbaum prouvent en utilisant le degré topologique qu'il y a une deuxième solution  $v_\lambda$  en utilisant le fait que  $(u_\lambda)$  est bornée dans  $C^0$ , l'estimation a priori était déjà donné

dans la condition de stabilité de Crandall-Rabinowitz, par contre on ne sait pas si  $(v_\lambda)$  est bornée dans  $C^0$ , c'est en partie l'objet de ce qu'on fait ici, borner les solutions et en particulier  $(v_\lambda)$ .

D'autre part ce cas particulier (l'exponentielle) peut induire l'existence de solutions par la méthode des sur et sous solutions (voir Dupaigne), en fait ici on s'intéresse aux estimations a priori des solutions d'équations du type Gauss. On a une compacité à la Gromov des suites de métriques ou bien un théorème de compacité de fonctions (Ascoli ou d'autres théorèmes, voir les livres de Brezis et Aubin, dans  $L^p$ , fonctions bornées dans une certaine topologie,  $L^p, H^1$  par exemple et donc compacité faible) ou si on revient aux EDP, des estimations a priori elliptiques.

Pour les dimensions  $\geq 3$ , on a des inégalités du type Harnack, une particularité de ces équations à exposant critique de Sobolev comme pour les fonctions harmoniques. C'est justifié par l'absence de conditions au bord.

Dans le cas d'une variété compacte sans bord, un des buts des estimations du type  $\sup \times \inf$  est de prouver qu'il n'y a que des blow-up isolés simples pour les solutions de ces équations et donc elles convergent vers une fonction semblable à la fonction de Green, le Théorème de la masse positive s'il est vrai tout le temps, permet de dire que le terme constant est positif, alors que par l'identité de Pohozaev l'intégrale d'une certaine quantité serait à la fois positive ou nulle (blow-up isolés simples) et strictement négative (masse positive), ce qui n'est pas possible. Donc il n'y a pas de blow-up, c'est-à-dire que les solutions sont bornées dans  $C^2$  et par un argument d'homotopie et degré topologique le degré serait non nul ce qui veut dire qu'il y a des solutions. (Un résultat d'existence par le degré topologique et par conséquent l'estimation a priori).

L'existence de solutions peut être connue par la méthode variationnelle, on se borne à considérer que ce travail a pour but de chercher des estimations a priori et en particulier des inégalités du type Harnack, propriétés de ces solutions à exposant critique de Sobolev.

On suppose que les solutions existent, ce qui est possible dans les différents cas considérés et on prouve certaines propriétés qualitatives de ces équations. (Convergence de métriques, à la Cheeger-Gromov, estimations a priori, compacité de solutions, inégalités du type Harnack, équilibre et stabilité d'un système)

Concernant les variétés qu'on considère, elles peuvent être non conformément plates, il y a quelques exemples de ces variétés.

1) Les variétés de dimension 1 et 2 sont localement conformément plates.

2) Les sphères, sommes connexes de sphères, produit de sphères et d'un cercle, l'espace hyperbolique et le produit d'une variété de courbure sectionnelle constante par un cercle, sont conformément plates.

Par le revêtement, les projectifs réels sont conformément plats car de courbure sectionnelle constante égale à 1 (Voir le livre d'Hebey, égalité des courbures sectionnelles, quand on a un revêtement riemannien). Les projectifs de dimension paire sont non orientables, les projectifs de dimension impaire sont orientables (voir le livre de Lafontaine).

3) Il existe une variété compacte de dimension 3, non conformément plate, plus précisément, elle ne possède pas de structure localement conformément plate. (William Goldman).

Si on considère une variété de courbure sectionnelle non constante et son produit par un cercle, alors la variété obtenue est non localement conformément plate.

4) Le projectif complexe de dimension 2 complexe donc de dimension 4 réelle est non conformément plat (métrique de Fubini-Study), il est d'Einstein et de courbure scalaire constante positive.

5) Les surfaces K3, non conformément plat de dimension 4 réelle. Il est d'Einstein de constante 0.

6) Le produit  $S^2 \times S^2$  est de dimension 4 réelle et non conformément plat, d'Einstein, de courbure scalaire constante positive.

7) Les projectifs complexes de dimensions  $> 2$ , non conformément plat. (Métrique de Fubini-Study).

8) Maintenant, si on veut que la courbure scalaire soit, -1, 0, 1, on utilise les procédés suivants :

-On construit des variétés produit à partir des variétés précédentes, elles sont alors soit plates soit non plate (il suffit qu'une ne soit pas plate, voir le Hebey).

-On utilise les sommes connexes, en se référant à un article de Dominic Joyce, sur les différentes combinaisons possibles des sommes connexes donnant des variétés de courbures scalaire -1, 0, 1. On construit de telles variétés et elles peuvent être plates ou non plates.

*Exemple en dimension 4, cas non plat :*

Soit  $S_2$  la sphere de dimension 2. On considère une surface de genre grand, 2, la somme connexe de deux Tores  $T_2 \# T_2$ , on résout l'équation de la courbure prescrite constante  $k = -1$ , c'est fait dans le livre d'Aubin. On peut supposer qu'il existe une surface  $S$  de courbure scalaire constante (et donc sectionnelle constante  $-3/2$ ) égale à  $-3$  par exemple. On considère le produit  $S_2 \times S$ , il est non conformément plat par le théorème dans le livre d'Hebey (courbures sectionnelles constantes non opposées) et de courbure scalaire  $-1$ . On peut alors appliquer le procédé d'existence de solutions pour l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 minorées par  $m > 0$  (pour la fonction cutoff nulle au voisinage du point  $P$  ou  $Weyl(P) \neq 0$ , est non nul). On obtient alors des solutions de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 minorées par une constante positive et sur une variété non localement plate.

*Exemples en dimensions 5 et 6, cas non plat :*

On peut faire la meme chose pour l'équation de Yamabe en dimension 5 et 6. On considere  $S_1 \times S_2 \times S$  et  $S_1 \times S_1 \times S_2 \times S$  qui sont non plate et de courbure scalaire  $-1$ , ici,  $S_1$  est le cercle unité.

*Un autre exemple en dimension 5, cas non plat :*

Soit  $S_3$  la sphere de dimension 3 (courbure scalaire 6 et courbure sectionnelle 1) et  $S$  une surface compacte de courbure scalaire  $-6$  (donc sectionnelle  $-3$ ). Alors le produit  $S_3 \times S$  est non localement plat (voir theoreme du livre d'Hebey, courbures sectionnelles constantes non opposees) et de courbure scalaire  $R = 0$ . En considerant une fonction changeant de signe et cutoff  $f = \epsilon > 0$  dans une petite boule centree en  $P$  tel que  $Weyl(P) \neq 0$  et  $f < 0$  ailleurs telle que  $\int f < 0$  ( $\epsilon$  petit). On peut appliquer le theoreme de Bismuth en dimension 5 d'existence de solutions de l'equation de la coubure prescrite  $f$  changeant de signe (avec une courbure scalaire nulle sur une variete compacte). Ici on n'a pas forcément un minorant du minimum des solutions.

On a un exemple de solutions de l'equation de Yamabe sur  $\{f = \epsilon > 0\}$ , sur une variete non conformément plate de dimension 5 ou on n'a pas forcément un minorant des solutions.

*Un autre exemple en dimension 5 :*

Un theoreme dans le livre d'Aubin dit que si on considere une variété  $M$  de dimension  $n \geq 3$  non conformément diffeomorphe a la sphere (en particulier non localment conformément plate), alors il existe  $k > 1$ , ne dependant que de la variété  $M$ , tel que toute fonction  $f > 0$  verifiant :

$$\sup_M f \leq k \inf_M f,$$

est courbure scalaire d'une metrique conforme. On applique cela à  $M = S_1 \times P_2(\mathbb{C})$  (le cercle fois le projectif complexe de dimension 2,  $M$  est non localement conformément plate par le theoreme dans le livre d'Hebey, de courbure scalaire constante  $R > 0$ ,  $dim(M) = 5$ ), et,  $f$  une fonction cutoff telle que  $\frac{1+2\epsilon}{k} \leq f \leq 1+\epsilon$  et  $f \equiv 1+\epsilon$  dans une boule centree en  $P$  telle que  $Weyl(P) \neq 0$ , ici,  $S_1$  est le cercle unité.

Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

*Un autre exemple en dimension 6, cas non plat :*

Soit  $S_1$  le cercle unité et  $S_3$  la sphere de dimension 3 (courbure scalaire 6 et courbure sectionnelle 1) et  $S$  une surface compacte de courbure scalaire  $-6$  (donc sectionnelle  $-3$ ). Alors le produit  $S_3 \times S$  est non localement conformément plat (voir le livre d'Hebey). On prend alors  $S_1 \times S_3 \times S$  qui est une variété de dimension 6 non localement conformément plate (voir le livre d'Hebey, dans un produit, des qu'une des variétés est non plate, la variété produit est non plate) et de courbure scalaire 0. On applique le résultat d'Aubin-Hebey et Bismuth, pour les variétés compactes non localement conformément plate de dimension 6 ayant une courbure scalaire nulle. Comme l'exemple en dimension 5. En considerant une fonction changeant de signe et cutoff  $f = \epsilon > 0$  dans une petite boule centree en  $P$  tel que  $Weyl(P) \neq 0$  et  $f < 0$  ailleurs telle que  $\int f < 0$  ( $\epsilon$  petit). On peut appliquer le theoreme d'Aubin-Hebey et Bismuth en dimension 6 d'existence de solutions de l'equation de la coubure prescrite  $f$  changeant de signe (avec une courbure scalaire nulle  $S_g = 0$  sur une variete compacte  $(M, g)$ ). Ici on n'a pas forcément un minorant du minimum des solutions. Ici, on ne peut pas forcément minorer le minimum et sur une variété non-localement conformément plate. (voir le livre d'Aubin).

*Exemple en dimension 4, cas plat et equation de la courbure scalaire prescrite :*

Soit  $S_4$  la sphere de dimension 4. On considere une variete de courbure scalaire -1 si elle est conformement plat, c'est fini, on utilise le meme procede que precedemment dans le cas non plat. Si cette variete est non plate, par exemple  $S_2 \times S$  du cas non plat, on utilise la somme connexe avec la sphere  $S_4$  de Dominic Joyce ; on obtient une variete de courbure scalaire -1 dans le quelle (la partie de  $S_4$  est plate, car on a soit la metrique de  $S_4$  soit une fonction fois la metrique de  $S_4$  et le tenseur de Weyl reste nul car on a un invariant conforme). On resout le probleme de la courbure prescrite pour une fonction cutoff nulle au voisinage du point  $P$  ou la metrique est plate et negative ailleurs puis on rajoute une fonction  $C^{0,1}$ . Alors on a des solutions mineores et comme la metrique est plate au voisinage de  $P$  et que c'est l'equation de la courbure prescrite, en faisant un changement de metrique conforme, on obtient l'equation sur un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  avec des solutions mineores.

Davis, M, W, (1985),(Closed orientable hyperbolic 4-manifold), montre l'existence d'une varieté compacte sans bord orientable hyperbolique de dimension 4, c'est-a-dire de courbure sectionnelle constante -1, (en fait, comme pour le Tore, ces varietes sont obtenues par un revetement riemannien du au quotient de l'espace hyperbolique par un groupe discret d'isometries). Donc elle est localement conformement plate et de courbure scalaire constante strictement negative. On peut utiliser le meme procede d'existence de solutions mineores par une constante positive  $m > 0$  et solutions de l'equation de la courbure prescrite. Par un changement de metrique conforme on se ramene a un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^4$ .

