Cas d'existence de solutions d'EDP.

Samy Skander Bahoura

▶ **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Cas d'existence de solutions d'EDP.. 2017. hal-01559242v13

HAL Id: hal-01559242

https://hal.science/hal-01559242v13

Submitted on 12 Aug 2021 (v13), last revised 18 Jul 2022 (v17)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CAS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'EDP.

SAMY SKANDER BAHOURA

1. CAS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'EDP

RÉSUMÉ. Estimations uniformes pour l'equation de Yamabe, l'equation du type Yamabe, l'equation de la courbure scalaire prescrite, l'equation du type courbure scalaire prescrite, l'equation de Gauss, l'equation de type Gauss. On se pose la question de savoir s'il y a des solutions.

En dimension 2 :

1) Les solutions de Liouville en fonction des fonctions holomorphes dont les dérivees ne s'annulent pas, voir le livre de C. Bandle.

2) Sur la boule unite, il y a des solutions radiales, nulle au bord, cela revient a resoudre une equation differentielle.

3) Si le domaine n'est plus une boule, par la methode des sur et sous solutions, il y a des solutions au probleme de Gelfand, $u = 0$ est sous solution et la fonction distance est une sur solution.(Voir Dupaigne).

4) Par la methode variationelle, il y a toujours des solutions, c'est lié à la compacité de l'injection de Moser-Trudinger dans L^1.

Pour la dimension 2, sur des surfaces compactes sans bord, il y a des resultats d'existence dans le livre d'Aubin, par la methode variationelle si la courbure scalaire $S = -1$ on peut minorer les solutions, lorsque $S = 0$ il se peut qu'on ne puisse pas minorer les solutions.

Pour une courbure scalaire negative, on peut resoudre le probleme de la courbure scalaire prescrite avec une courbure prescrite $f \leq 0$ par la methode des sur et sous solutions, puis on rajoute une constante ou fonction petite $f + c$ ou $f + g$, $c, g > 0$. Dans ce cas, il se peut qu'on puisse minorer les solutions. C'est fait dans le livre d'Aubin.

Dans le cas nul (courbure scalaire nulle, par la methode variationelle), on peut resoudre le probleme de la courbure prescrite, pour une courbure prescrite f changeant de signe et $\int f < 0$.Dans ce cas il se peut que les solutions ne soient pas minorables. C'est le probleme de Kazdan-Warner. C'est fait dans le livre d'Aubin.

En ce qui nous concerne, on se placera sur la partie positive de $f+c = c > 0$ et $f+g = g > 0$.

On peut resoudre le Probleme de la courbure scalaire sur une surface compacte non orientable, c'est fait dans le livre d'Aubin pour le Projectif réel de dimension 2, $\mathbb{P}_2$.

En dimension ≥ 3.

1) Pour l'équation de Yamabe (5 et 6) et l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 : Quand la variété est compacte sans bord, les résultats existent par Aubin-Schoen en dimension 5 et 6.

Si on considere une fonction f changeant de signe et que la courbure scalaire $S_g = 0$ (et de metrique g), par la methode variationelle f est courbure scalaire d'une metrique conforme, voir le livre de Hebey (pour les dimensions 3, 4, le theoreme d'Escobar Schoen) et le livre d'Aubin (le Theoreme d'Escobar-Schoen dans le cas conformement plat et le Theoreme de Bismuth). Voir aussi dans le livre d'Aubin d'autres conditions sur f pour qu'elle soit courbure scalaire d'une metrique conforme. Dans le cas, changeant de signe on se placera sur l'ensemble $\{f > 0\}$. Ceci est valable en toute dimension ≥ 3 (conformement plat, Escobar-Schoen et Aubin et invariant de Yamabe positif).

Pour la dimension 6, on résout le problème de la courbure scalaire prescrite sur une variété de courbure scalaire $S_g = -1$ (de metrique g), pour une courbure prescrite $f \leq 0$, par exemple une cutoff avec $f = 0$ une boule, puis par un théorème dans le livre d'Aubin, il existe un voisinage de f dans C^α, dans lequel on peut résoudre le problème de la courbure prescrite.

Voir dans le livre d'Aubin la condition de Rauzy, Ouyang, Tang, Vazquez-Veron, la valeur propre du Laplacien doit etre plus grande que la courbure scalaire pour resoudre dans le cas négatif le probleme de la courbure scalaire prescrite avec une courbure prescrite f cutoff. Or en prenant des petites boules, on a grace au Theoreme de Levy-Brhul, le comportement asymptotique des valeurs propres du Laplacien des petites boules geodesiques (elle le prouve dans le cas de varietes Riemanniennes analytiques), voir l'article et le monograph de Leon Karp-Mark Pinsky (ils le prouvent dans le cas de variétés Riemanniennes C^∞).(C'est la condition de Rellich sur les valeurs propres, developement asymptotique).

On résout le probleme de la coubrure prescrite pour des fonctions cutoff $f \leq 0$, par exemple (de boules petites), puis on ajoute une constante positive petite pour avoir $f+c$ courbure prescrite d'une métrique conforme telle que $f + c = c > 0 =$ boule et $f + c$ est négative dans un autre ensemble. Alors on remarque que la ou la solution est minimum, alors elle est minorée par une constante strictement positive. On vient de construire un exemple de solutions minorées par une constante positive, qui est un exemple de solutions en dimension 6 pour la quelle le minimum est minoré par une constante positive et est solution de Yamabe dans la boule ou $f + c = c > 0$. (le minorant est $m = 1/(1 - c)$, si on suppose, $0 \geq f \geq -1$, par exemple,(on peut remplacer -1 par $-\bar{M} < 0$ quelconque dans $0 \geq f \geq -\bar{M}$), utiliser l'équation et le fait qu'en P point minimum de la solution u, $\Delta u(P) \leq 0$).(Journal of Functional Analysis).

Pour la dimension 4 et l'équation de la courbure prescrite, il suffit de suivre le meme chemin que pour la dimension 6, en remplacant $c > 0$ par une fonction positive voisine de c, $c > 0$ petite, alors les solutions sont minorées par une constante $m > 0$. (Voir Travail de These dans le cas plat (JMPA) et Journal of Mathematical Analysis and Applications).

Quand la variété a un bord :

En dimension 5, il y a des solutions voir l'article de Z-C. Han et YY.Li, l'operateur doit etre de type positif, ce qui est possible si on considère des boules géodesiques, la courbure moyenne est alors presque constante et positive (proche de de la sphère), on choisit la courbure scalaire et de Ricci non constantes pour avoir un point non ombilique.(Journal of Functional Analysis).

2) Pour l'équation du type Yamabe : si $R = \dfrac{(n-2)}{4(n-1)} S_g$ avec S_g est la courbure scalaire et g la metrique.

Quand la variété est compacte sans bord, à partir de la dimension 4, il y a les résultats d'Aubin pour un opérateur du type ($\Delta + a$, avec $a < R$ en un point).(Bulletin des Sciences Mathématiques).

Quand la variété a un bord, à partir de la dimension 5, il y a les résultats de Holcman pour un opérateur du type ($\Delta+a$, avec $a < R$ en un point interieur).(Bulletin des Sciences Mathématiques).

Il y a l'article de Hebey-Vaugon (nodales solutions, 1994). (JMPA (dimension 4 cas plat avec 2 contraintes), Journal of Functional Analysis, Bulletin des Sciences Mathematiques et Mathematica Aeterna, Journal of Mathematical Analysis and Applications (dimension 4), ici on a des exemples avec ou sans minimum tendant vers zero).

3) Pour l'équation du type courbure scalaire prescrite :

Dans le cas sous-critique tendant vers le critique, il y a des solutions par la méthode variationnelle car l'injection de Sobolev est compacte dans ce cas.(Travail de Thèse).

4) Dans le cas radial, il y a des exemples dans l'article de C.C.Chen- C.S. Lin, propositions 4.2 et 4.3 (de : Comm. Pure. Applied. Math. 1997). avec des courbures prescrites de la forme $V = 1 - Kr^\rho$, $1 < \rho < n - 2$. (Voir travail de These, pour les fonctions radiales).

Il y a les résultats de Brezis-Nirenberg dans le cas d'un ouvert de l'espace euclidien en dimension ≥ 4, pour une perturbation non linéaire sous critique de l'équation de Yamabe dans le cas d'un ouvert plat. (Voir travail de Thèse).

Il y a le résultat de Druet, sur une variété compacte avec potentiel $f > 0$ et une perturbation sous-critique hu^{q-1}, $h > 0, q < \frac{2n}{n-2}, n \geq 5$, pour des valeures de q dependant d'un $q_c = 2$, on peut se placer localement et dans le cas plat ou non plat et dans le cas plat se ramener a un ouvert de l'espace euclidien. (Voir travail de Thèse et equations avec perturbation sous-critique dans le cas Riemannien).

Pour l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, on en a parlé ci-dessus, il suffit de considerer une courbure prescrite changeant de signe de telle manière que les solutions soient positives et minorées et se placer sur la partie positive de la courbure prescrite. (Voir Travail de These dans le cas plat (JMPA) et Journal of Mathematical Analysis and Applications).

Pour la dimension 2, les estimations a priori ont pour but de prouver l'existence de solutions par la méthode du degré topologique de Leray-Schauder, comme dans De Figueiredo-Lions-Nussbaum, une des conditions est que l'operateur compact M est nulle en 0, ici cette condition n'est pas satisfaite car il y a une exponentielle. Cette méthode peut s'appliquer à l'exponentielle, et aux problemes des valeurs propres non-lineaires.(Crandall-Rabinowitz prouvent l'existence d'une solution u_λ stable et la condition de stabilité implique que (u_λ) est bornée dans C^0. De Figueiredo-Lions-Nussbaum prouvent en utilisant le degré topologique qu'il y a une deuxieme solution v_λ en utilisant le fait que (u_λ) est bornée dans C^0, l'estimation a priori etait deja donné dans la condition de stablité de Crandall-Rabinowitz, par contre on ne sait pas si (v_λ) est bornée dans C^0, c'est en partie l'objet de ce qu'on fait ici, borner les solutions et en particulier (v_λ)).

D'autre part ce cas particulier (l'exponentielle) peut induire l'existence de solutions par la méthode des sur et sous solutions (voir Dupaigne), en fait ici on s'interesse aux estimations a priori des solutions d'équations du type Gauss. On a une compacité à la Gromov des suites de métriques ou bien un theoreme de compacité de fonctions (Ascoli ou d'autres theoremes, voir les livres de Brezis et Aubin, dans L^p, fonctions bornées dans une certaine topologie, L^p, H^1 par exemple et donc compacité faible) ou si on revient aux EDP, des estimations a priori elliptiques.

Pour les dimensions ≥ 3, on a des inégalités du type Harnack, une particularité de ces équations à exposant critique de Sobolev comme pour les fonctions harmoniques. C'est justifié par l'absence de conditions au bord.

Dans le cas d'une variété compacte sans bord, un des but des estimations du type $\sup \times \inf$ est de prouver qu'il n'y a que des blow-up isolés simples pour les solutions de ces équations et donc elles convergent vers uns fonction semblable à la fonction de Green, le Théorème de la masse positive s'il est vrai tout le temps, permet de dire que le terme constant est positif, alors que par l'identité de Pohozaev l'integrale d'une certaine quantité serait à la fois positive ou nulle (blow-up isolés simples) et strictement négative (masse positive), ce qui n'est pas possible. Donc il n'y a pas de blow-up, c'est-à-dire que les solutions sont bornées dans C^2 et par un argument d'homotopie et degré topologique le degré serait non nul ce qui veut dire qu'il y a des solutions.(Un résultat d'existence par le degré topologique et par consequent l'estimation a priori).

L'existence de solutions peut etre connu par la méthode variationnelle, on se borne à considérer que ce travail à pour but de chercher des estimations a priori et en particulier des inegalités du type Harnack, propriétés de ces solutions à exposant critique de Sobolev.

On suppose que les solutions existent, ce qui est possible dans les différents cas considérés et on prouve certaines propriétés qualitatives de ces équations. (Convergence de métriques, à la Cheeger-Gromov, estimations a priori, compacité de solutions, inégalités du type Harnack, résultat d'unicité et de rigidité (Marc Herzlich a parlé de théoreme de rigidité, condition sur la courbure scalaire, comme pour les theoremes de masse positive, voir son exposé dans Numdam.), on a aussi, equilibre et stabilité d'un systeme, dynamique d'un systeme, notions de blow-up et de diviseurs ou sans diviseurs (dimension 2 pour des domaines analytiques (Voir l'article de Marc Troyanov, le probleme est posé sur des surfaces de Riemann, 'environnement' cas des domaines complexes) et equation de Yamabe et de courbure scalaire prescrite (Yamabe avec diviseurs, un exemple, voir le these de Farid Madani)), intervalles de precisions de nombres, branche du maximum en fonction du minimum, sup et inf liés ou majorants et minorants liés, il y a une notion d'enroulement car on part du minimum ou du minorant et on obtient le maximum ou le majorant). Du point de vue de la physique, de la chimie, de l'astronomie, de la biologie, amplitude de "fonction d'onde" et des emissions, dynamique de particules ou des astres, cordes (fermees ou ouvertes), D-branes en dimension 2 (cordes ouvertes avec conditions de Dirichlet), non-agrégation de cellules (non-concentration de cellules) (amibes). Ondes, gazs, combustion, equilibre gravitationnel d'étoiles, non-concentration d'amibes. Voir les articles de Crandall et Rabinowitz, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, Chen-Li, Lin-Ni-Takagi.