*D'autres exemples en dimension 4 : (voir la section 5 pour la formulation en dimension 4)*

Ici on regroupe les deux exemples "plat" et "non plat" précédents en un seul exemple.

La varieté (par exemple)  $M = S \times S_2$  de metrique  $g$  et courbure scalaire  $S_g = -6$  dans le cas non-plat. ( $P$  tel que  $Weyl(P) \neq 0$ ).

La varieté (par exemple)  $M = (S \times S_2) \# S_4$  ou  $M = Davis\ Manifold$ , dans le cas plat. (de metrique  $g$  et courbure scalaire  $S_g = -6$  (on multiplie la metrique par un scalaire adequat)). ( $P$  tel que  $Weyl(Q) \equiv 0$  dans une boule  $B_r(P)$ ).

a) Pour un  $m > 0$  il existe dans le livre d'Aubin des exemples de  $(u, V)$  solutions de l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 pour un  $V$  (Lipschitzien) verifiant :  $\|\nabla V\|_\infty = o(1) \times m \frac{c(\bar{M})\sqrt{c(\bar{M})}}{32e^2\sqrt{2}} \leq o(1) \times \frac{c(\bar{M})\sqrt{c(\bar{M})}}{32e^2\sqrt{2}} (\inf_M u)$ . (On suppose ici  $\min_M u \geq m > 0$  et  $M$  devient la boule  $B_r(P)$ ). (la fonction cutoff  $-\bar{M} \leq f \leq 0$  devient  $-\bar{M} < -\bar{M} + c \leq f + c \leq c, c = c(\bar{M}) > 0$  assez petit ( $c < 1$  et  $\bar{M} \rightarrow +\infty$ )). (On aura  $c(\bar{M})/2 \leq V \leq c(\bar{M})$  et  $\inf u \geq 1/\sqrt{\bar{M}}$ ). ( si  $c(\bar{M}) \rightarrow 0$ , on remplace  $V$  par  $W = V/c(\bar{M})$  et  $u$  par  $v = \sqrt{c(\bar{M})}u$  ).

b) En faisant varier  $m$ , qui devient  $m_i \rightarrow 0$  ( $m_i > 0$ , on peut prendre  $m_i = \sqrt{c(\bar{M})}/\sqrt{\bar{M}}$  avec  $\bar{M} \rightarrow +\infty$ ), on exhibe deux suites  $(u_i, V_i)$  (qui deviennent  $(v_i, W_i)$  si  $c(\bar{M}) \rightarrow 0$ ) solutions de l'equation de la courbure scalaire prescrite avec  $\|\nabla V_i\|_\infty = o(1) \times m_i \leq o(1) \times (\inf_M u_i)$ . Sauf qu'ici on ne sait pas si  $\min_M u_i \rightarrow 0$  ou  $\min_M u_i \geq m' > 0$ .

c) Le point b) précédent dit qu'on a deux suites  $(u_i, V_i)$  vérifiant les deux contraintes sur  $u$  et  $V$  avec le fait qu'on ne sait pas minorer le minimum des solutions par une constante  $m' > 0$ . C'est l'exemple voulu pour cette formulation en dimension 4 avec deux contraintes sur  $u$  et  $V$ . (les deux contraintes sont : 1) l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, verifiée par  $u > 0$  relativement a un  $V$  Lipschitzien et entre deux constantes positives uniformément, 2) la deuxieme contrainte est entre  $\|\nabla V\|_\infty$  et  $\inf_M u$ ;  $\|\nabla V\|_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u$ ). (Un point essentiel est d'exhiber un exemple de fonctions  $(u_i, V_i)$  verifiant les deux contraintes sans rien savoir sur le minimum des solutions  $u_i$ , c'est ce qu'on a fait jusqu'ici).

Le terme  $o(1)$  sert a attenuer l'effet de la presence des constantes universelles et du changement de metrique conforme dans le cas plat quand on se ramene à un ouvert de  $\mathbb{R}^4$ .

*Exemples en dimension 3, cas non plat et plat*

Soit  $M_\varphi$  le Torus bundle de William Goldman. Cette variete compacte connexe orientable ne possede pas de structure localement plate. C'est à dire que toute metrique  $g$  sur cette varieté est non localement plate. D'apres Aubin, il existe une metrique  $g_1$  de courbure scalaire  $S_{g_1} = -1$  et

a partir de cette metrique, pour toute fonction  $f$  strictement negative quelque part, il existe une metrique  $g_2$  telle que  $S_{g_2} = f$ . Il suffit de prendre  $f$  changeant de signe.

Comme on peut resoudre le probleme de la courbure prescrite avec  $H$  une courbure prescrite cutoff (autour de  $P$  tel que  $C_{g_2}(P) \neq 0$ , en dimension 3, le tenseur de Weyl est nul, on prend le tenseur de Cotton,  $C_{g_2}$  caracterise la courbure et c'est un invariant conforme), et  $H \leq 0$ , pour une courbure scalaire de depart egale a  $f$  relativement a la metrique  $g_2$ , puis on rajoute a  $H$  une constante  $c > 0$  ou une fonction  $k > 0$ , dans ce cas il se peut qu'on ne puisse pas minorer les solutions, car le point  $Q$  ou le minimum est atteint peut etre tel que  $f(Q) \geq 0$ .

**Remarque :** Pour trouver des solutions de l'equation de la courbure prescrite, on considere,  $f \leq 0$  cutoff alors  $\exists g_2$  telle que  $S_{g_2} = f$ , puis on resout le probleme de la courbure prescrite avec  $F \equiv -1$ , c'est fait dans le livre d'Aubin, de plus la solution  $u_1$  est unique. On considere la metrique  $g_3 = u_1^{4/(n-2)} g_2$ , sa courbure scalaire est  $-1$ . On resout le Probleme de la courbure prescrite (par les sous et sur solutions, c'est fait dans le livre d'Aubin), pour une courbure prescrite  $H$  cutoff, comme on l'a dit precedemment, puis on rajoute une constante positive  $c$  ou une fonction positive  $k$ . Dans ce cas les solutions  $u_c$  sont minorées par  $m > 0$ . Donc les solutions au final sont du type  $u_1 u_c$  sont minorées. Ce qu'on vient de voir c'est qu'il existe des solutions et elles sont minorées par  $m > 0$  de :

$$-\Delta u + fu = (H + c)u^{N-1}, \quad u > 0, \quad (E_c)$$

Par contre ce qu'on ne sait pas est que si toutes les solutions sont minorables par  $m > 0$ .

Soit,  $u$  une solution de  $(E_c)$  alors elle n'est pas forcément minorable, car le point  $Q$  ou le minimum est atteint peut etre tel que  $f(Q) = 0$ .

Dans le cas plat, il suffit de considerer  $S_1 \times S_1 \times S_1$  qui est plat de courbure scalaire nulle (produit d'un Tore de courbure sectionelle nulle et d'un cercle, avec la metrique produit) et utiliser le theoreme du livre de Hebey, comme ce qu'on a fait pour la dimension 5. (Theoreme de Schoen-Escobar d'existence de solutions changant de signe).

*Un exemple en dimension 3 :*

On resout le probleme de la courbure prescrite sur la sphere  $S_2$  de dimension 2 avec la courbure prescrite  $R = 1 + (\langle x|e \rangle)^2$ ,  $R(-x) = R(x)$ , (c'est un resultat de Moser, voir le livre d'Aubin),  $R$  est non constante et donc la courbure sectionelle associée est non constante.

On considere le produit  $M_3 = S_1 \times S_2$  avec la metrique precedente sur  $S_2$  de courbure sectionelle non constante. Donc  $M_3$  est non localement conformement plate par un resultat d'Hebey (courbure sectionelle de  $S_2$  non constante).

On utilise le theoreme dans le livre d'Aubin, comme dans l'exemple 3 en dimension 5. ( $\sup f \leq k \inf f$ ,  $k > 1$ ). On choisit  $f > 0$  telle  $\nabla f$  non borné, tendant vers une fonction Heavside, car un theoreme de YY.Li-M.Zhu dit que tout est borné, si  $f$  est  $C^2$  et en particulier les solutions sont minorées).

Dans ce cas on n'a pas forcément un minorant des solutions de l'equation de Yamabe dans la boule ou  $C_g(P) \neq 0$ , (tenseur de Cotton), sur une variete non conformement plate.

On utilise le resultat d'Escobar-Schoen en dimension 3, pour une fonction  $f = \epsilon > 0$  cutoff changeant de signe ou bien une  $f$  une fonction changeant de signe ayant un point critique en  $P$  point maximum de  $f$  tel que  $C_g(P) \neq 0$ . (voir le livre d'Hebey).

Dans ce cas aussi, on ne peut pas minorer les solutions sur une variete compacte non localement conformement plate de dimension 3.

Ici aussi, on ne sait pas minorer les solutions.

*Exemples en dimension 3 : equation du type courbure scalaire prescrite :*

Soit  $M$  la variété de dimension 3 de William Goldman. Elle ne possede pas de structure localement conformement plate. D'apres Kazdan-Warner, voir dans le livre d'Aubin, cette variété possede une metrique  $g$  de courbure scalaire  $S_g = -1$  et elle est non localement conformement plate. On prend  $-\bar{M} \leq f_0 \leq 0$  une fonction cutoff nulle autour de  $P$  un voisinage non localement conformement plat (tenseur de Cotton non nul). On résout le probleme de la courbure scalaire prescrite avec  $f_0$  courbure prescrite. Apres, on sait qu'il existe un voisinage dans  $C^\alpha$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$  dans lequel on peut resoudre le probleme de la courbure prescrite. On prend par exemple  $\frac{c(\bar{M})}{2} \leq f \leq c(\bar{M})$  et  $\|\nabla f\|_\infty \leq kc(\bar{M})$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 < c(\bar{M}) < 1$ , et dans  $B_r(P)$ . Apres, voir dans le livre d'Aubin, un theoreme de Kazdan-Warner ( par sur et sous solutions),

l'équation  $\Delta u + au = hu^5$  possède une solution avec  $\frac{1}{8}S_g = -1/8 \leq a < 0$  et  $h \leq f$ , ( $\Delta = -\nabla^i \nabla_i$ ). On prend alors  $-1/8 \leq a \leq -1/16$  et  $h = f - \eta c(\bar{M})/4 \leq f$ , avec  $\eta$  une fonction cutoff dans  $B_r(P)$ , positive ou nulle, égale à 1 dans  $B_{r/2}(P)$  et nulle en dehors de  $B_r(P)$ . On obtient alors,  $c(\bar{M})/4 \leq h \leq 3c(\bar{M})/4$  et  $\|\nabla h\|_\infty \leq kc(\bar{M})$ . Si  $c(\bar{M}) \rightarrow 0$ , on remplace  $h$  par  $W = h/c(\bar{M})$  et  $u = u_{\bar{M}}$  par  $v_{\bar{M}} = [c(\bar{M})]^{1/4} u_{\bar{M}}$ . La solution  $v = v_{\bar{M}}$  est minorée par  $k_0 [c(\bar{M})]^{1/4} / (1 + \bar{M})^{1/4} \rightarrow 0$  si  $\bar{M} \rightarrow +\infty$  ( $k_0 > 0$ ). Tout cela dans une boule  $B_{r/2}(P)$  avec  $C_g(P) \neq 0$ ,  $C_g$  tenseur de Cotton.

a) On pouvait prendre  $M = M_3 \# (S \times S_1)$  la somme connexe de Dominic Joyce (au final on obtient une variété de courbure scalaire  $-1$  avec une partie non plate), de la variété non localement conformément plate  $M_3 = S_2 \times S_1$  de l'exemple précédent et de la variété localement conformément plate  $S \times S_1$  avec  $S$  une surface de courbure  $-1$ .

b) On pouvait prendre  $M = S \times S_1$  avec  $S$  une surface de courbure scalaire non constante et  $< 0$  (on résout l'équation de la courbure prescrite sur une surface de courbure  $-1$  et la courbure prescrite une cutoff (et  $< 0$ ) par exemple, la nouvelle métrique conforme est de courbure la fonction cutoff non constante). D'après le livre de Hebey, elle est non conformément plate.

c) Dans le cas plat, on prend  $M = S \times S_1$ ,  $S$  une surface de courbure scalaire  $-1$ .

*Exemples en dimension  $n \geq 4$  et  $n = 4$  : équation du type Yamabe :*

On s'inspire de l'exemple précédent. On a de la même manière des exemples en dimensions  $n \geq 4$  ( $n > 3$ ) pour des équations du type Yamabe. En dimension 4, du type  $-\Delta u + au = u^3$ ,  $u > 0$  et  $\frac{1}{6}S_g = -1/6 \leq a < 0$  qui peuvent être minorables et non nécessairement minorables. La variété est  $M = S \times S_2$  comme dans le premier exemple en dimension 4, non localement conformément plate ou,  $M = (S \times S_2) \# S_4$  (de Dominic Joyce) ou  $M = \text{DavisManifold}$  dans le cas plat.

*Exemples en dimension 4, cas plat et non plat*

On prend une surface de Riemann  $S$  de courbure scalaire  $R = -2$  (donc sectionnelle  $-1$ ) et la sphère  $S_2$  de courbure scalaire 2 (donc sectionnelle 1). Le produit  $S_2 \times S$  est conformément plat et de courbure scalaire nulle, par le théorème du livre d'Hebey (courbures sectionnelles constantes opposées). On peut appliquer le Théorème d'existence de solutions pour des courbures prescrites changeant de signe en dimension 4, sur une variété compacte de courbure scalaire nulle (Résultat d'Escobar-Schoen). On pouvait prendre aussi, le produit de 2 Tores, muni de la métrique produit (courbures sectionnelles nulles donc opposées),  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$  de courbure scalaire nulle. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Dans le cas non plat, il suffit de considérer la surface  $K3$  munie d'une métrique non localement conformément plate, de courbure scalaire nulle. On fait la même chose que dans le cas plat. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

On peut prendre  $P_2(\mathbb{C})$  de dimension réelle 4 non localement conformément plat et de courbure scalaire constante positive, on applique le théorème d'Aubin comme en dimension 5, dans le cas d'invariant de Yamabe positif. Ici aussi, on ne sait pas minorer les solutions.

*Exemples en dimension  $n \geq 3$ , cas plat*

Sur le Tore  $\mathbb{T}^n$ ,  $n \geq 3$ , il existe une métrique plate (voir, Gallot-Hulin-Lafontaine) et donc de courbure scalaire  $R = 0$ . Le théorème dans le livre d'Hebey d'existence de solutions pour des courbures scalaires prescrites changeant de signe et d'intégrales négative, sur une variété compacte de courbure scalaire nulle, n'est pas forcément vrai, sauf en dimensions 3 et 4 (Escobar-Schoen) et en dimension 5 par Bismuth avec des conditions supplémentaires, dans le cas non conformément plat.

Par contre dans le cas conformément plat (ce qui nous intéresse ici), ce théorème est vrai en prenant des fonctions cutoff changeant de signe, c'est un théorème d'Escobar-Schoen.

On pouvait résoudre une équation différentielle sur une boule de l'espace euclidien avec ou sans condition au bord (attention à la formule de Pohozaev).

Par exemple, dans des couronnes, Kazdan-Warner montrent l'existence de solutions avec conditions de Dirichlet.

Il y a aussi le résultat de Coron dans des domaines à trous, on peut modifier un peu le domaine pour avoir une infinité de solutions pour une infinité de domaines à trous, par exemple on enlève des disques.

On a aussi les solutions de Caffarelli-Gidas-Spruck. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.



Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité au bord : sur la boule unité.

Ici,  $\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$ .

Soit  $\mu \geq 0$  tel que :

$$\mu = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \int_{\Omega} \frac{V e^u}{|x - x_0|^{2\alpha}} dx = 1, u \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

Ici,  $\Omega = B_1(0)$ , la boule unité.

1) On prouve que cet ensemble est non vide :

On considere,  $u_{\beta}(r) = \beta(1 - r^2)$  et  $0 < \epsilon \leq V \leq 2\epsilon$ . On prend d'abord la fonction nulle  $u \equiv 0$ . Alors, on choisit  $\epsilon > 0$  petit tel que :

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \leq 2\epsilon \int_{\Omega} 1 / |x - x_0|^{2\alpha} dx < 1.$$

On utilise  $u_{\beta}$ , on utilise les coordonnes polaires :

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq \int_{B_1(0)} V e^{u_{\beta}} / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq \frac{2\pi\epsilon}{2^{2\alpha}} \int_0^1 r e^{\beta(1-r^2)} dr$$

Donc en prenant  $\beta$  grand, on a :

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq \frac{2\pi\epsilon}{2^{2\alpha+1}\beta} e^{\beta}(1 - e^{-\beta}) \rightarrow +\infty.$$

Donc, il existe  $\beta_0 \leq \beta_{max} = \beta_{max}(\epsilon, \alpha)$  tel que :

$$\int_{\Omega} V e^{u_{\beta_0}} / |x - x_0|^{2\alpha} dx = 1.$$

Donc  $\mu$  est bien definit.

2) En utilisant une suite minimisante et l'injection compacte de Moser-Trudinger dans  $L^1$ .  $\mu$  est atteint et par les multiplicateurs de Lagrange on a l'existence de  $u$  et  $\lambda$  tels que :

$$\Delta u = \lambda V e^u / |x - x_0|^{2\alpha}, u \in H_0^1, \int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx = 1.$$

$u$  est reguliere. Si  $\lambda \leq 0$  par le principe du maximum  $u \leq 0$  et donc :

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx < 1.$$

Ce n'est pas possible.

Donc  $\lambda > 0$  et  $u > 0$ . En utilisant la premiere fonction propre du Laplacien  $\varphi_1$  (dans le probleme variationnel) et  $u_{\beta_0}$  on a  $\mu \leq C(\beta_{max})$  et  $\lambda \leq C(\beta_{max}, \epsilon, \varphi_1) = C(\alpha, \epsilon, \varphi_1)$ . Puisque  $\beta_{max}$  est uniformement borné, par l'injection compacte de Moser Trudinger,  $\int e^{u_i}$  converge et donc les solutions sont uniformement bornées (ici on fait varier  $V$ ).

On vient de construire une solution du probleme variationnel avec singularité au bord et ces solutions (puisque  $\lambda$  est uniformément borné) verifient des conditions du probleme du type Brezis-Merle avec bornes uniformes. Ceci dans le cas d'un  $\epsilon > 0$  fixé et petit.

Dans le cas où on fait tendre  $\epsilon > 0$  vers 0. on a

Le terme  $\lambda \times \epsilon$  et donc  $\lambda V$  sont uniformément bornés et positifs (il suffit d'utiliser la premiere fonction propre du laplacien  $\varphi_1$  pour eliminer le terme  $\int_{\Omega} e^u / |x - x_0|^{2\alpha} \varphi_1 dx$ ) et en utilisant la contrainte  $\int_{\Omega} e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq 1/2\epsilon \rightarrow +\infty$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Finalement, on a deux exemples, un avec volumes bornés (energies bornées) et un avec volumes tendant vers l'infini (energies tendant vers l'infini) et  $\lambda V$  uniformément borné. Il est clair que quand le volume tend vers l'infini (l'energie tend vers l'infini) le  $\sup_{\Omega} u$  tend vers l'infini. Il suffit de supposer les volumes bornés (energies bornées).

Pour construire un exemple avec volume bornés et courbures positives et uniformément bornées avec singularité au bord mais avec sup divergeant, on part du contre exemple de Brezis-Merle (la singularité est  $x_0 = 0$  et  $\Omega$  la boule unité centrée en  $(1, 0)$ ) :

$$\Delta u_{\epsilon} = f_{\epsilon},$$

avec condition de Dirichlet. ( $\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$ ).

On pose alors,  $V_\epsilon = |x|^{2\alpha} f_\epsilon e^{-u_\epsilon}$ . Alors on a :

$$\Delta u_\epsilon = V_\epsilon \frac{e^{u_\epsilon}}{|x|^{2\alpha}},$$

avec condition de Dirichlet.

On remarque que quand  $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$ ,  $|x|$  est de l'ordre de  $d_\epsilon = |a_\epsilon|$ , car  $d_\epsilon = \epsilon^\beta$  avec  $\beta < 1$ . Puis le support de  $f_\epsilon$  est dans  $B_\epsilon(a_\epsilon)$ , donc :

$$\|V_\epsilon\|_\infty \leq C d_\epsilon^{2\alpha} \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{d_\epsilon}\right)^{2A}$$

Ceci est la premiere condition.

Pour la deuxieme condition on a aussi un facteur  $d_\epsilon^{-2\alpha}$ , dans  $w_\epsilon$  quand  $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$  et aussi, en distinguant le cas  $\{x, |x - a_\epsilon| \geq d_\epsilon/2\}$ , dans ce cas,  $\frac{d_\epsilon}{|x - a_\epsilon|} \leq 2$  et le cas,  $\{x, \epsilon \leq |x - a_\epsilon| \leq d_\epsilon/2\}$ , dans ce cas,  $|x| \geq d_\epsilon/2$  par l'inegalité triangulaire, car  $|a_\epsilon| = d_\epsilon$ . On obtient alors, la condition de borne uniforme de  $\int_\Omega \frac{e^{u_\epsilon}}{|x|^{2\alpha}} dx$ ,

$$d_\epsilon^{-2\alpha} \epsilon^2 \left(\frac{d_\epsilon}{\epsilon}\right)^{2A},$$

Qui doit etre constant. Ce qui veut dire que l'exposant de  $\epsilon$ , dans cette quantité doit etre nul. Et  $d_\epsilon = \epsilon^\beta$  avec  $\beta = \frac{A-1}{A-\alpha}$  convient car  $\alpha \in (0, 1)$ .

Dans le cas regulier ( $\alpha = 0$ ), si on suppose  $0 < a \leq V \leq b$ , la premiere condition (sur la fonction nulle) est  $b < 1/\pi$ . Par les memes arguments que precedemment on a  $\lambda \times a \leq \lambda_1 \leq 6$ , (pour voir que  $\lambda_1 \leq 6$ , on utilise la definition de  $\lambda_1$  comme minimum d'un probleme variationnel calculant le quotient pour la fonction explicite  $u = 1 - r \in H_0^1$ ).

Comme  $\int_\Omega V e^u = 1$ , on a  $\int_\Omega \lambda V e^u = \lambda \leq \frac{6}{a}$  et comme  $a$  peut etre choisit arbitrairement inferieur à  $b < 1/\pi$ , on peut choisit  $a$  tel que  $\int_\Omega \lambda V e^u dx < 24\pi$ . Ainsi, on a exhibé dans le cas regulier des suites de volumes bornés et tel que  $\lambda V$  borné et positif et  $\int_\Omega \lambda V e^u < 24\pi$ . Comme  $\beta_{max}$  depend de  $a$  qui est fixe,  $\beta_{max}$  est fixe et donc par l'injection compacte de Moser-Trudinger, la suite des  $\sup_\Omega u$  est bornée.