Concernant les variétés qu'on considere, elles peuvent etre non conformément plates, il y a quelques exemples de ces variétés.

1) Les variétés de dimension 1 et 2 sont localement conformément plates.

2) Les sphères, sommes connexes de sphères, produit de sphères et d'un cerle, l'espace hyperbolique et le produit d'une variete de courbure sectionelle constante par un cercle, sont conformement plates.

Par le revetement, les projectifs réels sont conformement plats car de courbure sectionelle constante egale a 1 (Voir le livre d'Hebey, égalité des courbures sectionnelles, quand on a un revetement riemannien). Les projectifs de dimension paire sont non orientables, les projectifs de dimension impaire sont orientables (voir le livre de Lafontaine).

3) Il existe une variété compacte de dimension 3, non conformément plate, plus precisement, elle ne possede pas de structure localement conformement plate. (William Goldman).

Si on considere une variete de courbure sectionelle non constante et son produit par un cercle, alors la variete obtenue est non localement conformement plate.

4) Le projectif complexe de dimension 2 complexe donc de dimension 4 réelle est non conformement plat (métrique de Fubini-Study), il est d'Einstein et de courbure scalaire constante positive.

5) Les surfaces K3, non conformément plat de dimension 4 réelle. Il est d'Einstein de constante 0.

6) Le produit $S2 \times S2$ est de dimension 4 réelle et non conformement plat, d'Einstein, de courbure scalaire constante positive.

7) Les projectifs complexes de dimensions > 2, non conformément plat.(Métrique de Fubini-Study).

8) Maintenant, si on veut que la courbure scalaire soit, -1, 0, 1, on utilise les procédés suivant :

-On construit des variétés produit à partir des variétés précédentes, elles sont alors soit plates soit non plate (il suffit qu'une ne soit pas plate, voir le Hebey).

-On utilise les sommes connexes, en se référant à un article de Dominic Joyce, sur les différentes combinaisons possibles des sommes connexes donnant des variétés de courbures scalaire -1, 0, 1. On construit de telles variétés et elles peuvent etre plates ou non plates.

Exemple en dimension 4, cas non plat :

Soit S_2 la sphere de dimension 2. On considère une surface de genre grand, 2, la somme connexe de deux Tores $T_2 \sharp T_2$, on résout l'equation de la courbure prescrite constante $k = -1$, c'est fait dans le livre d'Aubin. On peut supposer qu'il existe une surface S de courbure scalaire constante (et donc sectionelle constante $-3/2$) égale à -3 par exemple. On considère le produit $S_2 \times S$, il est non conformément plat par le théorème dans le livre d'Hebey (courbures sectionelles constantes non opposées) et de courbure scalaire -1. On peut alors appliquer le procédé d'existence de solutions pour l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 minorées par $m > 0$ (pour la fonction cutoff nulle au voisinage du point P ou $Weyl(P) \neq 0$, est non nul). On obtient alors des solutions de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 minorées par une constante positive et sur une variété non localement plate.

Exemples en dimensions 5 et 6, cas non plat :

On peut faire la meme chose pour l'équation de Yamabe en dimension 5 et 6. On considere $S_1 \times S_2 \times S$ et $S_1 \times S_1 \times S_2 \times S$ qui sont non plate et de courbure scalaire -1, ici, S_1 est le cercle unité.

Un autre exemple en dimension 5, cas non plat :

Soit S_3 la sphere de dimension 3 (courbure scalaire 6 et courbure sectionelle 1) et S une surface compacte de courbure scalaire -6 (donc sectionelle -3). Alors le produit $S_3 \times S$ est non localement plat (voir theoreme du livre d'Hebey, courbures sectionelles constantes non opposees) et de courbure scalaire $R = 0$. En considerant une fonction changeant de signe et cutoff $f = \epsilon > 0$ dans une petite boule centree en P tel que $Weyl(P) \neq 0$ et $f < 0$ ailleurs telle que $\int f < 0$ (ϵ petit). On peut appliquer le theoreme de Bismuth en dimension 5 d'existence de solutions de l'equation de la coubure prescrite f changeant de signe (avec une courbure scalaire nulle sur une variete compacte). Ici on n'a pas forcement un minorant du minimum des solutions.

On a un exemple de solutions de l'equation de Yamabe sur $\{f = \epsilon > 0\}$, sur une variete non conformement plate de dimension 5 ou on n'a pas forcement un minorant des solutions.

Un autre exemple en dimension 5 :

Un theoreme dans le livre d'Aubin dit que si on considere une variété M de dimension $n \geq 3$ non conformement diffeomorphe a la sphere (en particulier non localment conformement plate), alors il existe $k > 1$, ne dependant que de la variété M, tel que toute fonction $f > 0$ verifiant :

$$\sup_M f \leq k \inf_M f,$$

est courbure scalaire d'une metrique conforme. On applique cela à $M = S_1 \times P_2(\mathbb{C})$ (le cercle fois le projectif complexe de dimension 2, M est non localement conformement plate par le theoreme dans le livre d'Hebey, de courbure scalaire constante $R > 0$, $dim(M) = 5$), et, f une fonction cutoff telle que $\frac{1+2\epsilon}{k} \leq f \leq 1+\epsilon$ et $f \equiv 1+\epsilon$ dans une boule centree en P telle que $Weyl(P) \neq 0$, ici, S_1 est le cercle unité.

Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Un autre exemple en dimension 6, cas non plat :

Soit S_1 le cercle unité et S_3 la sphere de dimension 3 (courbure scalaire 6 et courbure sectionelle 1) et S une surface compacte de courbure scalaire -6 (donc sectionelle -3). Alors le produit $S_3 \times S$ est non localement conformément plat (voir le livre d'Hebey). On prend alors $S_1 \times S_3 \times S$ qui est une variété de dimension 6 non localement conformément plate (voir le livre d'Hebey, dans un produit, des qu'une des variétés est non plate, la variété produit est non plate) et de courbure scalaire 0. On applique le résultat d'Aubin-Hebey et Bismuth, pour les variétés compactes non localement conformément plate de dimension 6 ayant une courbure scalaire nulle. Comme l'exemple en dimension 5. En considerant une fonction changeant de signe et cutoff $f = \epsilon > 0$ dans une petite boule centree en P tel que $Weyl(P) \neq 0$ et $f < 0$ ailleurs telle que $\int f < 0$ (ϵ petit). On peut appliquer le theoreme d'Aubin-Hebey et Bismuth en dimension 6 d'existence de solutions de l'equation de la coubure prescrite f changeant de signe (avec une courbure scalaire nulle $S_g = 0$ sur une variete compacte (M, g)). Ici on n'a pas forcement un minorant du minimum des solutions. Ici, on ne peut pas forcément minorer le minimum et sur une variété non-localement conformément plate. (voir le livre d'Aubin).

Exemple en dimension 4, cas plat et equation de la courbure scalaire prescrite :

Soit S_4 la sphere de dimension 4. On considere une variete de courbure scalaire -1 si elle est conformement plat, c'est fini, on utilise le meme procede que precedement dans le cas non plat. Si cette variete est non plate, par exemple $S_2 \times S$ du cas non plat, on utilise la somme connexe avec la sphere S_4 de Dominic Joyce ; on obtient une variete de courbure scalaire -1 dans le quelle (la partie de S_4 est plate, car on a soit la metrique de S_4 soit une fonction fois la metrique de S_4 et le tenseur de Weyl reste nul car on a un invariant conforme). On resout le probleme de la courbure prescrite pour une fonction cutoff nulle au voisinage du point P ou la metrique est plate et negative ailleurs puis on rajoute une fonction $C^{0,1}$. Alors on a des solutions minorees et comme la metrique est plate au voisinage de P et que c'est l'equation de la courbure prescrite, en faisant un changement de metrique conforme, on obtient l'equation sur un ouvert de $\mathbb{R}^4$ avec des solutions minorees.

Davis, M, W, (1985),(Closed orientable hyperbolic 4-manifold), montre l'existence d'une variété compacte sans bord orientable hyperbolique de dimension 4, c'est-a-dire de courbure sectionelle constante -1, (en fait, comme pour le Tore, ces varietes sont obtenues par un revetement riemannien du au quotient de l'espace hyperbolique par un groupe discret d'isometries). Donc elle est localement conformement plate et de courbure scalaire constante strictement negative. On peut utiliser le meme procede d'existence de solutions minorées par une constante positive $m > 0$ et solutions de l'equation de la courbure prescrite. Par un changement de metrique conforme on se ramene a un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^4$.

D'autres exemples en dimension 4 : (voir la section 5 pour la formulation en dimension 4)

Ici on regroupe les deux exemples "plat" et "non plat" précédents en un seul exemple.

La variété (par exemple) $M = S \times S_2$ de metrique g et courbure scalaire $S_g = -6$ dans le cas non-plat. (P tel que $Weyl(P) \neq 0$).

La variété (par exemple) $M = (S \times S_2) \sharp S_4$ ou $M = Davis\, Manifold$, dans le cas plat.(de metrique g et courbure scalaire $S_g = -6$ (on multiplie la metrique par un scalaire adequat)). (P tel que $Weyl(Q) \equiv 0$ dans une boule $B_r(P)$).

a) Pour un $m > 0$ il existe dans le livre d'Aubin des exemples de (u, V) solutions de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 pour un V (Lipschitzien) verifiant : $||\nabla V||_\infty = o(1) \times m\frac{c(\bar{M})\sqrt{c(\bar{M})}}{32e^2\sqrt{2}} \leq o(1) \times \frac{c(\bar{M})\sqrt{c(\bar{M})}}{32e^2\sqrt{2}}(\inf_M u)$. (On suppose ici $\min_M u \geq m > 0$ et M devient la boule $B_r(P)$). (la fonction cutoff $-\bar{M} \leq f \leq 0$ devient $-\bar{M} < -\bar{M} + c \leq$

$f + c \leq c$, $c = c(\bar{M}) > 0$ assez petit ($c < 1$ et $\bar{M} \to +\infty$)). (On aura $c(\bar{M})/2 \leq V \leq c(\bar{M})$ et $\inf u \geq 1/\sqrt{\bar{M}}$). (si $c(\bar{M}) \to 0$, on remplace V par $W = V/c(\bar{M})$ et u par $v = \sqrt{c(\bar{M})}u$) .

b) En faisant varier m, qui devient $m_i \to 0$ ($m_i > 0$, on peut prendre $m_i = \sqrt{c(\bar{M})}/\sqrt{\bar{M}}$ avec $\bar{M} \to +\infty$), on exhibe deux suites (u_i, V_i) (qui deviennent (v_i, W_i) si $c(\bar{M}) \to 0$) solutions de l'equation de la courbure scalaire prescrite avec $||\nabla V_i||_\infty = o(1) \times m_i \leq o(1) \times (\inf_M u_i)$. Sauf qu'ici on ne sait pas si $\min_M u_i \to 0$ ou $\min_M u_i \geq m' > 0$.

c) Le point b) précédent dit qu'on a deux suites (u_i, V_i) vérifiant les deux contraintes sur u et V avec le fait qu'on ne sait pas minorer le minimum des solutions par une constante $m' > 0$. C'est l'exemple voulu pour cette formulation en dimension 4 avec deux contraintes sur u et V. (les deux contraintes sont : 1) l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimenson 4, verifée par $u > 0$ relativement a un V Lipschitzien et entre deux constantes positives uniformément, 2) la deuxieme contrainte est entre $||\nabla V||_\infty$ et $\inf_M u$; $||\nabla V||_\infty \leq \dfrac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u$). (Un point essentiel est d'exhiber un exemple de fonctions (u_i, V_i) verifiant les deux contraintes sans rien savoir sur le minimum des solutions u_i, c'est ce qu'on a fait jusqu'ici).

Le terme $o(1)$ sert a attenuer l'effet de la presence des constantes universelles et du changement de metrique conforme dans le cas plat quand on se ramene à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.

Exemples en dimension 3, cas non plat et plat

Soit M_φ le Torus bundle de William Goldman. Cette variete compacte connexe orientable ne possede pas de structure localement plate. C'est à dire que toute metrique g sur cette variété est non localement plate. D'apres Aubin, il existe une metrique g_1 de courbure sclaire $S_{g_1} = -1$ et a partir de cette metrique, pour toute fonction f strictement negative quelque part, il existe une metrique g_2 telle que $S_{g_2} = f$. Il suffit de prendre f changeant de signe.

Comme on peut resoudre le probleme de la courbure prescrite avec H une courbure prescrite cutoff (autour de P tel que $C_{g_2}(P) \neq 0$, en dimension 3, le tenseur de Weyl est nul, on prend le tenseur de Cotton, C_{g_2} caracterise la courbure et c'est un invariant conforme), et $H \leq 0$, pour une courbure scalaire de depart egale a f relativement a la metrique g_2, puis on rajoute a H une constante $c > 0$ ou une fonction $k > 0$, dans ce cas il se peut qu'on ne puisse pas minorer les solutions, car le point Q ou le minimum est atteint peut etre tel que $f(Q) \geq 0$.

Remarque : Pour trouver des solutions de l'equation de la courbure prescrite, on considere, $f \leq 0$ cutoff alors $\exists\, g_2$ telle que $S_{g_2} = f$, puis on resout le probleme de la courbure prescrite avec $F \equiv -1$, c'est fait dans le livre d'Aubin, de plus la solution u_1 est unique. On considere la metrique $g_3 = u_1^{4/(n-2)} g_2$, sa courbure scalaire est -1. On resout le Probleme de la courbure prescrite (par les sous et sur solutions, c'est fait dans le livre d'Aubin), pour une courbure prescrite H cutoff, comme on l'a dit precedemment, puis on rajoute une constante positive c ou une fonction positive k. Dans ce cas les solutions u_c sont minorées par $m > 0$. Donc les solutions au final sont du type $u_1 u_c$ sont minorées. Ce qu'on vient de voir c'est qu'il existe des solutions et elles sont minorées par $m > 0$ de :

$$-\Delta u + fu = (H + c)u^{N-1},\ u > 0, \qquad (E_c)$$

Par contre ce qu'on ne sait pas est que si toutes les solutions sont minorables par $m > 0$.

Soit, u une solution de (E_c) alors elle n'est pas forcement minorable, car le point Q ou le minimum est attient peut etre tel que $f(Q) = 0$.

Dans le cas plat, il suffit de considerer $S_1 \times S_1 \times S_1$ qui est plat de courbure scalaire nulle (produit d'un Tore de courbure sectionelle nulle et d'un cercle, avec la metrique produit) et utiliser le theoreme du livre de Hebey, comme ce qu'on a fait pour la dimension 5. (Theoreme de Schoen-Escobar d'existence de solutions changant de signe).

Un exemple en dimension 3 :

On resout le probleme de la courbure prescrite sur la sphere S_2 de dimension 2 avec la courbure prescrite $R = 1 + (< x|e >)^2, R(-x) = R(x)$, (c'est un resultat de Moser, voir le livre d'Aubin), R est non constante et donc la courbure sectionelle associée est non constante.

On considere le produit $M_3 = S_1 \times S_2$ avec la metrique precedente sur S_2 de courbure sectionelle non constante. Donc M_3 est non localement conformement plate par un resultat d'Hebey (courbure sectionelle de S_2 non constante).

On utilise le theoreme dans le livre d'Aubin, comme dans l'exemple 3 en dimension 5. ($\sup f \leq k \inf f, k > 1$). On choisit $f > 0$ telle ∇f non borné, tendant vers une fonction Heavside, car un theoreme de YY.Li-M.Zhu dit que tout est borné, si f est C^2 et en particulier les solutions sont minorées).

Dans ce cas on n'a pas forcement un minorant des solutions de l'equation de Yamabe dans la boule ou $C_g(P) \neq 0$, (tenseur de Cotton), sur une variete non conforment plate.

On utilise le resultat d'Escobar-Schoen en dimension 3, pour une fonction $f = \epsilon > 0$ cuttof changeant de signe ou bien une f une fonction changeant de signe ayant un point critique en P point maximum de f tel que $C_g(P) \neq 0$. (voir le livre d'Hebey).

Dans ce cas aussi, on ne peut pas minorer les solutions sur une variete compacte non localement conformement plate de dimension 3.

Ici aussi, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemples en dimension 3 : equation du type courbure scalaire prescrite :

Soit M la variété de dimension 3 de William Goldman. Elle ne possede pas de structure localement conformément plate. D'apres Kazdan-Warner, voir dans le livre d'Aubin, cette variété possede une metrique g de courbure scalaire $S_g = -1$ et elle est non localement conformément plate. On prend $-\bar{M} \leq f_0 \leq 0$ une fonction cutoff nulle autour de P un voisinage non localment conformément plat (tenseur de Cotton non nul). On résout le probleme de la courbure scalaire prescrite avec f_0 courbure prescrite. Apres, on sait qu'il existe une voisinage dans $C^\alpha, \alpha \in]0,1[$ dans lequel on peut resoudre le probleme de la courbure prescrite. On prend par exemple $\frac{c(\bar{M})}{2} \leq f \leq c(\bar{M})$ et $||\nabla f||_\infty \leq kc(\bar{M}), k \geq 0$, $0 < c(\bar{M}) < 1$, et dans $B_r(P)$. Apres, voir dans le livre d'Aubin, un theoreme de Kazdan-Warner (par sur et sous solutions), l'equation $\Delta u + au = hu^5$ possede une solution avec $\frac{1}{8}S_g = -1/8 \leq a < 0$ et $h \leq f$, ($\Delta = -\nabla^i \nabla_i$). On prend alors $-1/8 \leq a \leq -1/16$ et $h = f - \eta c(\bar{M})/4 \leq f$, avec η une fonction cutoff dans $B_r(P)$, positive ou nulle, egale a 1 dans $B_{r/2}(P)$ et nulle en dehors de $B_r(P)$. On obtient alors, $c(\bar{M})/4 \leq h \leq 3c(\bar{M})/4$ et $||\nabla h||_\infty \leq kc(\bar{M})$. Si $c(\bar{M}) \to 0$, on remplace h par $W = h/c(\bar{M})$ et $u = u_{\bar{M}}$ par $v_{\bar{M}} = [c(\bar{M})]^{1/4} u_{\bar{M}}$. La solution $v = v_{\bar{M}}$ est minorée par $k_0[c(\bar{M})]^{1/4}/(1+\bar{M})^{1/4} \to 0$ si $\bar{M} \to +\infty$ ($k_0 > 0$). Tout cela dans une boule $B_{r/2}(P)$ avec $C_g(P) \neq 0$, C_g tenseur de Cotton.

a) On pouvait prendre $M = M_3 \sharp (S \times S_1)$ la somme connexe de Dominic Joyce (au final on obtient une variété de courbure scalaire -1 avec une partie non plate), de la variété non localment conformément plate $M_3 = S_2 \times S_1$ de l'exemple precedent et de la variété localement confromément plate $S \times S_1$ avec S une surface de courbure -1.

b) On pouvait prendre $M = S \times S_1$ avec S une surface de courbure scalaire non constante et < 0 (on resout l'equation de la courbure prescrite sur une surface de courbure -1 et la courbure prescrite une cutoff (et < 0) par exemple, la nouvelle metrique conforme est de courbure la fonction cutoff non constante). D'apres le livre de Hebey, elle est non conformément plate.

c) Dans le cas plat, on prend $M = S \times S_1$, S une surface de coubure scalaire -1.

Exemples en dimension $n \geq 4$ et $n = 4$: equation du type Yamabe :

On s'inspire de l'exemple precedent. On a de la meme maniere des exemples en dimensions $n \geq 4$ ($n > 3$) pour des equations du type Yamabe. En dimension 4, du type $\Delta u + au = u^3, u > 0$ et $\frac{1}{6}S_g = -1/6 \leq a < 0$ qui peuveut etre minorables et non necessairement minorables. La variété est $M = S \times S_2$ comme dans le premier exemple en dimension 4, non localement conformement plate ou, $M = (S \times S_2) \sharp S_4$ (de Dominic Joyce) ou $M = DavisManifold$ dans le cas plat.

Exemples en dimensions $n \geq 3, n = 3$: equation de courbure scalaire prescrite et du type courbure scalaire prescrite

On peut prendre l'exemple de Hebey-Vaugon (nodales solutions, 1994), pour les equations : $\Delta_g u_\epsilon + a(x)u_\epsilon = f {u_\epsilon}^{N-2} u_\epsilon$, $f > 0$, avec la condition au bord $u_\epsilon = \lambda_\epsilon h$, $h \not\equiv 0$ et $\lambda_\epsilon > 0$. On peut prendre $u_\epsilon \geq 0$ dans la preuve de Hebey-Vaugon, si $h \geq 0$ (h une fonction cuttof autour de $x_0 \in \partial\Omega$, par exemple). Par le principe du maximum $u_\epsilon > 0$ ($\Delta_g = -\nabla_i(\nabla^i), N = \frac{2n}{n-2}$ et $\Delta_g + a$ coercif, si $n = 3$, on peut prendre par exemple, $S_g \equiv 1$ et $a \leq \frac{1}{8}S_g = \frac{1}{8}$).

(En ecrivant dans la fonctionnelle de Hebey-Vaugon, $J(u) = G(u+\tilde{h}) - \int_\Omega |\nabla_g \tilde{h}|^2 dV_g$, cela revient à prendre l'inf sur $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ avec $u + \tilde{h} \geq 0$. On a si $u_{\alpha,q}$ est un minimiseur alors $v_{\alpha,q} = |u_{\alpha,q} + \tilde{h}| - \tilde{h}$ est aussi un minimiseur avec $v_{\alpha,q} + \tilde{h} \geq 0$.).

On peut considerer sur une variété compacte sans bord M, un point P tel que, $C_g(P) \neq 0$ $(n = 3)$, $Weyl(P) \neq 0 (n \geq 4)$, cas non plat, ou $C_g(Q) \equiv 0$ $(n = 3)$, $Weyl(Q) \equiv 0 (n \geq 4)$, $Q \in B_r(P)$ avec $r \leq \frac{inj_g(M)}{2}$, cas plat, avec $\Delta + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$ coercif et puis prendre, $\Omega = \exp_P^{-1}(B_{r/2}(P))$ et $\tilde{g} = \exp_P^*(g)$ et $a \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}$. Par exemple pour $n = 3$, $M = S_2 \times S_1$ dans le cas plat et $M = S_2 \times S_1$ avec une metrique de courbure sectionnelle > 0 et non constante sur S_2 pour le cas non plat. Dans le cas $n \geq 3$ et $h > 0$ partout sur $\partial\Omega$ et non constante, on a $\inf_\Omega u_\epsilon > 0$ et $\inf_\Omega u_\epsilon \to 0$ si $\epsilon \to 0$ (equation de Yamabe), et en particulier en dimension 4, on peut choisir $f = V_\epsilon \in [1/2, 3/2]$ vérifiant la deuxieme contrainte ci-dessus, $||\nabla V_\epsilon||_\infty = o(1)C(\epsilon) = o(1)\sqrt{\lambda_\epsilon} = o(1)\inf_\Omega u_\epsilon$ (avec ici $\inf_\Omega u_\epsilon \to 0$ si $\epsilon \to 0$). Par exemple $f = V_\epsilon = 1 + \epsilon \times C(\epsilon) \times r$ avec $\epsilon \to 0$, ici, $r : x \to d(x, P)$, la distance a un point et $C(\epsilon)$ la constante de l'article de Hebey-Vaugon.

En dimension 4. Dans le cas de la boule unité (cas plat), on peut prendre $a(x) \equiv 0$, $\tilde{h} = h \equiv 1$ et $f = V_\epsilon = 1 - \epsilon \times C(\epsilon) \times r$ qui est strictement decroissante, on obtient une solution $v_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ reguliere et non constante (car $\lambda_\epsilon \neq 0$, $\lambda_\epsilon > 0$) et solution de $\Delta v_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon (v_\epsilon + 1)^3$ avec, $v_\epsilon + 1 \geq 0$ et $u_\epsilon = (\lambda_\epsilon)^{(n-2)/4}(v_\epsilon + 1) = \sqrt{\lambda_\epsilon}(v_\epsilon + 1) \geq 0$, par le principe du maximum, $v_\epsilon > 0$, et d'apres Gidas-Ni-Nirenberg, v_ϵ est radiale. D'apres l'article de Hebey-Vaugon $\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 \geq c_0 > 0$ et donc (puisque $\lambda_\epsilon \to 0$), $||u_\epsilon||_4 = ||u_\epsilon||_N \geq \tilde{c}_0 > 0$ et donc $u_\epsilon(0) = \max_\Omega u_\epsilon = \max_{B_1(0)} u_\epsilon \geq \bar{c}_0 > 0$. Ici, en dimension 4 avec 2 contraintes, c'est a dire, $\Delta u_\epsilon = V_\epsilon u_\epsilon^3$ et $||\nabla V_\epsilon||_\infty = o(1)\inf_\Omega u_\epsilon$ et $\inf_\Omega u_\epsilon = \sqrt{\lambda_\epsilon} \to 0$ et $u_\epsilon(0) \geq \bar{c}_0 > 0$.(On a $u_\epsilon(0) \to +\infty$, car sinon (u_ϵ) convergerait vers une solution $u > 0$, (car $u \geq 0$ et $u(0) > 0$), u solution d'un probleme de Dirichlet avec exposant critique de Sobolev, sur la boule unité, or d'apres la formule de Pohozaev, ce n'est pas possible, u n'existe pas ou bien $u \equiv 0$ ce n'est pas possible).

En prenant une suite $(\epsilon_k)_k$ avec $\epsilon_k \to \bar{\epsilon} > 0$ et $h > 0$ non constante, on a des exemples avec $\min_\Omega u_{\epsilon_k} \geq m > 0$ (equation de Yamabe et equation du type Yamabe).

En dimension 3, il y a aussi l'exemple de YY.Li et M.Zhu en dimension 3 pour l'equation du type courbure scalaire prescrite sur une varieté compacte sans bord de dimension 3 non conf.diffeom. à la 3-sphere.

Exemples en dimension 4, cas plat et non plat

On prend une surface de Riemann S de courbure scalaire $R = -2$ (donc sectionnelle -1) et la sphere S_2 de courbure scalaire 2 (donc sectionelle 1). Le produit $S_2 \times S$ est conformement plat et de coubure scalaire nulle, par le theoreme du livre d'Hebey (courbure sectionnelles constantes opposées). On peut appliquer le Theoreme d'existence de solutions pour des courbures prescrites changeant de signe en dimension 4, sur une variete compacte de courbure scalaire nulle (Resultat d'Escobar-Schoen). On pouvait prendre aussi, le produit de 2 Tores, muni de la metrique produit (courbures sectionelles nulles donc opposées), $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ de coubures scalaire nulle. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Dans le cas non plat, il suffit de considerer la surface $K3$ munie d'une metrique non localement conformement plate, de courbure scalaire nulle. On fait la meme chose que dans le cas plat. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

On peut prendre $P_2(\mathbb{C})$ de dimension reelle 4 non localement conformemnt plat et de courbure scalaire constante positive, on applique le theoreme d'Aubin comme en dimension 5, dans le cas d'invariant de Yamabe positif. Ici aussi, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemples en dimension $n \geq 3$, cas plat

Sur le Tore $\mathbb{T}^n, n \geq 3$, il existe une metrique plate (voir, Gallot-Hulin-Lafontaine) et donc de courbure scalaire $R = 0$. Le theoreme dans le livre d'Hebey d'existence de solutions pour des courbures scalaires prescrite changeant de signe et d'integrales negative, sur une variété compacte de courbure scalaire nulle, n'est pas forccement vrai, sauf en dimensions 3 et 4 (Escobar-Schoen) et en dimension 5 par Bismuth avec des conditions supplementairers, dans le cas non conformement plat.