On pouvait prendre les fonctions radiales de la forme  $u_i(r) = \log \frac{8c_i^2}{(1+c_i^2 r^2)^2} - \log \frac{8c_i^2}{(1+c_i^2)^2}$ , ( $c_i$  bornée), nulles au bord et de volume fini et de masse  $\leq 8\pi$ .

De plus, Brezis et Merle donnent un exemple de suites de volumes bornés et de courbure prescrite positives et bornées et de masses egales a  $4\pi A$  avec  $A > 1$  quelconque (la masse est definit comme  $m = \int_\Omega W e^u dx$ , avec  $W$  la courbure prescrite et  $u$  la solution). Donc on peut choisit  $A$  de sorte que la masse,  $m$  soit  $m < 24\pi$ , mais  $\sup_\Omega u \rightarrow +\infty$ .

On voit que la condition de borne uniforme sur le volume est vrai dans les deux cas et est necessaire et que pour le deuxieme cas le  $\sup_\Omega u$  diverge.

De meme que precedemment, comme  $b$  peut etre choisit petit, on peut exhiber une suite de volume divergeant dont on connait pas la masse. Par contre en utilisant la suite de fonctions radiales ( $u_i$ ) ci-dessus avec  $c_i \rightarrow +\infty$  on a exemple avec volume divergeant et masse  $\leq 8\pi$ .

*Exemple en dimension 2 pour l'equation avec operateur different du Laplacien : sur une boule unite.*

On part de :

$$-\Delta u - \epsilon((x_1 - x_{01})\partial_1 u + (x_2 - x_{02})\partial_2 u) = V e^u,$$

$$-\Delta u - \epsilon(x - x_0) \cdot \nabla u = V e^u,$$

Avec condition de Dirichlet. Ici,  $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ .

On utilise les notations du contre exemple de Brezis et Merle.

Le domaine  $\Omega$  est la boule de rayon 1 et de centre  $x_0 = (1, 0)$ .

On considere  $z_i$  (par la methode variationnelle), tel que :

$$-\Delta z_i - \epsilon_i(x - x_0) \cdot \nabla z_i = -L_{\epsilon_i}(z_i) = f_{\epsilon_i}.$$

Avec condition de Dirichlet. Par les theoremes de regularite et les injections de Sobolev  $z_i \in C^1(\bar{\Omega})$ .

On a :

$$\|f_{\epsilon_i}\|_1 = 4\pi A.$$

Par un theoreme de dualite de Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|\nabla z_i\|_q \leq C_q, \quad 1 \leq q < 2.$$

On resout :

$$-\Delta w_i = \epsilon_i(x - x_0) \cdot \nabla z_i,$$

Avec condition de Dirichlet.

Par les estimations elliptiques,  $w_i \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $w_i \in C^0(\bar{\Omega})$  uniformement.

Par le principe du maximum :

$$z_i - w_i \equiv u_i.$$

avec  $u_i$  la fonction du contre exemple de Brezis et Merle.

On ecrit :

$$-\Delta z_i - \epsilon_i(x - x_0) \cdot \nabla z_i = f_{\epsilon_i} = V_i e^{z_i}.$$

Donc, on a :

$$\int_{\Omega} e^{z_i} \leq C_1,$$

Et,

$$0 \leq V_i \leq C_2,$$

Et,

$$z_i(a_i) \geq u_i(a_i) - C_3 \rightarrow +\infty, \quad a_i \rightarrow O.$$

Pour avoir un contre-exemple sur le disk unité, on fait une translation de  $x \rightarrow x - x_0$  dans le contre-exemple précédent.

Remarques sur ce type d'equations :

1-Comme dans le cas du Laplacien, on peut avoir un exemple avec solutions uniformement bornees, par la methode variationnelle (comme dans le cas avec singularite au bord).

2-On peut ecire ce probleme dans la boule de rayon 1 ou une ellipse et les deux problemes sont differents. Car si on passe de l'ellipse au cercle par une transformation lineaire  $(y_1, y_2) = (x_1/a, x_2/b)$ , le laplacien ne se conserve pas. Si on utilise une tranformation conforme par le theoreme de Riemann, le terme  $x \cdot \nabla u$  ne se conserve pas. Il y a un probleme dans la formule de Pohozaev quand on cherche a savoir si les solutions sont compactes.

*Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularite d'exposant positif : sur une boule unite.*

Pour construire un exemple avec volume bornés et courbures positives et uniformément bornées avec singularité au bord d'exposant positif, mais avec sup divergeant, on part du contre exemple de Brezis-Merle (la singularité est  $x_0 = 0$  et  $\Omega$  la boule unité centrée en  $(1, 0)$ ) :

$$\Delta u_{\epsilon} = f_{\epsilon},$$

avec condition de Dirichlet. ( $\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$ ).

On pose alors,  $V_{\epsilon} = |x|^{-2\beta} f_{\epsilon} e^{-u_{\epsilon}}$ ,  $\beta \geq 0$ . Alors on a :

$$\Delta u_{\epsilon} = |x|^{2\beta} V_{\epsilon} e^{u_{\epsilon}}$$

avec condition de Dirichlet.

On remarque que quand  $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$ ,  $|x|$  est de l'ordre de  $d_\epsilon = |a_\epsilon|$ , car  $d_\epsilon = \epsilon^s$  avec  $s < 1$ . Puis le support de  $f_\epsilon$  est dans  $B_\epsilon(a_\epsilon)$ , donc :

$$\|V_\epsilon\|_\infty \leq C d_\epsilon^{-2\beta} \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{d_\epsilon}\right)^{2A}$$

Ceci est la premiere condition.

Pour la deuxieme condition on a aussi un facteur  $d_\epsilon^{2\beta}$ , dans  $w_\epsilon$  quand  $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$  et aussi, en distinguant le cas  $\{x, \epsilon \leq |x - a_\epsilon| \leq d_\epsilon\}$  du cas  $\{x, |x - a_\epsilon| \geq d_\epsilon\}$ . Pour borner  $\int_\Omega |x|^{2\beta} e^{u_\epsilon} dx$ , il revient de borner :

$$d_\epsilon^{2\beta} \epsilon^2 \left(\frac{d_\epsilon}{\epsilon}\right)^{2A},$$

Qui doit etre constant. Ce qui veut dire que l'exposant de  $\epsilon$ , dans cette quantité doit etre nul. Et  $d_\epsilon = \epsilon^s$  avec  $s = \frac{A-1}{A+\beta}$  convient.

*Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité logarithmique : sur une boule unité.*

La construction de l'exemple est similaire au cas avec singularités negatives et positives. Le point essentiel est de borner la quantité :

$$-\log(d_\epsilon/2d) \times \epsilon^2 \times (d_\epsilon/\epsilon)^{2A}.$$

Ceci revient a resoudre :

$$-\log(d_\epsilon/2d) \times d_\epsilon^{2A} = \epsilon^{2(A-1)}.$$

Et de verifier qu'il est plus grand que  $\epsilon$ . Ici,  $d = \text{diam}(\Omega)$ . On considere alors la fonction  $f(r) = -\log(r/2d) \times r^{2A}$ .

*Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité logarithmique interieure et poids continu : sur une boule unité.*

On reprend les notations du premier exemple en dimension 2 avec  $x_0 = 0 \in \Omega = B_1(0)$ ,  $d = \text{diametre}(B_1(0)) = 2$ . Pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe  $\lambda_\epsilon > 0$  tel que :

$$\Delta u_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon \frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} e^{u_\epsilon}.$$

$\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$ . On choisit  $V_\epsilon$  Lipschitzien tel que :

$$0 < \epsilon \leq V_\epsilon \leq 2\epsilon, \quad \|\nabla V_\epsilon\|_\infty \leq k\epsilon, \quad k > 0,$$

Par exemple,  $V_\epsilon = \epsilon(1 + r^2)$  ou  $V_\epsilon = \epsilon(1 + x_1^2)$  (pour avoir une solution non-radiale).

En utilisant la premiere valeur propre et la premiere fonction propre et une integration par parties, on a :  $0 < \lambda_\epsilon \times \epsilon \leq C\lambda_1$ ,  $C > 0$  independante de  $\epsilon$ .

Si  $\lambda_\epsilon \times \epsilon \rightarrow k_0 > 0$  si  $\epsilon \rightarrow 0$ , en ecrivant  $W_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon$ , alors  $u_\epsilon$  serait solution d'un probleme variationnel en dimension 2 avec condition de Dirichlet relativement a  $0 < a \leq W_\epsilon \leq b < +\infty$  et  $\|\nabla W_\epsilon\|_\infty \leq A$ , on aurait la compacité de  $u_\epsilon$  dans  $C^0$  ce qui contredit la condition  $1 = \int_\Omega \frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} V_\epsilon e^{u_\epsilon} dx \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , car  $0 < \epsilon \leq V_\epsilon \leq 2\epsilon$ . (On peut utiliser la formule de

Pohozaev-Rellich pour borner l'integrale de  $\frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} W_\epsilon e^{u_\epsilon}$  et aboutir a une contradiction).

Donc,  $\lambda_\epsilon \times \epsilon \rightarrow 0$ . On pose alors,  $\bar{W}_\epsilon = \frac{\lambda_\epsilon V_\epsilon}{\lambda_\epsilon \times \epsilon}$ .  $v_\epsilon = u_\epsilon + \log(\lambda_\epsilon \times \epsilon)$ .

On obtient :

$$\Delta v_\epsilon = \frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} \bar{W}_\epsilon e^{v_\epsilon},$$

$$0 < 1 = a_1 \leq \bar{W}_\epsilon \leq b_1 = 2 < +\infty$$

$$\inf_\Omega v_\epsilon > -\infty,$$

et,

$$\inf_{\Omega} v_{\epsilon} = \log(\lambda_{\epsilon} \times \epsilon) \rightarrow -\infty, \text{ avec } \epsilon \rightarrow 0,$$

Pour avoir une infinité de solutions, on prend par exemple,  $V_{\epsilon} = \epsilon(1 + sr^2)$  avec  $s \in [0, 1]$  ou  $V_{\epsilon} = \epsilon(1 + sx_1^2)$ ,  $s \in [0, 1]$ . Les fonctions  $V_{\epsilon}$  sont Lipschitziennes, les solutions  $u_{\epsilon}$  sont  $C^2(\bar{B}_1(0))$ . La fonction  $u_{\epsilon}$  blow-up a l'intérieur de  $B_1(0)$  en au moins un point  $x_0$  (sinon, elle serait bornée et convergerait vers 0 dans  $C^2(\bar{B}_1(0))$ , par les memes arguments que ci-dessus (formule de Pohozaev-Rellich et le fait que  $\|\nabla u_{\epsilon}\|_q \leq C_q$ ), ce qui contredirait  $\int_{\Omega} e^{u_{\epsilon}} \rightarrow +\infty$ ). Finalement, on a pour  $R, \beta_0 > 0$ ,  $\max_{B_R(x_0)} v_{\epsilon} \geq \beta_0 > 0$  avec  $B_R(x_0) \subset \subset \Omega$ . On a aussi par la formule de Pohozaev-Rellich,  $\int_{\Omega} \frac{e^{v_{\epsilon}}}{-\log \frac{|x|}{2d}} dx \leq C$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [2] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [3] H. Brezis, L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure and Appl. Math. Volume 36, 4, pp 437-477. (1983).
- [4] Crandall.M.G, Rabinowitz.P.H. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. Arch.rational Mech.Anal, 58, 207-218, 1975.
- [5] Davis.M.W. A hyperbolic 4-manifold Proc. Amer. Math. Soc.93 (1985), pp.325-328.
- [6] Dupaigne. Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics). 2011.
- [7] J. Escobar. R. Schoen. Conformal metrics with prescribed scalar curvature. Inventiones mathematicae (1986) 86, page 243-254.
- [8] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.
- [9] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.
- [10] D. Holzman. Solutions nodales sur les varietes riemanniennes non localement conformement plates a bord. Comment. Math. Helv. 76 (2001), no. 3, 373-387.
- [11] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [12] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [13] Karp. L, Pinsky. M . The first eigenvalue of a small geodesic ball in a Riemannian manifold. Bull. Sci. Math. (2)111 (1987), no. 2,229-239.
- [14] J. Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.
- [15] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [16] Troyanov. M. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), no. 2, 793-821.