Par contre dans le cas conformement plat (ce qui nous interesse ici), ce theoreme est vrai en prenant des fonctions cutoff changeant de signe, c'est un theoreme d'Escobar-Schoen.

On pouvait resoudre une equation differentielle sur une boule de l'espace euclidien avec ou sans condition au bord (attention a la formule de Pohozaev).

Par exemple, dans des couronnes, Kazdan-Warner montrent l'existence de solutions avec conditions de Dirichlet.

Il y a aussi le resultat de Coron dans des domaines à trous, on peut modifier un peu le domaine pour avoir une infinité de solutions pour une infinité de domaines à trous, par exemple on enleve des disques.

On a aussi les solutions de Caffarelli-Gidas-Spruck. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité au bord : sur la boule unité.

Ici, $\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$.

Soit $\mu \geq 0$ tel que :

$$\mu = \inf\{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,\ \int_\Omega \frac{Ve^u}{|x-x_0|^{2\alpha}} dx = 1,\ u \in H_0^1(\Omega)\}$$

Ici, $\Omega = B_1(0)$, la boule unité.

1) On prouve que cet ensemble est non vide :

On considere, $u_\beta(r) = \beta(1-r^2)$ et $0 < \epsilon \leq V \leq 2\epsilon$. On prend d'abord la fonction nulle $u \equiv 0$. Alors, on choisit $\epsilon > 0$ petit tel que :

$$\int_\Omega Ve^u/|x-x_0|^{2\alpha} dx \leq 2\epsilon \int_\Omega 1/|x-x_0|^{2\alpha} dx < 1.$$

On utilise u_β, on utilise les coordonnes polaires :

$$\int_\Omega Ve^u/|x-x_0|^{2\alpha} dx \geq \int_{B_1(0)} Ve^{u_\beta}/|x-x_0|^{2\alpha} dx \geq \frac{2\pi\epsilon}{2^{2\alpha}} \int_0^1 re^{\beta(1-r^2)} dr$$

Donc en prenant β grand, on a :

$$\int_\Omega Ve^u/|x-x_0|^{2\alpha} dx \geq \frac{2\pi\epsilon}{2^{2\alpha+1}\beta} e^\beta (1-e^{-\beta}) \to +\infty.$$

Donc, il exsite $\beta_0 \leq \beta_{max} = \beta_{max}(\epsilon, \alpha)$ tel que :

$$\int_\Omega Ve^{u_{\beta_0}}/|x-x_0|^{2\alpha} dx = 1.$$

Donc μ est bien definit.

2) En utilisant une suite minimisante et l'injection compacte de Moser-Trudinger dans L^1. μ est atteint et par les multiplicateurs de Lagrange on a l'existence de u et λ tels que :

$$\Delta u = \lambda Ve^u/|x-x_0|^{2\alpha},\ u \in H_0^1,\ \int_\Omega Ve^u/|x-x_0|^{2\alpha} dx = 1.$$

u est reguliere. Si $\lambda \leq 0$ par le principe du maximum $u \leq 0$ et donc :

$$\int_\Omega Ve^u/|x-x_0|^{2\alpha} dx < 1.$$

Ce n'est pas possible.

Donc $\lambda > 0$ et $u > 0$. En utilisant la premiere fonction propre du Laplacien φ_1 (dans le probleme variationel) et u_{β_0} on a $\mu \leq C(\beta_{max})$ et $\lambda \leq C(\beta_{max}, \epsilon, \varphi_1) = C(\alpha, \epsilon, \varphi_1)$. Puisque $\beta_{\max}$ est uniformement borné, par l'injection compacte de Moser Trudinger, $\int e^{u_i}$ converge et donc les solutions sont uniformement bornées (ici on fait varier V).

On vient de construire une solution du probleme variationel avec singualrité au bord et ces solutions(puisque λ est uniformément borné) verifient des conditions du probleme du type Brezis-Merle avec bornes uniformes. Ceci dans le cas d'un $\epsilon > 0$ fixé et petit.

Dans le cas où on fait tendre $\epsilon > 0$ vers 0. on a

Le terme $\lambda \times \epsilon$ et donc λV sont unifromément bornés et positifs (il suffit d'utiliser la premiere fonction propre du laplacien φ_1 pour eliminer le terme $\int_\Omega e^u/|x-x_0|^{2\alpha}\varphi_1 dx$) et en utilisant la contrainte $\int_\Omega e^u/|x-x_0|^{2\alpha} dx \geq 1/2\epsilon \to +\infty$ quand $\epsilon \to 0$.

Finalement, on a deux exemples, un avec volumes bornés (energies bornées) et un avec volumes tendant vers l'infini (energies tendant vers l'infini) et λV uniformement borné. Il est clair

que quand le volume tend vers l'infini (l'energie tend vers l'infini) le $\sup_\Omega u$ tend vers l'infini. Il suffit de supposer les volumes bornés (energies bornées).

Pour construire un exemple avec volume bornés et courbures positives et uniformément bornées avec singularité au bord mais avec sup divergeant, on part du contre exemple de Brezis-Merle (la singularité est $x_0 = 0$ et Ω la boule unité centrée en $(1, 0)$) :

$$\Delta u_\epsilon = f_\epsilon,$$

avec condition de Dirichlet. ($\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$).

On pose alors, $V_\epsilon = |x|^{2\alpha} f_\epsilon e^{-u_\epsilon}$. Alors on a :

$$\Delta u_\epsilon = V_\epsilon \frac{e^{u_\epsilon}}{|x|^{2\alpha}},$$

avec condition de Dirichlet.

On remarque que quand $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$, $|x|$ est de l'ordre de $d_\epsilon = |a_\epsilon|$, car $d_\epsilon = \epsilon^\beta$ avec $\beta < 1$. Puis le support de f_ϵ est dans $B_\epsilon(a_\epsilon)$, donc :

$$||V_\epsilon||_\infty \leq C d_\epsilon^{2\alpha} \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{d_\epsilon}\right)^{2A}$$

Ceci est la premiere condition.

Pour la deuxieme condition on a aussi un facteur $d_\epsilon^{-2\alpha}$, dans w_ϵ quand $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$ et aussi, en distinguant le cas $\{x, |x - a_\epsilon| \geq d_\epsilon/2\}$, dans ce cas, $\dfrac{d_\epsilon}{|x - a_\epsilon|} \leq 2$ et le cas, $\{x, \epsilon \leq |x - a_\epsilon| \leq d_\epsilon/2\}$, dans ce cas, $|x| \geq d_\epsilon/2$ par l'inegalité triangulaire, car $|a_\epsilon| = d_\epsilon$. On obtient alors, la condition de borne uniforme de $\int_\Omega \dfrac{e^{u_\epsilon}}{|x|^{2\alpha}} dx$,

$$d_\epsilon^{-2\alpha} \epsilon^2 \left(\frac{d_\epsilon}{\epsilon}\right)^{2A},$$

Qui doit etre constant. Ce qui veut dire que l'exposant de ϵ, dans cette quantité doit etre nul. Et $d_\epsilon = \epsilon^\beta$ avec $\beta = \dfrac{A - 1}{A - \alpha}$ convient car $\alpha \in (0, 1)$.

Dans le cas regulier ($\alpha = 0$), si on suppose $0 < a \leq V \leq b$, la premiere condition (sur la fonction nulle) est $b < 1/\pi$. Par les memes arguments que precedemment on a $\lambda \times a \leq \lambda_1 \leq 6$, (pour voir que $\lambda_1 \leq 6$, on utilise la definition de λ_1 comme minimum d'un probleme variationel calculant le quotient pour la fonction explicite $u = 1 - r \in H_0^1$).

Comme $\int_\Omega V e^u = 1$, on a $\int_\Omega \lambda V e^u = \lambda \leq \dfrac{6}{a}$ et comme a peut etre choisit arbitrairement inferieur à $b < 1/\pi$, on peut choisit a tel que $\int_\Omega \lambda V e^u dx < 24\pi$. Ainsi, on a exhibé dans le cas regulier des suites de volumes bornés et tel que λV borné et positif et $\int_\Omega \lambda V e^u < 24\pi$. Comme β_{max} depend de a qui est fixe, $\beta_{\max}$ est fixe et donc par l'injection compacte de Moser-Trudinger, la suite des $\sup_\Omega u$ est bornée.

On pouvait prendre les fonctions radiales de la forme $u_i(r) = \log \dfrac{8c_i^2}{(1 + c_i^2 r^2)^2} - \log \dfrac{8c_i^2}{(1 + c_i^2)^2}$, ($(c_i)$ bornée), nulles au bord et de volume fini et de masse $\leq 8\pi$.

De plus, Brezis et Merle donnent un exemple de suites de volumes bornés et de courbure prescrite positives et bornées et de masses egales a $4\pi A$ avec $A > 1$ quelconque (la masse est definit comme $m = \int_\Omega W e^u dx$, avec W la courbure prescrite et u la solution). Donc on peut choisir A de sorte que la masse, m soit $m < 24\pi$, mais $\sup_\Omega u \to +\infty$.

On voit que la condition de borne uniforme sur le volume est vrai dans les deux cas et est necessaire et que pour le deuxieme cas le $\sup_\Omega u$ diverge.

De meme que precedemment, comme b peut etre choisit petit, on peut exhiber une suite de volume divergeant dont on connait pas la masse. Par contre en utilisant la suite de fonctions radiales (u_i) ci-dessus avec $c_i \to +\infty$ on a exemple avec volume divergeant et masse $\leq 8\pi$.

On regarde maintenant le cas d'une equation avec un operateur different du Laplacien. On ajoute un terme en gradient qu'on ne peut pas eliminer quand on cherche a savoir si l'ensemble des solutions est borné.

Exemple en dimension 2 pour l'equation avec operateur different du Laplacien : sur une boule unité.

On part de :

$$-\Delta u - \epsilon((x_1 - x_{01})\partial_1 u + (x_2 - x_{02})\partial_2 u) = Ve^u,$$

$$-\Delta u - \epsilon(x - x_0) \cdot \nabla u = Ve^u,$$

Avec condition de Dirichlet. Ici, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$.

On utilise les notations du contre exemple de Brezis et Merle.

Le domaine Ω est la boule de rayon 1 et de centre $x_0 = (1, 0)$.

On considere z_i (par la methode variationnelle), tel que :

$$-\Delta z_i - \epsilon_i(x - x_0) \cdot \nabla z_i = -L_{\epsilon_i}(z_i) = f_{\epsilon_i}.$$

Avec condition de Dirichlet. Par les theroemes de regularite et les injections de Sobolev $z_i \in C^1(\bar{\Omega})$.

On a :

$$||f_{\epsilon_i}||_1 = 4\pi A.$$

Par un theoreme de dualite de Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$||\nabla z_i||_q \leq C_q, \ 1 \leq q < 2.$$

On resout :

$$-\Delta w_i = \epsilon_i(x - x_0) \cdot \nabla z_i,$$

Avec condition de Dirichlet.

Par les estimations elliptiques, $w_i \in C^1(\bar{\Omega})$ et $w_i \in C^0(\bar{\Omega})$ uniformement.

Par le principe du maximum :

$$z_i - w_i \equiv u_i.$$

avec u_i la fonction du contre exemple de Brezis et Merle.

On ecrit :

$$-\Delta z_i - \epsilon_i(x - x_0) \cdot \nabla z_i = f_{\epsilon_i} = V_i e^{z_i}.$$

Donc, on a :

$$\int_\Omega e^{z_i} \leq C_1,$$

Et,

$$0 \leq V_i \leq C_2,$$

Et,

$$z_i(a_i) \geq u_i(a_i) - C_3 \to +\infty, \ a_i \to O.$$

Pour avoir un contre-exemple sur le disk unité, on fait une translation de $x \to x - x_0$ dans le contre-exemple précédent.

Remarques sur ce type d'equations :

1-Comme dans le cas du Laplacien, on peut avoir un exemple avec solutions uniformement bornees, par la methode variationnelle (comme dans le cas avec singularite au bord).

2-On peut ecrire ce probleme dans la boule de rayon 1 ou une ellipse et les deux problemes sont differents. Car si on passe de l'ellipse au cercle par une transformation lineaire $(y_1, y_2) = (x_1/a, x_2/b)$, le laplacien ne se conserve pas. Si on utilise une tranformation conforme par le theoreme de Riemann, le terme $x \cdot \nabla u$ ne se conserve pas. Il y a un probleme dans la formule de Pohozaev quand on cherche a savoir si les solutions sont compactes.

Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité d'exposant positif : sur une boule unité.

Pour construire un exemple avec volume bornés et courbures positives et uniformément bornées avec singularité au bord d'exposant positif, mais avec sup divergeant, on part du contre exemple de Brezis-Merle (la singularité est $x_0 = 0$ et Ω la boule unité centrée en $(1, 0)$) :

$$\Delta u_\epsilon = f_\epsilon,$$

avec condition de Dirichlet. ($\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$).

On pose alors, $V_\epsilon = |x|^{-2\beta} f_\epsilon e^{-u_\epsilon}$, $\beta \geq 0$. Alors on a :

$$\Delta u_\epsilon = |x|^{2\beta} V_\epsilon e^{u_\epsilon}$$

avec condition de Dirichlet.

On remarque que quand $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$, $|x|$ est de l'ordre de $d_\epsilon = |a_\epsilon|$, car $d_\epsilon = \epsilon^s$ avec $s < 1$. Puis le support de f_ϵ est dans $B_\epsilon(a_\epsilon)$, donc :

$$||V_\epsilon||_\infty \leq C d_\epsilon^{-2\beta} \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{d_\epsilon}\right)^{2A}$$

Ceci est la premiere condition.

Pour la deuxieme condition on a aussi un facteur $d_\epsilon^{2\beta}$, dans w_ϵ quand $x \in B_\epsilon(a_\epsilon)$ et aussi, en distinguant le cas $\{x, \epsilon \leq |x - a_\epsilon| \leq d_\epsilon\}$ du cas $\{x, |x - a_\epsilon| \geq d_\epsilon\}$. Pour borner $\int_\Omega |x|^{2\beta} e^{u_\epsilon} dx$, il revient de borner :

$$d_\epsilon^{2\beta} \epsilon^2 \left(\frac{d_\epsilon}{\epsilon}\right)^{2A},$$

Qui doit etre constant. Ce qui veut dire que l'exposant de ϵ, dans cette quantité doit etre nul. Et $d_\epsilon = \epsilon^s$ avec $s = \dfrac{A-1}{A+\beta}$ convient.

Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité logarithmique : sur une boule unité.

La construction de l'exemple est similaire au cas avec singularités negatives et positives. Le point essentiel est de borner la quantité :

$$-\log(d_\epsilon/2d) \times \epsilon^2 \times (d_\epsilon/\epsilon)^{2A}.$$

Ceci revient a resoudre :

$$-\log(d_\epsilon/2d) \times d_\epsilon^{2A} = \epsilon^{2(A-1)}.$$

Et de verifier qu'il est plus grand que ϵ. Ici, $d = diam(\Omega)$. On considere alors la fonction $f(r) = -\log(r/2d) \times r^{2A}$.

Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité logarithmique interieure et poids continu : sur une boule unité.

On reprend les notations du premier exemple en dimension 2 avec $x_0 = 0 \in \Omega = B_1(0)$, $d = dimaetre(B_1(0)) = 2$. Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\lambda_\epsilon > 0$ tel que :

$$\Delta u_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon \frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} e^{u_\epsilon}.$$

$\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$. On choisit V_ϵ Lipschitzien tel que :

$$0 < \epsilon \leq V_\epsilon \leq 2\epsilon, \ ||\nabla V_\epsilon||_\infty \leq k\epsilon, \ k > 0,$$

Par exemple, $V_\epsilon = \epsilon(1 + r^2)$ ou $V_\epsilon = \epsilon(1 + x_1^2)$ (pour avoir une solution non-radiale).

En utilisant la premiere valeur propre et la premiere fonction propre et une integration par parties, on a : $0 < \lambda_\epsilon \times \epsilon \leq C\lambda_1$, $C > 0$ independante de ϵ.

Si $\lambda_\epsilon \times \epsilon \to k_0 > 0$ si $\epsilon \to 0$, en ecrivant $W_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon$, alors u_ϵ serait solution d'un probleme variationnel en dimension 2 avec condition de Dirichlet ralativement a $0 < a \leq W_\epsilon \leq b < +\infty$ et $||\nabla W_\epsilon||_\infty \leq A$, on aurait la compacité de u_ϵ dans C^0 ce qui contredit la condition $1 =$

$\int_\Omega \frac{1}{-\log\frac{|x|}{2d}} V_\epsilon e^{u_\epsilon} dx \to 0$ quand $\epsilon \to 0$, car $0 < \epsilon \leq V_\epsilon \leq 2\epsilon$. (On peut utiliser la formule de Pohozaev-Rellich pour borner l'integrale de $\frac{1}{-\log\frac{|x|}{2d}} W_\epsilon e^{u_\epsilon}$ et aboutir a une contradiction).

Donc, $\lambda_\epsilon \times \epsilon \to 0$. On pose alors, $\bar{W}_\epsilon = \frac{\lambda_\epsilon V_\epsilon}{\lambda_\epsilon \times \epsilon}$. $v_\epsilon = u_\epsilon + \log(\lambda_\epsilon \times \epsilon)$.
On obtient :

$$\Delta v_\epsilon = \frac{1}{-\log\frac{|x|}{2d}} \bar{W}_\epsilon e^{v_\epsilon},$$

$$0 < 1 = a_1 \leq \bar{W}_\epsilon \leq b_1 = 2 < +\infty$$

$$\inf_\Omega v_\epsilon > -\infty,$$

et,

$$\inf_\Omega v_\epsilon = \log(\lambda_\epsilon \times \epsilon) \to -\infty, \text{ avec } \epsilon \to 0,$$

Pour avoir une infinité de solutions, on prend par exemple, $V_\epsilon = \epsilon(1 + sr^2)$ avec $s \in [0, 1]$ ou $V_\epsilon = \epsilon(1 + sx_1^2)$, $s \in [0, 1]$. Les fonctions V_ϵ sont Lipschitziennes, les solutions u_ϵ sont $C^2(\bar{B}_1(0))$. La fonction u_ϵ blow-up a l'interieur de $B_1(0)$ en au moins un point x_0 (sinon, elle serait bornée et convergerait vers 0 dans $C^2(\bar{B}_1(0))$, par les memes arguments que ci-dessus (formule de Pohozaev-Rellich et le fait que $||\nabla u_\epsilon||_q \leq C_q$), ce qui contredirait $\int_\Omega e^{u_\epsilon} \to +\infty$). Finalement, on a pour $R, \beta_0 > 0$, $\max_{B_R(x_0)} v_\epsilon \geq \beta_0 > 0$ avec $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. On a aussi par la formule de Pohozaev-Rellich, $\int_\Omega \frac{e^{v_\epsilon}}{-\log\frac{|x|}{2d}} dx \leq C$.

RÉFÉRENCES

[1] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.

[2] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.

[3] H. Brezis, L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure and Appl. Math. Volume 36, 4, pp 437-477. (1983).

[4] Crandall.M.G, Rabinowitz.P.H. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. Arch.rational Mech.Anal, 58, 207-218, 1975.

[5] Davis.M.W. A hyperbolic 4-manifold Proc. Amer. Math. Soc.93 (1985), pp.325-328.

[6] Druet.O. Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds. C. R. Acad. Sci. Paris, 327, serie I, p 377-381. 1998.

[7] Dupaigne. Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics). 2011.

[8] J. Escobar. R. Schoen. Conformal metrics with prescribed scalar curvature. Inventiones mathematicae (1986) 86, page 243-254.

[9] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.

[10] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.

[11] E. Hebey, M. Vaugon. Existence and multiplicity of nodal solutions for nonlinear elliptic equations with critical Sobolev growth. Journal of Functional Analysis, 119, 298-318, 1994

[12] D. Holcman. Solutions nodales sur les varietes riemanniennes non localement conformement plates a bord. Comment. Math. Helv. 76 (2001), no. 3, 373-387.

[13] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.

[14] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.

[15] Karp. L, Pinsky. M . The first eigenvalue of a small geodesic ball in a Riemannian manifold. Bull. Sci. Math. (2)111 (1987), no. 2,229-239.

[16] Li.YY, Zhu.M. Yamabe type equations on three dimensional Riemannian manifolds. Communications in Contemporary Math. 1 (1999), 1-50.

[17] J. Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.

[18] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342

[19] Troyanov. M. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), no. 2, 793-821.

2. OPERATEURS D'ORDRE 2.

1) Ingalités de Harnack pour les solutions, les sur-solutions, les sous-solutions : ces estimations se font á l'aide du procédé d'itération de De Giorgi-Nash-Moser.

2) Existence de solutions : formulation variationelle et théorèmes du type Lax-Milgram dans les Hilberts.

3) Existence des solutions pour des EDP elliptiques avec operateur Laplacien : Potentiel Newtonien, regualrité en se ramenant (par soustraction du postentiel Newtonien) aux fonctions harmoniques qu'on sait regulieres par le Theoreme de Weyl (conditions minimales L^1, mais la formulation variationelle on sait qu'on a mieux). pour la regularite au bord, on suppose la condition de Dirichlet, alors les fonctions harmoniques (on se ramene a ce cas par soustraction du potentiel Newtonnien) sont prolongebles grace à la formule de la moyenne qu'on etend à travers le demi-espace par symetrisation). La regularité C^2 se fait grace a la regularité du noyau Newtionnien (se fait par calcul explicite de derivees sous le signe somme), puis par soustraction, on se ramene aux fonctions harmoniques).

4) On dispose des theoremes d'existence et regularite pour le probleme de Dirichlet pour le Laplacien. Pour le cas d'un operateur elliptique d'ordre 2, on utilise la methode de continuité pour prouver l'existence de solutions avec regularite de Schauder. Puis on compare par le principe du maximum dans $W_0^{1,2}$ ces solutions regulieres aux solutions obtenues par la formulation variationelle. Si le coefficient devant le terme lineaire $c \leq 0$, alors le principe du maximum donne l'unicité des solutions, d'ou la regularité de Schauder, inetreures et sur le bord. Par une alternative de Fredholm on etend au cas ou c non necessairement negatif ou nul.

5) Régualrité $W^{2,p}$ d'Agmon, elles sont font par la methode des quotients differentiels, elles sont interieures et au bord pour des fonctions tests $C_c^2(\Omega)$ pour la regularité interieures (au sens des distributions) et pour des fonctions $C_0^2(\Omega)$ (C^2 et nulles au bord) pour la regularité au bord. En plus de la methode des quotients differentiels, Agmon utilise l'estimation a priori de fonctions regulieres dans $L^p, p > 1$ (approximations) d'Agmon-Douglis-Nirenberg (obtenue par les noyaux).

Les estimations uniformes $W^{2,p}$ peuvent etre obtenues (en plus de ce que dit Agmon) par le procede de Calderon-Zygmund, qui consiste a obtenir une estimée L^p pour les derivees secondes a partir de celle du noyau Newtonien. C'est une decompostion en n-cubes de Calderon-Zygmund et l'utilisation du theoreme d'interpolation $(L^1, L^2) \to L^p (1 < p < 2)$ (et par dualité $L^p, p > 2$) de Marcienewicz-Thorin. Puis on ramene l'estimation pour l'operateur L à une estimation pour un operateur à coefficient constant comme le Laplacien par exemple.

Les theoremes d'Agmon et de regularite sont utilises dans la construction des fonctions de Green.

3. FONCTIONS DE GREEN.

Le monograph de Druet-Hebey-Robert est assez clair et precis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la decomposition de cette fonction est de classe C^1. C'est essentielement du au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une recurrence pour prouver que les termes dela decompostion sont Sobolev et continues en dehors de la digaonale. (Ou bien comme dans le monograph de Druet-Hebey-Robert, on fait la difference des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est ecrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara,pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des derivees directionelles).

Soit $(\bar{W}, g)$ une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note (M, g).

Soit H la fonction definie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne depend pas de la fonction rayon d'injectivé dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle depend (à gauche en P) du rayon d'injectivé dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur W avec $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$, on peut alors la prolonger par 0 sur ∂W. Alors $\delta(P)$ est continue sur $\bar{W}$.

Tout d'abord, remarquons que ces fonctions sont mesurables et integrables, car continues en dehors d'un ensemble de mesure nulle. (un point ou la diagonale).

On pose :

$$\Gamma_1(P,Q) = -\Delta_Q H(P,Q),\ \Gamma_{i+1}(P,Q) = \int_W \Gamma_i(P,R)\Gamma_1(R,Q)dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P,Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par recurrence les Γ_i sont continues en dehors de la diagonale et pour P ou Q proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le theoreme de la convergence dominee de Lebesgue, on prouve qu'elles sont $W^{1,\infty}$ en dehors de la diagonale en Q car elles sont Sobolev est leur derivees bornees. La fonction $d(P,Q) = d_P(Q)$ est reguliere en Q en dehors de P et en fixant Q elle est Lipschitzienne en P, on alors le fait que $(R,Q) \to \partial_Q d_R(Q)$ est continue en dehors de la diagonale et L^∞_{loc}. Donc, par le theoreme de convergence dominee (enlever de petites boules) $\Gamma_i * \partial_Q\Gamma_1$ et $\Gamma_i * \partial_Q H$ sont C^0 en dehors de la diagonale. Donc, les Γ_i et $\Gamma_i * H$ sont C^1 en dehors de la diagonale.(Le point essentiel est la fonction distance).(Concernant la fonction distance, $(R_i,Q) \to d(R_i,Q) = d(R_i, exp_{R_i}(r\theta)), Q = exp_{R_i}(r\theta), \epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3, \theta \in \mathbb{S}_{n-1}$ et la carte de reference est $[B(R_0,\delta(R_0)/3), exp_{R_0}]$ avec $R_i \to R_0$. On voit alors qu'en coordonnes geodesiques polaires centrees en R_i un calcul de $\Delta_{g,Q}d(R_i,Q) \in L^\infty$ et $d(R_i,.) \to d(R_0,.)$ et par les estimations elliptiques on a $\partial_Q d(R_i,Q) \to \partial_Q d(R_0,Q)$ pour $d(R_i,Q) \geq \epsilon_0 > 0$.)