## 2. OPERATEURS D'ORDRE 2.

1) Inégalités de Harnack pour les solutions, les sur-solutions, les sous-solutions : ces estimations se font à l'aide du procédé d'itération de De Giorgi-Nash-Moser.

2) Existence de solutions : formulation variationnelle et théorèmes du type Lax-Milgram dans les Hilberts.

3) Existence des solutions pour des EDP elliptiques avec operateur Laplacien : Potentiel Newtonien, regularité en se ramenant ( par soustraction du postentiel Newtonien) aux fonctions harmoniques qu'on sait regulieres par le Theoreme de Weyl (conditions minimales  $L^1$ , mais la formulation variationnelle on sait qu'on a mieux). pour la regularite au bord, on suppose la condition de Dirichlet, alors les fonctions harmoniques (on se ramene a ce cas par soustraction du potentiel Newtonien) sont prolongeables grace à la formule de la moyenne qu'on etend à travers le demi-espace par symetrisation). La regularité  $C^2$  se fait grace a la regularité du noyau Newtonien (se fait par calcul explicite de derivees sous le signe somme), puis par soustraction, on se ramene aux fonctions harmoniques).

4) On dispose des theoremes d'existence et regularite pour le probleme de Dirichlet pour le Laplacien. Pour le cas d'un operateur elliptique d'ordre 2, on utilise la methode de continuité

pour prouver l'existence de solutions avec regularite de Schauder. Puis on compare par le principe du maximum dans  $W_0^{1,2}$  ces solutions regulieres aux solutions obtenues par la formulation variationelle. Si le coefficient devant le terme lineaire  $c \leq 0$ , alors le principe du maximum donne l'unicité des solutions, d'ou la regularité de Schauder, ineteures et sur le bord. Par une alternative de Fredholm on etend au cas ou  $c$  non necessairement negatif ou nul.

5) Régularité  $W^{2,p}$  d'Agmon, elles sont font par la methode des quotients differentiels, elles sont interieures et au bord pour des fonctions tests  $C_c^2(\Omega)$  pour la regularité interieures (au sens des distributions) et pour des fonctions  $C_0^2(\Omega)$  ( $C^2$  et nulles au bord) pour la regularité au bord. En plus de la methode des quotients differentiels, Agmon utilise l'estimation a priori de fonctions regulieres dans  $L^p, p > 1$  (approximations) d'Agmon-Douglis-Nirenberg (obtenue par les noyaux).

Les estimations uniformes  $W^{2,p}$  peuvent etre obtenues (en plus de ce que dit Agmon) par le procede de Calderon-Zygmund, qui consiste a obtenir une estimée  $L^p$  pour les derivees secondes a partir de celle du noyau Newtonien. C'est une decomposition en n-cubes de Calderon-Zygmund et l'utilisation du theoreme d'interpolation  $(L^1, L^2) \rightarrow L^p(1 < p < 2)$  (et par dualité  $L^p, p > 2$ ) de Marcienewicz-Thorin. Puis on ramene l'estimation pour l'operateur  $L$  à une estimation pour un operateur à coefficient constant comme le Laplacien par exemple.

Les theoremes d'Agmon et de regularite sont utilises dans la construction des fonctions de Green.

### 3. FONCTIONS DE GREEN.

Le monograph de Druet-Hebey-Robert est assez clair et precis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la decomposition de cette fonction est de classe  $C^1$ . C'est essentiellement du au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une recurrence pour prouver que les termes dela decomposition sont Sobolev et continues en dehors de la digonale. (Ou bien comme dans le monograph de Druet-Hebey-Robert, on fait la difference des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est ecrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara, pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des derivees directionelles).

Soit  $(\bar{W}, g)$  une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note  $(M, g)$ .

Soit  $H$  la fonction definie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne depend pas de la fonction rayon d'injectivé dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle depend (à gauche en  $P$ ) du rayon d'injectivé dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur  $W$  avec  $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$ , on peut alors la prolonger par 0 sur  $\partial W$ . Alors  $\delta(P)$  est continue sur  $\bar{W}$ .

Tout d'abord, remarquons que ces fonctions sont mesurables et integrables, car continues en dehors d'un ensemble de mesure nulle. (un point ou la diagonale).

On pose :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q), \quad \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_W \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P, Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par recurrence les  $\Gamma_i$  sont continues en dehors de la diagonale et pour  $P$  ou  $Q$  proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le theoreme de la convergence dominee de Lebesgue, on prouve qu'elles sont  $W^{1,\infty}$  en dehors de la diagonale en  $Q$  car elles sont Sobolev est leur derivees bornees. La fonction  $d(P, Q) = d_P(Q)$  est reguliere en  $Q$  en dehors de  $P$  et en fixant  $Q$  elle est Lipschitzienne en  $P$ , on alors le fait que  $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d_R(Q)$  est continue en dehors de la diagonale et  $L_{loc}^\infty$ . Donc, par le theoreme de convergence dominee (enlever de petites boules)  $\Gamma_i * \partial_Q \Gamma_1$  et  $\Gamma_i * \partial_Q H$  sont  $C^0$  en dehors de la diagonale. Donc, les  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_i * H$  sont  $C^1$  en dehors de la diagonale. (Le point essentiel est la fonction distance). (Concernant la fonction distance,  $(R_i, Q) \rightarrow d(R_i, Q) = d(R_i, \exp_{R_i}(r\theta)), Q = \exp_{R_i}(r\theta), \epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3, \theta \in \mathbb{S}_{n-1}$  et la carte de reference est

$[B(R_0, \delta(R_0)/3), \exp_{R_0}]$  avec  $R_i \rightarrow R_0$ . On voit alors qu'en coordonnées geodesiques polaires centrees en  $R_i$  un calcul de  $\Delta_{g,Q}d(R_i, Q) \in L^\infty$  et  $d(R_i, \cdot) \rightarrow d(R_0, \cdot)$  et par les estimations elliptiques on a  $\partial_Q d(R_i, Q) \rightarrow \partial_Q d(R_0, Q)$  pour  $d(R_i, Q) \geq \epsilon_0 > 0$ .)

Dans le cas où  $W = M$  sans bord :

D'apres sa formule explicite  $H$  est  $C^1$  en dehors de la diagonale. Elle est  $W^{1,1+\epsilon}$  de chaque variable pour un  $\epsilon > 0$  assez petit, par recurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli :

$$\partial_P \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \partial_P \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR,$$

et,

$$\partial_Q \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \Gamma_i(P, R) \partial_Q \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Pour une varieté avec bord, on ne peut pas deriver par rapport  $P$ , car l'expression de  $\Gamma_i$  et en particulier de  $\Gamma_1$  contient  $\delta_P$  qu'on sait seulement continue et pas forcément differentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions  $\Gamma_i$  sont continues en  $P$  en dehors de la diagonales et  $L^{1+\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$  seulement, mais ceci suffit pour prouver la symetrie par le theoreme d'Agmon)

On a aussi, les estimees de Giraud. Ainsi de proche en proche, les  $\Gamma_i$  deviennent de plus en plus regulieres. on utilise le theoreme de Giraud pour prouver que  $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$  avec  $\lambda + 2 > n$  (donc  $\geq n + 1$  car  $\lambda$  est entier puisqu'on derive les  $\Gamma_i$ ). ( Si  $\lambda > n - 1$  ( $\lambda \geq n$ ) c'est fini (on regarde  $\Gamma_{k-1}$ ), si  $\lambda = n - 1$  alors :  $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$  et  $\partial_P \Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$  et  $\partial_Q \Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$  qui est en log par Giraud et donc  $\partial_P \Gamma_{k+1}$  et  $\partial_Q \Gamma_{k+1}$  sont  $C^0(M \times M)$  par Giraud et donc  $\Gamma_{k+1}$  est  $C^1(M \times M)$ . (Utiliser le produit de convolution, car  $\Gamma_{k+1}$  et sa derivee Sobolev sont continues pour ecrire qu'elle est  $\int \partial_P$ , l'integrale d'une fonction continue donc  $C^1$ , il a convergence uniforme de la convolution, car la fonction et son Sobolev sont continues). Dans le cas avec bord,  $\Gamma_k$  continue implique que  $\Gamma_{k+1}$  est  $W^{1,\infty}$  en  $Q$ . (On a mieux  $C^1$  en  $Q$  car la fonction  $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d(R, Q)$  est  $C^0$  en dehors de la diagonale de  $W$  et  $H$  est a support compact (elle s'annule avant le bord) et donc  $(\Gamma_k * \partial_Q H)$  est  $C^0$  en dehors de la diagonale de  $\bar{W}$ )).

Dans le cas d'un operateur  $-L = -\Delta + h$ , la regularite de  $\Gamma_{k+1}$  depend de celle de  $h$ . Si par exemple  $h$  est  $C^1$  alors comme precedemment  $\Gamma_{k+1}$  est  $C^1$  de  $P$  et  $Q$ . Bien sur le  $\Gamma_1$  change :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q) + h(Q)H(P, Q).$$

On peut faire plus, on remarque que par exemple que pour les varietes a bord, la parametrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les theoremes d'Agmon et de regularité dans la construction complete de la fonction de Green dans le cas des varietes a bord, voir le monograph de F.Robert (que je n'ai pas cité ici).

#### 4. PRINCIPE DU MAXIMUM.

**4.1. La methode "moving-plane" et "moving-sphere".** La methode "moving-plane" consiste à rechercher, si possible, les points de symétrie pour des E.D.P définies sur des domaines ayant des axes de symétries, puis, de caractériser ces solutions. On part de "l'infini", un point très loin, puis, on considère la fonction et son symétrisée par rapport au plan contenant ce point, puis on ramène, le plan jusqu'à l'annulation de la différence entre cette fonction et son symétrisée, si c'est le cas, le plan limite est le plan de symétrie. En plus de la determination d'une barriere, cette technique utilise le principe du maximum et le lemme de Hopf. Ici, on suppose les solutions dans  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ .

Cette technique de symetrie a été introduite par A.D. Alexandrov.

Notons que certains des auteurs suivants, utilisent les proprietes du au principe du maximum.

Dans les deux points particuliers suivants l'idée essentielle est qu'on doit utiliser les propriétés du principe du maximum :

1-Le principe du maximum lui meme et le lemme de Hopf.

a) Principe du maximum sur un domaine  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  et lemme de Hopf.

b) Principe du maximum pour une variété compacte à bord,  $[\lambda, t] \times \mathbb{S}_{n-1}$ ,  $n \geq 2$  et lemme de Hopf. L'operateur est global en la variable de la sphere, le principe du maximum s'applique localement dans des domaines de la forme  $]\lambda, t[ \times U$  avec  $U$  un ouvert de carte de la sphere (autour

d'un point  $(t_0, \theta_0)$  quelconque, on s'est ramené a un ouvert particulier de  $\mathbb{R}^n$ , un  $n$ -cube par exemple pour appliquer le lemme de Hopf).