Dans le cas où $W = M$ sans bord :

D'apres sa formule explicite H est C^1 en dehors de la diagonale. Elle est $W^{1,1+\epsilon}$ de chaque variable pour un $\epsilon > 0$ assez petit, par recurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli :

$$\partial_P\Gamma_{i+1}(P,Q) = \int_M \partial_P\Gamma_i(P,R)\Gamma_1(R,Q)dR,$$

et,

$$\partial_Q\Gamma_{i+1}(P,Q) = \int_M \Gamma_i(P,R)\partial_Q\Gamma_1(R,Q)dR.$$

Pour une varieté avec bord, on ne peut pas deriver par rapport P, car l'expression de Γ_i et en paticulier de Γ_1 contient δ_P qu'on sait seulement continue et pas forcement differentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions Γ_i sont continues en P en dehors de la diagonales et $L^{1+\epsilon}, \epsilon > 0$ seulement, mais ceci suffit pour prouver la symetrie par le theoreme d'Agmon)

On a aussi, les estimees de Giraud. Ainsi de proche en proche, les Γ_i deviennent de plus en plus regulieres. on utilise le theoreme de Giraud pour prouver que $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$ avec $\lambda + 2 > n$ (donc $\geq n+1$ car λ est entier puisqu'on derive les Γ_i). (Si $\lambda > n-1$ ($\lambda \geq n$) c'est fini (on regarde Γ_{k-1}), si $\lambda = n-1$ alors : $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$ et $\partial_P\Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$ et $\partial_Q\Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$ qui est en $\log$ par Giraud et donc $\partial_P\Gamma_{k+1}$ et $\partial_Q\Gamma_{k+1}$ sont $C^0(M \times M)$ par Giraud et donc Γ_{k+1} est $C^1(M \times M)$. (Utiliser le produit de convolution, car Γ_{k+1} et sa derivée Sobolev sont continues pour ecrire qu'elle est $\int \partial_P$, l'integrale d'une fonction continue donc C^1, il a convergence uniforme de la convolution, car la fonction et son Sobolev sont continues). Dans le cas avec bord, Γ_k continue implique que Γ_{k+1} est $W^{1,\infty}$ en Q.(On a mieux C^1 en Q car la fonction $(R,Q) \to \partial_Q d(R,Q)$ est C^0 en dehors de la diagonale de W et H est a support compact (elle s'annule avant le bord) et donc ($\Gamma_k * \partial_Q H$ est C^0 en dehors de la diagonale de $\bar{W}$)).

Dans le cas d'un operateur $-L = -\Delta + h$, la regualrite de Γ_{k+1} depend de celle de h. Si par exemple h est C^1 alors comme precedemment Γ_{k+1} est C^1 de P et Q. Bien sur le Γ_1 change :

$$\Gamma_1(P,Q) = -\Delta_Q H(P,Q) + h(Q)H(P,Q).$$

On peut faire plus, on remarque que par exemple que pour les varietes a bord, la parametrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les theoremes d'Agmon et de regularité dans la construction complete de la fonction de Green dans le cas des varietes a bord, voir le monograph de F.Robert (que je n'ai pas cité ici).

4. PRINCIPE DU MAXIMUM.

4.1. **La methode "moving-plane" et "moving-sphere".** La méthode "moving-plane" consiste à rechercher, si possible, les points de symétrie pour des E.D.P définies sur des domaines ayant des axes de symètries, puis, de caractériser ces solutions. On part de "l'infini", un point trés loin, puis, on considère la fonction et son symétrisée par rapport au plan contenant ce point, puis on ramène, le plan jusqu'á l'annulation de la différence entre cette fonction et son symétrisée, si c'est le cas, le plan limite est le plan de symétrie. En plus de la determination d'une barriere, cette technique utilise le principe du maximum et le lemme de Hopf. Ici, on suppose les solutions dans $C^{2,\alpha}$, $\alpha > 0$.

Cette technique de symetrie a été introduite par A.D. Alexandrov.

Notons que certains des auteurs suivants, utilisent les proprietes du au principe du maximum.

Dans les deux points particuliers suivants l'idée essentielle est qu'on doit utiliser les propriétés du principe du maximum :

1-Le principe du maximum lui meme et le lemme de Hopf.

a) Principe du maximum sur un domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ et lemme de Hopf.

b) Principe du maximum pour une variété compacte à bord, $[\lambda, t] \times \mathbb{S}_{n-1}, n \geq 2$ et lemme de Hopf. L'operateur est global en la variable de la sphère, le principe du maximum s'applique localement dans des domaines de la forme $]\lambda, t[\times U$ avec U un ouvert de carte de la sphere(autour d'un point (t_0, θ_0) quelconque, on s'est ramené a un ouvert particulier de $\mathbb{R}^n$, un n-cube ou n-parallelepipede par exemple pour appliquer le lemme de Hopf).

2-Le minimum est atteint sur le bord, (YY.Li-L-Zhang). Et principe du maximum de Hopf.

Exemple 1 : Gidas-Ni-Nirenberg.

Sur la boule unité B de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)-\epsilon} & \text{dans } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } B_1(0) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Où $\epsilon > 0$ est trés petit.

Gidas-Ni-Nirenberg : La solution u du problème précédent est radiale et strictement décroissante.

Exemple 2 : De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li, Ma-Wei.

Sur un ouvert regulier en dimension 2, on considere :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q, \ 1 < q < +\infty & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

Et aussi,

$$\begin{cases} -\Delta u = Ve^u, & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec,

$$0 \leq V \leq b, \text{ sur } \bar{\Omega},$$

et,

$$|\nabla V| \leq A, \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Pour l'equation avec l'exponentielle, on suppose de plus que :

$$\int_\Omega e^u dx \leq C,$$

Alors les solutions sont uniformément bornées sur $\bar{\Omega}$.

Un point essentiel est de borner les solutions au voisinage du bord. Cela se fait par la méthode "moving-plane".

Estimations de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ce sont des estimations uniformes au voisingage du bord, on les prouve grace a la méthode moving-plane. C'est essentiellement une transformationde Kelvin, pour rendre le voisinage du bord convexe, et une application du principe du maximum (suivant la direction normale).

Par la methode moving-plane on prouve que les points crititques sont loin du bord, en se placant suivant la normale, apres avoir utiliser la transformee de Kelvin. Voir les articles de Chen-Li et Ma-Wei.

En utilisant la transformee de Kelvin et le principe du maximum, on classifie les solutions de l'equation :

Remarque : sur le fait que la régularité du domaine dans (De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li) est au moins $C^{2,\beta}, \beta > 0$. Soit $\alpha_y =< \nu_1 | \nu(y) >$, l'angle avec la normale qui doit etre > 0, avec $y \in \partial\Omega$, qu'on devrait obtenir pour appliquer la méthode moving-plane. Ici, $\nu(y)$ est la normale au bord en y : Pour definir l'angle, il suffit d'avoir une tangente a la courbe de $y \to \nu(y)$, et donc une dérivée de $\nu(y)$, (l'application de carte φ est au moins deux fois dérivable). Pour avoir une branche continue de 'cones', il suffit que $y \to (\nu(y))'$ soit continue, (l'application de carte φ est C^2, φ'' continue). Pour que l'angle $\alpha_y > 0$, soit strictement positif, il suffit que la tangente a la courbe de $\nu(y)$ soit non nulle, il suffit alors d'avoir la regularité $C^{0,\beta}, \beta > 0$ de la tangente (forme arrondie : continue et arrondie : $C^{0,\beta}$).(Donc, il suffit que l'application de carte soit $C^{2,\beta}, \beta > 0$).

Exemple 3 : Caffarelli-Gidas-Spruck et Chen-Li.

Caffarelli-Gidas-Spruck. Les solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, \ u > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ u(0) = 1, \ \nabla u(0) = 0. \end{cases}$$

Sont :

$$u(x) = (1 + \gamma |x|^2)^{(2-n)/2}, \ \gamma > 0$$

La preuve de Chen-Li est plus courte et elle utilise les memes arguments que ceux de Caffarelli-Gidas-Spruck, c'est essentielement une transformation de Kelvin pour avoir un comportement asymptotique et aussi l'utilisation du principe du minimum pour des fonctions regulieres singulieres en un point puis l'argument moving-plane basé sur le principe du maximum.

Il y a une autre preuve simplifiée du résultat de Caffarelli-Gidas-Spruck obtenue par YY.Li et L.Zhang.

On presente le resultat de Classification par la methode moving-plane des solutions d'une EDP elliptique nonlineaire en dimension 2 :

Chen-Li : pour $K > 0$, les solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta u = K e^u, \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ u(0) = 0, \ \nabla u(0) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^u < +\infty. \end{cases}$$

Sont :

$$u(x) = -2 \log(1 + \gamma |x|^2), \ \gamma = \sqrt{(K/8)}$$

Cette preuve utilise des estimees asymptotiques specifiques a la dimension 2 et le principe du maximum et lemme de Hopf.

Exemple 4 : Han.

Si on remplace B par un ouvert régulier quelconque, noté Ω, en maintenant la même équation, les solutions ne sont pas forcément radiales.

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)-\epsilon} & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où $\epsilon > 0$ est trés petit.

Han Il existe un voisinage du bord ω ne dépendant que de la géomètrie du domaine Ω et de la dimension n, ainsi qu'une constante $c = c(\Omega, n) > 0$ telle que :

$$||u||_{L^\infty(\omega)} \leq c.$$

Où u est la solution du problème précédent.

Exemple 5 : Chen-Lin.

En utilisant la méthode moving-plane, Chen et Lin ont prouvé une estimation a priori sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$:

Si u est solution de :

$$-\Delta u = V u^{(n+2)/(n-2)},$$

avec,

$$0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty, \ ||\nabla V||_\infty \leq A,$$

$$||\nabla^\alpha V|| \leq C_\alpha ||\nabla V||^{\beta(\alpha)}, \ \text{ avec } \ \alpha \leq n-2.$$

alors,

$$\sup_K u \times \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, A, C_\alpha, n, K, \Omega).$$

La preuve de Chen-Lin consiste a utiliser le principe du maximum et le lemme de Hopf pour prouver que la symetrisee d'une certaine fonction est positive et que la derivee de cette fonction est strictement positive alors que par le raisonnement par l'absurde ("blow-up") cette fonction a maximum local (point critique), ce qui est absurde.

Exemple 6 : Brezis-Li-Shafrir.

En dimension 2, la methode "moving-sphere" donne pour les solutions de :

$$-\Delta u = V e^u,$$

On suppose $0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty$ et que V est uniformément Lipschitzienne,

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, ||\nabla V||_\infty, K, \Omega).$$

Exemple 7 : Korevaar-Mazzeo-Pacard-Schoen.

La methode "moving-sphere" donne :

Sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, on considère l'équation de Yamabe :

$$-\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, \ \ u > 0.$$

Alors : pour tout compact K de Ω, on a :

$$\sup_K u \times \inf_\Omega u \leq c = c(K, n, \Omega).$$

La preuve est basee sur le fait qu'on ne pas pas avoir une certaine condition au bord par le principe du maximum et le lemme de Hopf.

Cet article considere les solutions singulieres, leur objectif est de prouver qu'il existe des solutions singulieres sur un ensemble d'une certaine mesure (taille). Il y a l'article de C.C.Chen et C.S.Lin. Chen-Lin prouvent le résultat (l'inegalité de Harnack) pour une courbure prescrite generale et qui peut etre constante, c'est ce qu'on a ecrit avant.

Exemple 8 : C.C.Chen-C.S.Lin.

En dimension 2, la technique "blow-up" et une inégalité géométrique sur les courbures intégrales a permis a CC.Chen et CS.Lin de prouver pour l'equation :

$$-\Delta u = V e^u,$$

avec, $0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty$ et que V est uniformément Hölderienne ($C^\alpha, \alpha \in]0, 1]$), que :

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, \alpha, ||V||_{C^\alpha}, K, \Omega).$$

Ce théorème peut etre prouvé par la methode "moving-sphere" de YY.Li-L.Zhang (point suivant).

Exemple 9 : Li-Zhang.

La methode "moving-sphere" donne :

Sur une variété Riemannienne quelconque (M, g) (non nécéssairement compacte), de dimension $n \geq 3$ et de courbure scalaire S_g, on considère l'équation de Yamabe :

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = u^{(n+2)/(n-2)}, \ \ u > 0.$$

Alors : en dimensions $3, 4$, pour tout compact K de M, on a :

$$\sup_K u \times \inf_M u \leq c = c(K, M, g, n = 3 \text{ ou } n = 4).$$

Apres avoir utiliser la transformation de Kelvin, Li-Zhang prouvent que la positivite de la fonction obtenue par symetrisation implique la positivite de la fonction limite (obtenue par symetrisation) et dans ce cas elle serait constante, ce qui n'est pas possible par le resultat de Caffarelli-Gidas-Spruck. (La fonction limite est due au "blow-up").

La preuve de Li-Zhang s'adapte en dimension 3 sur un ouvert Ω quand on suppose les courbures prescrites uniformément entre deux constantes positives a, b et s-hölderiennes, $s \in]1/2, 1]$, de constante de Hölder A, on a une inégalité du type :

$$(\sup_K u)^{2s-1} \times \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, A, s, K, \Omega)$$

.

4.2. **Principe du maximum dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.** Le principe du maximum dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ est basé sur l'inegalite de Kato dont on peut trouver la preuve dans le livre d'Otared Kavian.

Kato : si $u \in L^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1(\Omega)$, alors on a au sens des distributions :

$$\Delta u^+ \geq \chi_{\{u \geq 0\}} \Delta u.$$

On remarquera qu'en utilisant la fonction $f_\epsilon(t) = \sqrt{(t^2 + \epsilon^2)}$, on prouve que $Trace(|u|) = |Trace(u)|$ et $Trace(u^+) = (Trace(u))^+$ et donc si $u \in W_0^{1,1}$ alors $u^+ \in W_0^{1,1}$ et appliquer a u^+ ce qui est consideré comme le principe de comparaison dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce. (il suffit de consider la fonction $-\Delta \xi = 1$ avec condition de Dirichlet).

Exemple 1 : Brezis-Merle.

On considère deux suites de fonctions (u_i, V_i) solutions (au sens des distributions) de :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec,

$$V_i \geq 0, \ ||V_i||_{L^p(\Omega)} \leq C_1, \ ||e^{u_i}||_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_2,$$

avec, $1 < p \leq +\infty$. Alors, on a, ou bien

$$\forall\, K \subset\subset \Omega, \ \sup_K |u_i| \leq c = c(K, C_1, C_2, \Omega)$$

ou bien,

$$u_i \to -\infty, \text{ sur tout compact de } \Omega,$$

ou bien,

Il existe un ensemble fini de points S tel que $u_i \to -\infty$ uniformément sur tout compact de $\Omega - S$ et $u_i \to +\infty$ sur S et, au sens faible, on a,

$$V_i e^{u_i} \to \sum_j \alpha_j \delta_{a_j}, \text{ avec } \alpha_j \geq 4\pi/p', \text{ et } a_j \in S.$$

Comme corollaire de ce résultat, on a :

$$\sup_K u \leq c = c(\inf_\Omega V, ||V||_{L^\infty(\Omega)}, \inf_\Omega u, K, \Omega).$$

Cela veut dire que le maximum local est fonction du minimum.

Concernant la compacité globale :

On a aussi la compacité globale de Chen-Li, cité dans la section 4.1. Le resultat de Chen-Li utilise le fait qu'on a compacité au voisinage du bord lorsque $||\nabla \log V|| \leq A$, puis il etend ce resultat lorsque $||\nabla V|| \leq A_1$, pour cela il utilise l'extension des resultats de Brezis-Merle (Theorem 1 de Brezis Merle), qui reste vrai dans des domaines Lipschitzien dès qu'on a la regularité des solutions dans $W_0^{1,2}$, car le principe du maximum est valable dans ce cas (on utilise l'integration par parties, qui est vrai des que la regularité du bord est Lipschitzien. Pour l'inegalité de Sobolev aussi et la resolution d'un probleme variationnel dans L^2. Lipschitz suffit). Ceci pour la fonction u_2 du debut de preuve de Chen-Li. (et aussi l'extension des fonctions harmoniques et la formule de Poisson, pour u_1 qui necessite une application conforme). Voir la preuve du corollaire de l'article de Chen-Li.

(Voir l'article de Sweers-Nazarov. Journal.Diff.Equations. 2007. Pour les conditions de regularité $W^{2,p}$ des problemes sur des ouverts Lipschitziens.)

Remarque sur la preuve de Chen-Li : pour etendre la partie u_1 harmonique, il faut supposer le domaine analytique, pour pouvoir utiliser une transformation conforme qui reste invariante par le Laplacien. Principe de symetrisation de Schwarz. Donc, le resultat de compacité reste vrai avec la regularité smooth lorsque on suppose $||\nabla \log V|| \leq A$. Mais la regularité du domaine doit etre supposée analytique lorsqu'on passe a $||\nabla V|| \leq A_1$.

Dans leur preuve Chen-Li, utilisent le fait que l'operateur est invariant par appplication de carte, ceci est possible si cette application est conforme, elle preserve le Laplacien. Puis, symetrise la fonction en symetrisant un probleme de Dirichlet, puis soustrayent les valeurs aux bords et ils obtiennent l'image de v_1. Alors u_1 est l'image de v_1 par l'application de carte. Maintenant pour construire v_1 ils utilisent une symetrisation d'un probleme de Dirichlet, qui requiert les solutions dans $W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon), p > 2$ (la formule de representation de Green reste valable, dans ce cas, voir la preuve dans Gilbarg-Trudinger). Puis, ils utilisent la formule integrale de Poisson (qui necessite d'avoir l'operateur Laplacien).

a) Pour utiliser la formule de Poisson, on conserve le Laplacien : transformation conforme φ.

b) Ils symetrisent $uo\varphi$ ils obtiennet une fonction $u_v \in C^1(\bar{B}_\epsilon(0)) \cap W^{2,p}$.

c) Ils resolvent : $-\Delta v_1 = -\Delta u_v$ avec condition de Dirichlet sur $B_\epsilon(0)$.

d) Ils utilisent la formule integrale de Poisson pour $v_1 - u_v \in W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon), p > 2$. Sur le bord, il n'y a que les valaurs de u.

(Ce travail revient à symetriser une fonction harmonique qui nécessite le theoreme de symetrisation de Schwarz , qui necessite une application conforme, donc un domaine de depart Ω analytique).

Exemple 2 : Equation avec poids continu :

Sur un domaine borné $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ avec $d = diametre(\Omega)$ et $0 \in \Omega$, on considère des fonctions (u, V) solutions (au sens des distributions) de l'equation du type Liouville :

$$-\Delta u = \frac{1}{-\log \frac{|x|}{2d}} V e^u \text{ dans } \Omega$$

avec,

$$u \in L^\infty_{loc}(\Omega),\ 0 < a \leq V \leq b < +\infty,\ 0 \in \Omega.$$

Alors on a l'inégalité de Harnack implicite :

Pour tout compact K de Ω :

$$\sup_K u \leq c(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u)$$

et,

$$\inf_{\Omega} u \geq m > -\infty \Rightarrow \sup_{K} u \leq c = c(a, b, K, \Omega, m).$$

RÉFÉRENCES

[1] A.D. Alexandrov. Uniqueness thoerems for surfaces in the large. V. Vestnik Leningrad Univ. Mat. Astronom 13, 5-8 (1958); Amer. Math. Soc. Transl. 21, 412-416 (1962).

[2] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.

[3] Ambrosio. L, Fusco. N, Pallara, D. Functions of Bounded variations and Free discontinuity Problems, Oxford Press. 2000.

[4] Bahoura.S.S. Lower bounds for sup+inf and sup * inf and an extension of Chen-Lin result in dimension 3. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 28 (2008), no. 4, 749-758

[5] Bahoura.S.S. About Brezis Merle problem with Holderian condition. Mathematica Aeterna, Vol 4, no 1, 13-25, 2014.

[6] Bahoura.S.S. A uniform boundedness result for solutions to the Liouville type equation with boundary singularity. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 23, no 2, 487-497. 2016.

[7] Bahoura.S.S. A compactness result for an equation with Holderian condition. Commun. Math. Anal. Vol 21, no 1, 23-34, 2018.

[8] Bahoura.S.S. A local uniform boundedness result for an elliptic equation. hal-02495444. 2020.

[9] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.

[10] Berestycki. H. Nirenebrg. L. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), no. 1, 47-92

[11] L. Boccardo, T. Gallouet. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. J. Funct. Anal. 87 no 1, (1989), 149-169.

[12] H. Brezis. Analyse Fonctionelle et Applications. 1983.

[13] Brezis. H, Marcus. M, Ponce. A. C. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[14] H. Brezis, F. Merle. Uniform estimates and Blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimension. Commun. in Partial Differential Equations, 16 (8 and 9), 1223-1253(1991).

[15] H. Brezis, W. A. Strauss. Semi-linear second-order elliptic equations in L1. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 565-590.

[16] H. Brezis, YY. Li , I. Shafrir. A sup+inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities. J.Funct.Anal.115 (1993) 344-358.

[17] L. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984) 369-402.

[18] Chen. W, Li, C. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. Duke Math. J. 63 (1991), no. 3, 615-622.

[19] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. Arch. Rational. Mech. Anal. 122 (1993) 145-157.

[20] C-C. Chen, C-S. Lin. Local behavior of singular positive solutions of semilinear elliptic equations with Sobolev exponent. Duke Math. J. 78 (1995), no. 2, 315-334.

[21] C-C.Chen, C-S. Lin. Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes. Comm. Pure Appl. Math. L(1997) 0971-1017.

[22] C-C. Chen, C-S. Lin. A sharp sup+inf inequality for a nonlinear elliptic equation in $\mathbb{R}^2$. Commun. Anal. Geom. 6, No.1, 1-19 (1998).

[23] de Figueiredo, D. G, Lions, P.-L, Nussbaum, R. D. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63.

[24] O. Druet, E. Hebey, F.Robert, Blow-up theory in Riemannian Geometry, Princeton University Press 2004.

[25] B. Gidas, W-M. Ni, L. Nirenberg. Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. Commun. Math. Phys. 68, 209-243 (1979).

[26] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.

[27] Han Z-C. Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non lineaire 8 (1991) 159-174.

[28] E. Hebey, Analyse non lineaire sur les Variétés, Editions Diderot.

[29] O. Kavian. Introduction à la Théorie des points critiques. Springer-Verlag.1993.

[30] N. Korevaar, F. Pacard, R. Mazzeo, R. Schoen. Refined asymptotics for constant scalar curvature metrics with isolated singularities. Invent. Math. 135 (1999), no. 2, 233–272.

[31] YY. Li. Harnack Type Inequality : the Method of Moving Planes. Commun. Math. Phys. 200,421-444 (1999).

[32] YY.Li, L.Zhang. Liouville type theorems and Harnack type inequalities for semilinear elliptic equations, Journal d'Analyse Mathematique, 90 (2003), 27-87.

[33] YY. Li, L. Zhang. A Harnack type inequality for the Yamabe equation in low dimensions. Calc. Var. Partial Differential Equations 20 (2004), no. 2, 133–151.

[34] L. Ma, J-C. Wei. Convergence for a Liouville equation. Comment. Math. Helv. 76 (2001) 506-514.

[35] Nazaraov, S, A. Sweers, G. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. Journal of Differential Equations. 233, 1, 2007, 151-180.

[36] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 304-318.

5. CONCERNANT LES INÉGALITÉS DU TYPE HARNACK

Fixant un minorant $m > 0$, on a une relation entre $\sup_K v$ et m pour toute $v > 0$ relativement a un W avec des conditions a priori sur W, v et W sont liés par une equation ou plusieurs equations. Or, en prenant le minorant $m = \inf_M u > 0$, on a l'inegalité pour $v > 0$ or $u > 0$ est déja une solution du probleme, donc $\sup_K u$ est fonction de $\inf_M u$ et des autres paramètres.

Pour l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimensions 3 et 4, et equation du type courbure scalaire prescrite en dimension 3 :

a) En dimension 3, on a la dependance explicite du $\sup$ en fonction du $\inf$.

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c,$$

b) En dimension 4, on a une estimation a priori. En plus on a des exemples pour ce cas.

En general dans le cas d'une variété Riemannienne M de dimension 4, on a une estimation a priori. On peut se ramener a une estimation du $\sup$ en fonction du $\inf$ en ecrivant :

$$\sup_K u \leq c(a, b, \inf_M u, K, M),$$

pour toute $u > 0$ solution de l'equation de la courbure prescrite en dimension 4 sur M, relativement a V (Lipschitzienne) verifiant :

$$||\nabla V||_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u,$$

et,

$$0 < a \leq V \leq b < +\infty,$$

En effet, $u > 0$ et V sont liés par l'equation, on peut supposer que le gradient de V et $\inf_M u$ sont aussi liés, ici on a deux equations liant $u > 0$ et V, une contrainte de plus. On a des exemples quand $||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$ et $\inf_M u_i \geq m > 0$, on a une estimation locale uniforme.

Ici, la constante $k(a) = \dfrac{32e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$ entre $\min_M u$ et la norme du gradient est plus grande. Il faut faire la preuve pour $\min_M u \geq m > 0$, car on doit eliminer des termes en $o(1)$.
[1]

Remarque : i) Dans le cas d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^4$, la deuxieme contrainte est "vérifiée" (aprés blow-up), dans l'article de C.C.Chen et C.S.Lin (Comm.on pure.appl.math.1997), si on suppose $V \in C^2$ uniformément. Ils obtiennent une inegalité entre $\nabla V(y_i)$ et $[u_i(y_i)]^{-1}$, dans ce cas ils obtiennent l'inégalité optimale $\sup \times \inf$. (les points y_i sont les points blow-up).

1. Pour la preuve, dans le cas non plat, comme c'est une estimation locale, on prend $x_0 \in M$, on fait un changement de metrique conforme $\tilde{g} = e^f g = \varphi^3 g$ de sorte que $\tilde{Ricci}_{x_0} = 0$, on a (voir le livre d'Aubin) $f(x_0) = 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. On prouve l'estimation en supposant $\min_M u \geq m > 0$ pour la nouvelle fonction $v = u/\varphi$ pour $m > 0$ (car, voir l'article de la preuve du cas general en dimension 4, il y a des termes $\tilde{Ricci}_{y_i}$ et $\tilde{R}_{\tilde{g}}(y_i)$, des termes en $o(1)$), comme $\varphi(x_0) = 1$, $\min_{B^{\tilde{g}}_r(x_0)} v \geq (\min_M u)/2 \geq m/2 > 0$. Comme on fait un changement de metrique conforme, au voisinage de x_0, tout est de "l'ordre" de u et m car $\varphi(x_0) = 1$, $f(x_0) = 1$, l'exponentielle (en norme de matrices) est $(1 + \epsilon)-$ Lipschitzienne, on a changé de metrique, les majorants restent de l'ordre de $1 + \epsilon$ au voisinage de x_0 car $\varphi(x_0) = 1$, ($f(x_0) = 0$) et la constante $k(a)$ entre $\min_M u$ et la norme du gradient de V est plus grande.