2-Le minimum est atteint sur le bord, (YY.Li-L-Zhang). Et principe du maximum de Hopf.

*Exemple 1 : Gidas-Ni-Nirenberg.*

Sur la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)-\epsilon} & \text{dans } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } B_1(0) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Où  $\epsilon > 0$  est très petit.

Gidas-Ni-Nirenberg : La solution  $u$  du problème précédent est radiale et strictement décroissante.

*Exemple 2 : De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li, Ma-Wei.*

Sur un ouvert regulier en dimension 2, on considere :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q, 1 < q < +\infty & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

Et aussi,

$$\begin{cases} -\Delta u = V e^u, & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec,

$$0 \leq V \leq b, \text{ sur } \bar{\Omega},$$

et,

$$|\nabla V| \leq A, \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Pour l'équation avec l'exponentielle, on suppose de plus que :

$$\int_{\Omega} e^u dx \leq C,$$

Alors les solutions sont uniformément bornées sur  $\bar{\Omega}$ .

Un point essentiel est de borner les solutions au voisinage du bord. Cela se fait par la méthode "moving-plane".

Estimations de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ce sont des estimations uniformes au voisinage du bord, on les prouve grace a la méthode moving-plane. C'est essentiellement une transformation de Kelvin, pour rendre le voisinage du bord convexe, et une application du principe du maximum (suivant la direction normale).

Par la methode moving-plane on prouve que les points crititques sont loin du bord, en se placant suivant la normale, apres avoir utiliser la transformee de Kelvin. Voir les articles de Chen-Li et Ma-Wei.

En utilisant la transformee de Kelvin et le principe du maximum, on classifie les solutions de l'équation :

*Exemple 3 : Caffarelli-Gidas-Spruck et Chen-Li.*

Caffarelli-Gidas-Spruck. Les solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, u > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ u(0) = 1, \nabla u(0) = 0. \end{cases}$$

Sont :

$$u(x) = (1 + \gamma|x|^2)^{(2-n)/2}, \gamma > 0$$

La preuve de Chen-Li est plus courte et elle utilise les memes arguments que ceux de Caffarelli-Gidas-Spruck, c'est essentiellement une transformation de Kelvin pour avoir un comportement



asymptotique et aussi l'utilisation du principe du minimum pour des fonctions régulières singulières en un point puis l'argument moving-plane basé sur le principe du maximum.

On présente le résultat de Classification par la méthode moving-plane des solutions d'une EDP elliptique non linéaire en dimension 2 :

Chen-Li : pour  $K > 0$ , les solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta u = Ke^u, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u(0) = 0, \nabla u(0) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^u < +\infty. \end{cases}$$

Sont :

$$u(x) = -2 \log(1 + \gamma |x|^2), \quad \gamma = \sqrt{(K/8)}$$

Cette preuve utilise des estimées asymptotiques spécifiques à la dimension 2 et le principe du maximum et lemme de Hopf.

*Exemple 4 : Han.*

Si on remplace  $B$  par un ouvert régulier quelconque, noté  $\Omega$ , en maintenant la même équation, les solutions ne sont pas forcément radiales.

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)-\epsilon} & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où  $\epsilon > 0$  est très petit.

Han Il existe un voisinage du bord  $\omega$  ne dépendant que de la géométrie du domaine  $\Omega$  et de la dimension  $n$ , ainsi qu'une constante  $c = c(\Omega, n) > 0$  telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(\omega)} \leq c.$$

Où  $u$  est la solution du problème précédent.

*Exemple 5 : Chen-Lin.*

En utilisant la méthode moving-plane, Chen et Lin ont prouvé une estimation a priori sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  :

Si  $u$  est solution de :

$$-\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)},$$

avec,

$$0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty, \quad \|\nabla V\|_\infty \leq A,$$

$$\|\nabla^\alpha V\| \leq C_\alpha \|\nabla V\|^{\beta(\alpha)}, \quad \text{avec } \alpha \leq n - 2.$$

alors,

$$\sup_K u \times \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, A, C_\alpha, n, K, \Omega).$$

La preuve de Chen-Lin consiste à utiliser le principe du maximum et le lemme de Hopf pour prouver que la symétrisée d'une certaine fonction est positive et que la dérivée de cette fonction est strictement positive alors que par le raisonnement par l'absurde ("blow-up") cette fonction a un maximum local (point critique), ce qui est absurde.

*Exemple 6 : Brezis-Li-Shafrir.*

En dimension 2, la méthode "moving-sphere" donne pour les solutions de :

$$-\Delta u = Ve^u,$$

On suppose  $0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty$  et que  $V$  est uniformément Lipschitzienne,

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, \|\nabla V\|_\infty, K, \Omega).$$

*Exemple 7 : Korevaar-Mazzeo-Pacard-Schoen.*

La methode "moving-sphere" donne :

Sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , on considère l'équation de Yamabe :

$$-\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, \quad u > 0.$$

Alors : pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , on a :

$$\sup_K u \times \inf_{\Omega} u \leq c = c(K, n, \Omega).$$

La preuve est basee sur le fait qu'on ne pas pas avoir une certaine condition au bord par le principe du maximum et le lemme de Hopf.

*Exemple 8 : C.C.Chen-C.S.Lin.*

En dimension 2, la technique "blow-up" et une inégalité géométrique sur les courbures intégrales a permis a CC.Chen et CS.Lin de prouver pour l'équation :

$$-\Delta u = V e^u,$$

avec,  $0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty$  et que  $V$  est uniformément Hölderienne ( $C^\alpha$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ), que :

$$\sup_K u + \inf_{\Omega} u \leq c = c(a, b, \alpha, \|V\|_{C^\alpha}, K, \Omega).$$

Ce théorème peut etre prouvé par la methode "moving-sphere" de YY.Li-L.Zhang (point suivant).

*Exemple 9 : Li-Zhang.*

La methode "moving-sphere" donne :

Sur une variété Riemannienne quelconque  $(M, g)$  (non nécessairement compacte), de dimension  $n \geq 3$  et de courbure scalaire  $S_g$ , on considère l'équation de Yamabe :

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = u^{(n+2)/(n-2)}, \quad u > 0.$$

Alors : en dimensions 3, 4, pour tout compact  $K$  de  $M$ , on a :

$$\sup_K u \times \inf_M u \leq c = c(K, M, g, n = 3 \text{ ou } n = 4).$$

Après avoir utiliser la transformation de Kelvin, Li-Zhang prouvent que la positivite de la fonction obtenue par symetrisation implique la positivite de la fonction limite (obtenue par symetrisation) et dans ce cas elle serait constante, ce qui n'est pas possible par le resultat de Caffarelli-Gidas-Spruck. (La fonction limite est due au "blow-up").

La preuve de Li-Zhang s'adapte en dimension 3 sur un ouvert  $\Omega$  quand on suppose les courbures prescrites uniformément entre deux constantes positives  $a, b$  et  $s$ -hölderiennes,  $s \in ]1/2, 1[$ , de constante de Hölder  $A$ , on a une inégalité du type :

$$(\sup_K u)^{2s-1} \times \inf_{\Omega} u \leq c = c(a, b, A, s, K, \Omega)$$

**4.2. Principe du maximum dans  $W_0^{1,1}(\Omega)$ .** Le principe du maximum dans  $W_0^{1,1}(\Omega)$  est basé sur l'inegalite de Kato dont on peut trouver la preuve dans le livre d'Otared Kavian.

Kato : si  $u \in L^1(\Omega)$  et  $\Delta u \in L^1(\Omega)$ , alors on a au sens des distributions :

$$\Delta u^+ \geq \chi_{\{u \geq 0\}} \Delta u.$$

On remarquera qu'en utilisant la fonction  $f_\epsilon(t) = \sqrt{(t^2 + \epsilon^2)}$ , on prouve que  $Trace(|u|) = |Trace(u)|$  et  $Trace(u^+) = (Trace(u))^+$  et donc si  $u \in W_0^{1,1}$  alors  $u^+ \in W_0^{1,1}$  et appliquer a  $u^+$  ce qui est considéré comme le principe de comparaison dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce. (il suffit de consider la fonction  $-\Delta \xi = 1$  avec condition de Dirichlet).

*Exemple 1 : Brezis-Merle.*

On considère deux suites de fonctions  $(u_i, V_i)$  solutions (au sens des distributions) de :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec,

$$V_i \geq 0, \|V_i\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1, \|e^{u_i}\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_2,$$

avec,  $1 < p \leq +\infty$ . Alors, on a, ou bien

$$\forall K \subset\subset \Omega, \sup_K |u_i| \leq c = c(K, C_1, C_2, \Omega)$$

ou bien,

$$u_i \rightarrow -\infty, \text{ sur tout compact de } \Omega,$$

ou bien,

Il existe un ensemble fini de points  $S$  tel que  $u_i \rightarrow -\infty$  uniformément sur tout compact de  $\Omega - S$  et  $u_i \rightarrow +\infty$  sur  $S$  et, au sens faible, on a,

$$V_i e^{u_i} \rightarrow \sum_j \alpha_j \delta_{a_j}, \text{ avec } \alpha_j \geq 4\pi/p', \text{ et } a_j \in S.$$

Comme corollaire de ce résultat, on a :

$$\sup_K u \leq c = c(\inf_{\Omega} V, \|V\|_{L^\infty(\Omega)}, \inf_{\Omega} u, K, \Omega).$$

On a aussi la compacité globale de Chen-Li, cité dans la section 4.1. Le resultat de Chen-Li utilise le fait qu'on a compacité au voisinage du bord lorsque  $\|\nabla \log V\| \leq A$ , puis il étend ce resultat lorsque  $\|\nabla V\| \leq A_1$ , pour cela il utilise l'extension des resultats de Brezis-Merle (Theorem 1 de Brezis Merle), qui reste vrai dans des domaines Lipschitzien dès qu'on a la régularité des solutions dans  $W_0^{1,2}$ , car le principe du maximum est valable dans ce cas (on utilise l'intégration par parties, qui est vrai dès que la régularité du bord est Lipschitzien. Pour l'inégalité de Sobolev aussi et la résolution d'un problème variationnel dans  $L^2$ . Lipschitz suffit). Ceci pour la fonction  $u_2$  du début de preuve de Chen-Li. (et aussi l'extension des fonctions harmoniques et la formule de Poisson, pour  $u_1$  qui nécessite une application conforme). Voir la preuve du corollaire de l'article de Chen-Li.

(Voir l'article de Sweers-Nazarov. Journal.Diff.Equations. 2007. Pour les conditions de régularité  $W^{2,p}$  des problèmes sur des ouverts Lipschitziens.)

Remarque sur la preuve de Chen-Li : pour étendre la partie  $u_1$  harmonique, il faut supposer le domaine analytique, pour pouvoir utiliser une transformation conforme qui reste invariante par le Laplacien. Principe de symétrisation de Schwarz. Donc, le resultat de compacité reste vrai avec la régularité smooth lorsque on suppose  $\|\nabla \log V\| \leq A$ . Mais la régularité du domaine doit être supposée analytique lorsqu'on passe à  $\|\nabla V\| \leq A_1$ .

Dans leur preuve Chen-Li, utilisent le fait que l'opérateur est invariant par application de carte, ceci est possible si cette application est conforme, elle préserve le Laplacien. Puis, symétrise la fonction en symétrisant un problème de Dirichlet, puis soustraient les valeurs aux bords et ils obtiennent l'image de  $v_1$ . Alors  $u_1$  est l'image de  $v_1$  par l'application de carte. Maintenant pour construire  $v_1$  ils utilisent une symétrisation d'un problème de Dirichlet, qui requiert les solutions dans  $W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon)$ ,  $p > 2$  (la formule de représentation de Green reste valable, dans ce cas, voir la preuve dans Gilbarg-Trudinger). Puis, ils utilisent la formule intégrale de Poisson (qui nécessite d'avoir l'opérateur Laplacien).

a) Pour utiliser la formule de Poisson, on conserve le Laplacien : transformation conforme  $\varphi$ .

b) Ils symétrisent  $u \circ \varphi$  ils obtiennent une fonction  $u_v \in C^1(\bar{B}_\epsilon(0)) \cap W^{2,p}$ .

c) Ils résolvent :  $-\Delta v_1 = -\Delta u_v$  avec condition de Dirichlet sur  $B_\epsilon(0)$ .

d) Ils utilisent la formule intégrale de Poisson pour  $v_1 - u_v \in W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon)$ ,  $p > 2$ . Sur le bord, il n'y a que les valeurs de  $u$ .

(Ce travail revient à symétriser une fonction harmonique qui nécessite le théorème de symétrisation de Schwarz, qui nécessite une application conforme, donc un domaine de départ  $\Omega$  analytique).

*Exemple 2 : Equation avec poids continu :*

Sur un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avec  $d = \text{diametre}(\Omega)$  et  $0 \in \Omega$ , on considère des fonctions  $(u, V)$  solutions (au sens des distributions) de l'équation du type Liouville :

$$-\Delta u = \frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} V e^u \text{ dans } \Omega$$

avec,

$$u \in L_{loc}^\infty(\Omega), \quad 0 < a \leq V \leq b < +\infty, \quad 0 \in \Omega.$$

Alors on a l'inégalité de Harnack implicite :

Pour tout compact  $K$  de  $\Omega$  :

$$\sup_K u \leq c(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u)$$

et,

$$\inf_\Omega u \geq m > -\infty \Rightarrow \sup_K u \leq c = c(a, b, K, \Omega, m).$$

#### RÉFÉRENCES

- [1] A.D. Alexandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large. V. Vestnik Leningrad Univ. Mat. Astronom 13, 5-8 (1958); Amer. Math. Soc. Transl. 21, 412-416 (1962).
- [2] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [3] Ambrosio. L, Fusco. N, Pallara, D. Functions of Bounded variations and Free discontinuity Problems, Oxford Press. 2000.
- [4] Bahoura.S.S. Lower bounds for sup+inf and sup \* inf and an extension of Chen-Lin result in dimension 3. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 28 (2008), no. 4, 749-758
- [5] Bahoura.S.S. About Brezis Merle problem with Holderian condition. Mathematica Aeterna, Vol 4, no 1, 13-25, 2014.
- [6] Bahoura.S.S. A uniform boundedness result for solutions to the Liouville type equation with boundary singularity. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 23, no 2, 487-497. 2016.
- [7] Bahoura.S.S. A compactness result for an equation with Holderian condition. Commun. Math. Anal. Vol 21, no 1, 23-34, 2018.
- [8] Bahoura.S.S. A local uniform boundedness result for an elliptic equation. hal-02495444. 2020.
- [9] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [10] Berestycki. H. Nirenberg. L. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), no. 1, 47-92
- [11] L. Boccardo, T. Gallouet. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. J. Funct. Anal. 87 no 1, (1989), 149-169.
- [12] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle et Applications. 1983.
- [13] Brezis. H, Marcus. M, Ponce. A. C. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [14] H. Brezis, F. Merle. Uniform estimates and Blow-up behavior for solutions of  $-\Delta u = V(x)e^u$  in two dimension. Commun. in Partial Differential Equations, 16 (8 and 9), 1223-1253(1991).
- [15] H. Brezis, W. A. Strauss. Semi-linear second-order elliptic equations in  $L^1$ . J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 565-590.
- [16] H. Brezis, Y.Y. Li, I. Shafrir. A sup+inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities. J.Funct.Anal. 115 (1993) 344-358.
- [17] L. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984) 369-402.
- [18] Chen. W, Li, C. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. Duke Math. J. 63 (1991), no. 3, 615-622.
- [19] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. Arch. Rational. Mech. Anal. 122 (1993) 145-157.
- [20] C-C. Chen, C-S. Lin. Local behavior of singular positive solutions of semilinear elliptic equations with Sobolev exponent. Duke Math. J. 78 (1995), no. 2, 315-334.
- [21] C-C.Chen, C-S. Lin. Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes. Comm. Pure Appl. Math. L(1997) 0971-1017.
- [22] C-C. Chen, C-S. Lin. A sharp sup+inf inequality for a nonlinear elliptic equation in  $\mathbb{R}^2$ . Commun. Anal. Geom. 6, No.1, 1-19 (1998).

- [23] de Figueiredo, D. G, Lions, P.-L., Nussbaum, R. D. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *J. Math. Pures Appl.* (9) 61 (1982), no. 1, 41-63.
- [24] O. Druet, E. Hebey, F. Robert, *Blow-up theory in Riemannian Geometry*, Princeton University Press 2004.
- [25] B. Gidas, W-M. Ni, L. Nirenberg. Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. *Commun. Math. Phys.* 68, 209-243 (1979).
- [26] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehren Math. Wiss., 224, 1983.
- [27] Han Z-C. Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non lineaire* 8 (1991) 159-174.
- [28] E. Hebey, *Analyse non lineaire sur les Variétés*, Editions Diderot.
- [29] O. Kavian. *Introduction à la Théorie des points critiques*. Springer-Verlag. 1993.
- [30] N. Korevaar, F. Pacard, R. Mazzeo, R. Schoen. Refined asymptotics for constant scalar curvature metrics with isolated singularities. *Invent. Math.* 135 (1999), no. 2, 233–272.
- [31] YY. Li. Harnack Type Inequality : the Method of Moving Planes. *Commun. Math. Phys.* 200, 421-444 (1999).
- [32] YY. Li, L. Zhang. A Harnack type inequality for the Yamabe equation in low dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 20 (2004), no. 2, 133–151.
- [33] L. Ma, J-C. Wei. Convergence for a Liouville equation. *Comment. Math. Helv.* 76 (2001) 506-514.
- [34] Nazaraov, S, A. Sweers, G. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. *Journal of Differential Equations.* 233, 1, 2007, 151-180.
- [35] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* 43 (1971), 304-318.

## 5. CONCERNANT LES INÉGALITÉS DU TYPE HARNACK

Fixant un minorant  $m > 0$ , on a une relation entre  $\sup_K v$  et  $m$  pour toute  $v > 0$  relativement à un  $W$  avec des conditions a priori sur  $W$ ,  $v$  et  $W$  sont liés par une equation ou plusieurs equations. Or, en prenant le minorant  $m = \inf_M u > 0$ , on a l'inégalité pour  $v > 0$  or  $u > 0$  est déjà une solution du probleme, donc  $\sup_K u$  est fonction de  $\inf_M u$  et des autres paramètres.

Pour l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimensions 3 et 4 :

a) En dimension 3, on a la dependance explicite du sup en fonction du inf.

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c,$$

b) En dimension 4, on a une estimation a priori. En plus on a des exemples pour ce cas.

En general dans le cas d'une variété Riemannienne  $M$  de dimension 4, on a une estimation a priori. On peut se ramener à une estimation du sup en fonction du inf en ecrivant :

$$\sup_K u \leq c(a, b, \inf_M u, K, M),$$

pour toute  $u > 0$  solution de l'equation de la courbure prescrite en dimension 4 sur  $M$ , relativement à  $V$  (Lipschitzienne) verifiant :

$$\|\nabla V\|_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u,$$

et,

$$0 < a \leq V \leq b < +\infty,$$

En effet,  $u > 0$  et  $V$  sont liés par l'equation, on peut supposer que le gradient de  $V$  et  $\inf_M u$  sont aussi liés, ici on a deux equations liant  $u > 0$  et  $V$ , une contrainte de plus. On a des exemples quand  $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$  et  $\inf_M u_i \geq m > 0$ , on a une estimation locale uniforme.

Ici, la constante  $k(a) = \frac{32e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$  entre  $\min_M u$  et la norme du gradient est plus grande. Il faut faire la preuve pour  $\min_M u \geq m > 0$ , car on doit eliminer des termes en  $o(1)$ .

**Remarque :** i) Dans le cas d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^4$ , la deuxième contrainte est "vérifiée" (après blow-up), dans l'article de C.C.Chen et C.S.Lin (Comm.on pure.appl.math.1997), si on suppose  $V \in C^2$  uniformément. Ils obtiennent une inégalité entre  $\nabla V(y_i)$  et  $[u_i(y_i)]^{-1}$ , dans ce cas ils obtiennent l'inégalité optimale  $\sup \times \inf$ . (les points  $y_i$  sont les points blow-up).

ii) Dans le cas plat on s'intéresse particulièrement au cas  $V$  Lipschitzien et non  $C^1$  pour obtenir l'inégalité optimale  $\sup \times \inf$  avec la contrainte supplémentaire :  $\|\nabla V\|_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{8e^2\sqrt{2}} \inf_\Omega u$ .

On obtient alors un résultat du type Brezis-Li-Shafir, en dimension 4 avec deux contraintes. Notons que dans l'article de C.C.Chen-C.S.Lin (comm.on pure.appl.math. 1997) prouvent que  $\sup \times \inf \rightarrow +\infty$  avec  $V = 1 - Kr$  ( $\rho = 1$ ,  $V$  Lipschitzien et non  $C^1$ ), on voit alors que la deuxième contrainte est suffisante pour obtenir l'inégalité optimale  $\sup \times \inf$ , on en déduit la majoration uniforme locale des normes  $L^4$  et  $H^1$  ( $N = \frac{2n}{n-2} = 4$ ). Dans le cas non plat, on obtient un résultat du type Brezis-Merle, en dimension 4 avec deux contraintes (Une inégalité de Harnack implicite).

iii) Dans le cas non plat, un exemple, ce résultat s'applique lorsque  $V \equiv \text{constante} > 0$ . On retrouve le résultat de YY.Li et L. Zhang, eux obtiennent l'inégalité optimale  $\sup \times \inf$ .

iv) Dans le cas non plat, un autre cas, on l'a dit ci-dessus, c'est celui où  $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$  et  $\min_M u_i \geq m > 0$ , on obtient une estimation locale uniforme.

v) Dans le cas non plat, on a un résultat analogue à celui de Brezis-Merle en dimension 2, en dimension 4 : pour deux suites  $(u_i), (V_i)$  solutions de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4,  $0 < a \leq V_i \leq b$  et  $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$ , alors  $u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), m, K, M)$ . (La fonction  $m \rightarrow c$  est décroissante de  $m > 0$ ).

vi) Voir la section 1 pour des exemples de  $(u_i, V_i)$  avec les deux contraintes dans le cas plat et non plat.

2

La formulation précédente en dimension 4 s'applique lorsqu'on suppose en  $x_0$  point critique de  $V > 0$   $V \in C^1(M)$ . on fait la preuve avec  $\min_M u \geq m > 0$  pour  $v = u/\varphi$  avec  $\varphi > 0$  duc changement de métrique conforme telle que  $\tilde{R}icci_{\tilde{g}}(x_0) = 0$ , on obtient :

$$\exists c, R > 0, \sup_{B_R(x_0)} v \leq c,$$

Donc,

$$\exists c, R > 0, u(x_0) \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c, \forall u > 0$$

Donc, on obtient une inégalité du type :

$$u(x_0) \leq c(x_0, V, \inf_M u, M, g),$$

1. Pour la preuve, dans le cas non plat, comme c'est une estimation locale, on prend  $x_0 \in M$ , on fait un changement de métrique conforme  $\tilde{g} = e^f g = \varphi^3 g$  de sorte que  $\tilde{R}icci_{x_0} = 0$ , on a (voir le livre d'Aubin)  $f(x_0) = 0$  et  $\varphi(x_0) = 1$ . On prouve l'estimation en supposant  $\min_M u \geq m > 0$  pour la nouvelle fonction  $v = u/\varphi$  pour  $m > 0$  (car, voir l'article de la preuve du cas général en dimension 4, il y a des termes  $\tilde{R}icci_{y_i}$  et  $\tilde{R}_{\tilde{g}}(y_i)$ , des termes en  $o(1)$ ), comme  $\varphi(x_0) = 1$ ,  $\min_{B_{\tilde{g}}(x_0)} v \geq (\min_M u)/2 \geq m/2 > 0$ . Comme on fait un changement de métrique conforme, au voisinage de  $x_0$ , tout est de "l'ordre" de  $u$  et  $m$  car  $\varphi(x_0) = 1$ ,  $f(x_0) = 1$ , l'exponentielle (en norme de matrices) est  $(1 + \epsilon)$ -Lipschitzienne, on a changé de métrique, les majorants restent de l'ordre de  $1 + \epsilon$  au voisinage de  $x_0$  car  $\varphi(x_0) = 1$ , ( $f(x_0) = 0$ ) et la constante  $k(a)$  entre  $\min_M u$  et la norme du gradient de  $V$  est plus grande.

On prouve alors, en supposant l'inégalité entre le  $\min_M u$  et le gradient de  $V$  :  $\min_M u \geq m > 0 \Rightarrow \sup_{B_{\tilde{g}}(x_0)} v \leq c \Rightarrow \sup_K u \leq c(a, b, m, K, M)$ . Après on remplace  $m$  par  $\min_M u$ .

2. Concernant l'exponentielle dans la preuve du résultat ci-dessus. On commence par changer la métrique  $d_g \rightarrow d_{\tilde{g}}$ , on a un facteur  $(1 + \epsilon)$ , puis on considère  $e^{\tilde{x}p_y}$ , l'exponentielle pour la métrique  $\tilde{g}$ , construite à partir d'une carte  $(\Omega, \psi)$  normale en  $x_0$  pour la métrique  $\tilde{g}$ , on passe de  $d_{\tilde{g}}$  à  $\|\psi \circ e^{\tilde{x}p}\|_{\mathbb{R}^4}$ , on a un majorant  $(1 + \epsilon)$ , puis on utilise le fait que  $\frac{d}{dz}[z \rightarrow e^{\tilde{x}p_{x_0}}(z)]|_{z=0} = id_{\mathbb{R}^4}$ , c'est à dire que c'est vrai pour la différentielle de  $\psi \circ e^{\tilde{x}p}$  et par continuité des différentielle, (en  $y$  et  $z$  assez petits), on a un majorant  $(1 + \epsilon)$ , puis on utilise la norme matricielle  $\sup$  des matrices et on écrit que :  $\psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_1) - \psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_2) = \int_0^1 \partial_s [\psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(s(z_1 - z_2) + z_2)] ds = \int_0^1 [(\partial_z (\psi \circ e^{\tilde{x}p_y})(s(z_1 - z_2) + z_2)) \cdot (z_1 - z_2)] ds$  et on obtient ;  $\|\psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_1) - \psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_2)\|_{\mathbb{R}^4} \leq (1 + \epsilon) \|z_1 - z_2\|_{\mathbb{R}^4}$ , uniformément en  $y$  voisin de  $x_0$  et  $|z_1| \leq r, |z_2| \leq r, r > 0$  assez petit.

pour toute solution  $u > 0$  de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à un  $V > 0$ ,  $V \in C^1(M)$  fixé ayant le point  $x_0$  comme point critique,  $\nabla V(x_0) = 0$ . Ou bien  $V \in C^{1,\alpha}(M)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < a \leq V \leq b < +\infty$  et  $\|V\|_{C^{1,\alpha}} \leq A$  et  $\nabla V(x_0) = 0$ , on obtient :

$$\forall u > 0, u(x_0) \leq c(a, b, A, \alpha, x_0, \inf_M u, M, g).$$

Il y a des exemples de solutions de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 avec  $x_0$  point où  $V$  est maximum et  $M$  compacte sans bord dans le livre d'Aubin.

Quand on prend les notations de YY.Li et L.Zhang :  $(M, g) = (B_1(0) \subset \mathbb{R}^4, g)$  et  $0 < V \in C^1(B_1(0))$  avec  $\nabla V(0) = 0$ , on obtient l'estimation a priori dans un voisinage de 0 en supposant le minimum uniformément minoré et aussi :

$$(1) \quad u(0) \leq c(V, B_1(0), g, \inf_{B_1(0)} u),$$

pour toute solution  $u > 0$  de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à  $V$  avec les conditions précédentes ou  $V \in C^{1,\alpha}(B_1(0))$  avec  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < a \leq V \leq b < +\infty$  et  $\|V\|_{C^{1,\alpha}} \leq A$  et  $\nabla V(0) = 0$ .

$$(2) \quad \forall u > 0, u(0) \leq c(a, b, A, \alpha, \inf_{B_1(0)} u, B_1(0), g).$$

Pour l'équation de Yamabe en dimensions 5 et 6 :

c) En dimension 5, il y a une relation explicite entre  $\sup_K u$  et  $\inf_M u$ .

$$(\sup_K u)^{1/7} \times \inf_M u \leq c,$$

d) En dimension 6, on a une estimation a priori et une relation implicite entre  $\sup_K u$  et  $\inf_M u$  (inégalité de Harnack implicite). Pour toute solution  $u > 0$  de l'équation de Yamabe en dimension 6 :

$$\sup_K u \leq c(K, M, g, \inf_M u).$$

Dans le cas d'une variété compacte sans bord  $(M, g)$  de dimension 5 ou 6 et d'invariant de Yamabe  $\mu_g > 0$ , le problème ne se pose pas, car Druet, YY.Li et L.Zhang prouvent que les solutions sont uniformément bornées, majorées et minorées uniformément par une constante positive.

Concernant l'article : "Some uniform estimates for scalar curvature type equations". En dimension 4, on a en plus de l'estimation a priori, une dépendance implicite du  $\sup_K u$  en fonction du  $\inf_\Omega u$  (inégalité de Harnack implicite) :

$$\sup_K u \leq c(a, b, A, \alpha, K, \Omega, \inf_\Omega u),$$

pour le théorème 3

et,

$$\sup_K u \leq c(a, V, K, \Omega, \inf_\Omega u).$$

pour le théorème 4.

**Remarque :** On a bien une fonction  $c$  de l'inf car, pour chaque  $m$  on a une constante  $c_0$  majorant de  $\sup_K u$  et l'ensemble des majorants est lui même minoré par  $\sup_K u$  et  $m$ ,  $c$  est alors l'inf des majorants de  $\sup_K u$ , qui est unique. On voit alors que cette correspondance  $m \rightarrow c$  est bien une fonction et aussi la correspondance  $(a, b, K, \Omega, m) \rightarrow c$  est une fonction. Après on remplace  $m$  par  $\inf_\Omega u$  comme on l'a dit ci-dessus. On a bien la correspondance  $(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \rightarrow c$  est une fonction.

De plus la fonction  $m \rightarrow c$  est décroissante en  $m > 0$ . On a alors, si  $\inf_{\Omega} u \geq m > 0$  (ou  $\inf_M u \geq m > 0$ , si on considère une variété Riemannienne  $M$ ), alors  $c(a, b, K, \Omega, \inf_{\Omega} u) \leq c(a, b, K, \Omega, m) < +\infty$ , ou  $(c(a, b, K, M, \inf_M u) \leq c(a, b, K, M, m))$ , si on est sur une variété Riemannienne  $M$ , on obtient alors l'estimation a priori lorsque l'inf est uniformément minoré.

## 6. CONSEQUENCE DU RESULTAT D'UNICITÉ : UNE INÉGALITÉ DE SOBOLEV ET UNE INÉGALITÉ D'INTERPOLATION

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension  $n \geq 4$  et de courbure scalaire  $S_g > 0$  partout sur  $M$  et orientable. Dans le livre d'Aubin, pour  $\epsilon > 0$  assez petit  $\epsilon < S_g$ , l'équation  $4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + \epsilon u = u^{N-1}$ ,  $u > 0$  a une solution et le résultat d'unicité dit que cette solution est unique. (Voir dans le livre d'Aubin, la fonctionnelle associée à cette équation possède un infimum atteint par cette solution unique). On obtient (voir aussi l'article de L. Veron et J.R. Licois et l'article sur Hal de J. Dolbeault, Esteban, Loss), une inégalité d'interpolation et une inégalité de Sobolev :

$\exists \epsilon_0 = \epsilon_0(n, M, g) > 0$ , tel que pour  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  on ait :

$$\inf_{u \in H^1(M) - \{0\}} \frac{4\frac{n-1}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \epsilon \int_M u^2 dV_g}{\left(\int_M |u|^N dV_g\right)^{2/N}} = \epsilon (\text{vol}(M))^{2/n},$$

Qu'on peut écrire :

Pour tout  $u \in H^1(M)$ , on a :

$$4\frac{n-1}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g \geq \epsilon \left( \left( \int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N} (\text{vol}(M))^{2/n} - \int_M u^2 dV_g \right),$$

ou encore,

$$\forall u \in H^1(M), 4\frac{n-1}{n-2} \|\nabla u\|_2^2 \geq \epsilon \left( (\text{vol}(M))^{2/n} \|u\|_{2^*}^2 - \|u\|_2^2 \right) \geq 0.$$

avec  $2^* = N = \frac{2n}{n-2}$  pour  $n \geq 4$ .

Finalement : il existe  $C = C(n, M, g) > 0$  telle que :

$$\forall u \in H^1(M), \|\nabla u\|_2^2 \geq C \left( (\text{vol}(M))^{2/n} \|u\|_{2^*}^2 - \|u\|_2^2 \right) \geq 0.$$

avec  $2^* = N = \frac{2n}{n-2}$  pour  $n \geq 4$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] Bahoura.S.S. Estimations uniformes pour l'équation de Yamabe en dimensions 5 et 6. J. Funct. Anal. 242 (2007), no. 2, 550-562.
- [2] Bahoura.S.S. Harnack inequalities for Yamabe type equations. Bull. Sci. Math. 133 (2009), no. 8, 875-892
- [3] Bahoura.S.S. sup  $\times$  inf inequality on manifold of dimension 3. Math. Aeterna, 1 (01) (2011), pp. 13-26
- [4] Bahoura.S.S. A uniform estimate for scalar curvature equation on manifolds of dimension 4. J. Math. Anal. Appl. 388 (2012), no. 1, 386-392
- [5] Bahoura.S.S. Some uniform estimates for scalar curvature type equations. Pacific. J. Math, vol 301, no 1, 2019, pp 55-65.
- [6] Druet.O. Compactness for Yamabe metrics in low dimensions. Int. Math. Res. Not. 23, 1143-1191 (2004)
- [7] Li.YY, Zhang.L. Compactness of solutions to the Yamabe problem. II, Calculus of Variations and PDEs 24 (2005), 185-237.

EQUIPED'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 75005, PARIS, FRANCE.  
Email address: samybahoura@yahoo.fr, samybahoura@gmail.com