On prouve alors, en supposant l'inegalité entre le $\min_M u$ et le gardient de V : $\min_M u \geq m > 0 \Rightarrow \sup_{B^{\tilde{g}}_r(x_0)} v \leq c \Rightarrow \sup_K u \leq c(a, b, m, K, M)$. Apres on remplace m par $\min_M u$.

ii) Dans le cas plat on s'intéresse partiuclierment au cas V Lipschitzien et non C^1 pour obtenir l'inegalité optimale $\sup \times \inf$ avec la contrainte supplementaire : $||\nabla V||_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{8e^2\sqrt{2}} \inf_\Omega u$. On obtient alors un résultat du type Brezis-Li-Shafrir, en dimension 4 avec deux contraintes. Notons que dans l'article de C.C.Chen-C.S.Lin (comm.on pure.appl.math. 1997) prouvent que $\sup \times \inf \to +\infty$ avec $V = 1 - Kr$ ($\rho = 1$, V Lispchitzien et non C^1), on voit alors que la deuxieme contrainte est suffisante pour obtenir l'inegalité optimale $\sup \times \inf$, on en déduit la majoration uniforme locale des normes L^4 et H^1 ($N = \frac{2n}{n-2} = 4$). Dans le cas non plat, on obtient un résultat du type Brezis-Merle, en dimension 4 avec deux contraintes (Une inégalité de Harnack implicite).

iii) Dans le cas non plat, un exemple, ce resultat s'applique lorsque $V \equiv constante > 0$. On retrouve le résultat de YY.Li et L. Zhang, eux obtiennent l'inégalité optimale $\sup \times \inf$.

iv) Dans le cas non plat, un autre cas, on l'a dit ci-dessus, c'est celui où $||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$ et $\min_M u_i \geq m > 0$, on obtient une estimation locale uniforme.

v) Dans le cas non plat, on a un résultat analogue a celui de Brezis-Merle en dimension 2, en dimension 4 : pour deux suites $(u_i), (V_i)$ solutions de l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, $0 < a \leq V_i \leq b$ et $||\nabla V_i||_\infty \leq A_i \to 0$, alors $u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), m, K, M)$. (La fonction $m \to c$ est decroissante de $m > 0$).

vi) Voir la section 1 pour des exemples de (u_i, V_i) avec les deux contraintes dans le cas plat et non plat.

[2]

La formulation précédente en dimension 4 s'applique lorsqu'on suppose en x_0 point critique de $V > 0$ $V \in C^1(M)$. on fait la preuve avec $\min_M u \geq m > 0$ pour $v = u/\varphi$ avec $\varphi > 0$ duc changement de metrique conforme telle que $\tilde{R}icci_{\tilde{g}}(x_0) = 0$, on obtient :

$$\exists\, c, R > 0, \quad \sup_{B_R(x_0)} v \leq c,$$

Donc,

$$\exists\, c, R > 0,\ u(x_0) \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c, \forall\, u > 0$$

Donc, on obtient une inégalité du type :

$$u(x_0) \leq c(x_0, V, \inf_M u, M, g),$$

pour toute solution $u > 0$ de l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à un $V > 0, V \in C^1(M)$ fixé ayant le point x_0 comme point critique, $\nabla V(x_0) = 0$. Ou bien $V \in C^{1,\alpha}(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et $||V||_{C^{1,\alpha}} \leq A$ et $\nabla V(x_0) = 0$, on obtient :

$$\forall\ u > 0,\ u(x_0) \leq c(a, b, A, \alpha, x_0, \inf_M u, M, g).$$

Il y a des exemples de solutions de l'equation de la courbure prescrite en dimension 4 avec x_0 point où V est maximum et M compacte sans bord dans le livre d'Aubin.

Quand on prend les notations de YY.Li et L.Zhang : $(M, g) = (B_1(0) \subset \mathbb{R}^4, g)$ et $0 < V \in C^1(B_1(0))$ avec $\nabla V(0) = 0$, on obtient l'estimation a priori dans un voisinage de 0 en supposant le minimum unifromément minoré et aussi :

$$u(0) \leq c(V, B_1(0), g, \inf_{B_1(0)} u), \tag{1}$$

2. Concernant l'exponentielle dans le preuve du résultat ci-dessus. On commence par changer la metrique $d_g \to d_{\tilde{g}}$, on a un facteur $(1 + \epsilon)$, puis on considere $\tilde{\exp}_y$, l'exponentielle pour la metrique $\tilde{g}$, construite a partir d'une carte (Ω, ψ) normale en x_0 pour la metrique $\tilde{g}$, on passe de $d_{\tilde{g}}$ à $||\psi o \tilde{\exp}||_{\mathbb{R}^4}$, on a un majorant $(1 + \epsilon)$, puis on utlise le fait que $\frac{d}{dz}[z \to \tilde{\exp}_{x_0}(z)]_{|z=0} = id_{\mathbb{R}^4}$, c'est à dire que c'est vrai pour la differentielle de $\psi o \tilde{\exp}$ et par continuité des differentielle, (en y et z assez petits), on a un majorant $(1 + \epsilon)$, puis on utilise la norme matricielle sup des matrices et on ecrit que : $\psi o \tilde{\exp}_y(z_1) - \psi o \tilde{\exp}_y(z_2) = \int_0^1 \partial_s[\psi o \tilde{\exp}_y(s(z_1 - z_2) + z_2)]ds = \int_0^1 [(\partial_z(\psi o \tilde{\exp}_y)(s(z_1 - z_2) + z_2)) \cdot (z_1 - z_2)]ds$ et on obtient ; $||\psi o \tilde{\exp}_y(z_1) - \psi o \tilde{\exp}_y(z_2)||_{\mathbb{R}^4} \leq (1+\epsilon)||z_1 - z_2||_{\mathbb{R}^4}$, uniformément en y voisin de x_0 et $|z_1| \leq r, |z_2| \leq r, r > 0$ assez petit.

pour toute solution $u > 0$ de l'equation dela courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement a V avec les conditions precedentes ou $V \in C^{1,\alpha}(B_1(0))$ avec $0 < \alpha \leq 1$, $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et $||V||_{C^{1,\alpha}} \leq A$ et $\nabla V(0) = 0$.

$$\forall\ u > 0,\ u(0) \leq c(a, b, A, \alpha, \inf_{B_1(0)} u, B_1(0), g). \tag{2}$$

Pour l'equation de Yamabe en dimensions 5 et 6 :

c) En dimension 5, il y a une relation explicite entre $\sup_K u$ et $\inf_M u$.

$$(\sup_K u)^{1/7} \times \inf_M u \leq c,$$

d) En dimension 6, on a une estimation a priori et une relation implicite entre $\sup_K u$ et $\inf_M u$ (inégalité de Harnack implicite). Pour toute solution $u > 0$ de l'equation de Yamabe en dimension 6 :

$$\sup_K u \leq c(K, M, g, \inf_M u).$$

Dans le cas d'une variété compacte sans bord (M, g) de dimension 5 ou 6 et d'invariant de Yamabe $\mu_g > 0$, le probleme ne se pose pas, car Druet, YY.Li et L.Zhang et F.C.Marques prouvent que les solutions sont uniformément bornées, majorées et minorées uniformément par une constante positive.

Concernant l'article : "Some uniform estimates for scalar curvature type equations". En dimension 4, on a en plus de l'estimation a priori, une dependance implicite du $\sup_K u$ en fonction du $\inf_\Omega u$ (inégalité de Harnack implicite) :

$$\sup_K u \leq c(a, b, A, \alpha, K, \Omega, \inf_\Omega u),$$

pour le theoreme 3

et,

$$\sup_K u \leq c(a, V, K, \Omega, \inf_\Omega u).$$

pour le theoreme 4.

Remarque : On a bien une fonction c de l'inf car, pour chaque m on a une constante c_0 majorant de $\sup_K u$ et l'ensemble des majorants est lui meme minoré par $\sup_K u$ et m, c est alors l'inf des majorants de $\sup_K u$, qui est unique. On voit alors que cette correspondance $m \to c$ est bien une fonction et aussi la correspondance $(a, b, K, \Omega, m) \to c$ est une fonction. Apres on remplace m par $\inf_\Omega u$ comme on l'a dit ci-dessus. On a bien la correspondance $(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \to c$ est une fonction.

De plus la fonction $m \to c$ est décroissante en $m > 0$. On a alors, si $\inf_\Omega u \geq m > 0$ (ou $\inf_M u \geq m > 0$, si on considere une variété Riemannienne M), alors $c(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \leq c(a, b, K, \Omega, m) < +\infty$, ou $(c(a, b, K, M, \inf_M u) \leq c(a, b, K, M, m)$, si on est sur une variété Riemannienne M), on obtient alors l'estimation a priori lorsque l'inf est uniformement minoré. Comme toute fonction derivable est continue sauf sur un ensemble denombrable de points, on a des ensembles ou la fonction $m \to c$ est continue.

6. Consequence du resultat d'unicité et de rigidité : une inégalité de Sobolev et une inégalité d'interpolation

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 4$ et de courbure scalaire $S_g > 0$ partout sur M et orientable. Dans le livre d'Aubin, pour $\epsilon > 0$ assez petit $\epsilon < S_g$, l'equation $4\dfrac{n-1}{n-2}\Delta u + \epsilon u = u^{N-1}, u > 0$ a une solution et le resultat d'unicité dit que cette solution est unique. (Voir dans le livre d'Aubin, la fonctionnelle associée à cette equation possede un infimum atteint par cette solution unique). On obtient(voir aussi l'article de L.Veron et J.R. Licois et l'article sur Hal de J.Dolbeault, Esteban, Loss), une inégalité d'interpolation et une inégalité de Sobolev :

$\exists\, \epsilon_0 = \epsilon_0(n, M, g) > 0$, tel que pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ on ait :

$$\inf_{u \in H^1(M) - \{0\}} \frac{4\frac{n-1}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \epsilon \int_M u^2 dV_g}{(\int_M |u|^N dV_g)^{2/N}} = \epsilon (vol(M))^{2/n},$$

On a alors, pour tout $u \in H^1(M)$, on a :

$$4\frac{n-1}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g \geq \epsilon \left(\left(\int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N} (vol(M))^{2/n} - \int_M u^2 dV_g \right),$$

ou encore,

$$\forall u \in H^1(M),\ 4\frac{n-1}{n-2} ||\nabla u||_2^2 \geq \epsilon \left((vol(M))^{2/n} ||u||_{2^*}^2 - ||u||_2^2 \right) \geq 0.$$

avec $2^* = N = \dfrac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 4$.

Finalement : il existe $C = C(n, M, g) > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(M),\ ||\nabla u||_2^2 \geq C \left((vol(M))^{2/n} ||u||_{2^*}^2 - ||u||_2^2 \right) \geq 0,$$

avec, $n \geq 4$ et $2^* = N = \dfrac{2n}{n-2}$.

RÉFÉRENCES

[1] Bahoura.S.S. Estimations uniformes pour l'equation de Yamabe en dimensions 5 et 6. J. Funct. Anal. 242 (2007), no. 2, 550-562.

[2] Bahoura.S.S. Harnack inequalities for Yamabe type equations. Bull. Sci. Math. 133 (2009), no. 8, 875-892

[3] Bahoura.S.S. $\sup \times \inf$ inequality on manifold of dimension 3. Math. Aeterna, 1 (01) (2011), pp. 13-26

[4] Bahoura.S.S. A uniform estimate for scalar curvature equation on manifolds of dimension 4. J. Math. Anal. Appl. 388 (2012), no. 1, 386-392

[5] Bahoura.S.S. Some uniform estimates for scalar curvature type equations. Pacific. J. Math, vol 301, no 1, 2019, pp 55-65.

[6] Druet.O. Compactness for Yamabe metrics in low dimensions. Int. Math. Res. Not. 23, 1143-1191 (2004)

[7] Li.YY, Zhang.L. Compactness of solutions to the Yamabe problem. II, Calculus of Variations and PDEs 24 (2005), 185-237.

[8] F.C.Marques. A priori estimates for the Yamabe problem in the non-locally conformally flat case. J. Diff. Geom. 71(2), pp 315-346, 2005.

7. QUELQUES REMARQUES :

Equation de la courbure scalaire prescrite (et du type Yamabe) en dimension 4 et champs de Yang-Mills :

a) exemple : 1-si on note SW la variété hyperbolique sans bord et orientable de dimension 3, de Seifert-Weber, alors $SW \times S_1$ est une variété loc.conf.plate de courbure scalaire constante stric.negative de dimension 4, elle est lié aux champs de Yang-Mills. 2- En dimension 4, aussi on considere, la variété de Davis ou le produit de deux surfaces de courbure sectionelle non opposées et de courbure scalaire constante strc.negative (donc, non-loc-conf.plate $S_{-1} \times S_{-1}$ avec S_{-1} une surface de courbure scalaire constante < 0, $S_{-1} \times S_{-1}$ est d'Einstein), on obtient une variété Riemmannienne lié aux champs de Yang-Mills. On peut considerer sur ses variétés l'Equation de la courbure scalaire prescrite (dimension 4).

Dans le cas positif, on peut prendre $S_4, S_2 \times S_2, S_3 \times S_1$.

b) En physique (description de la force nucléaire responsable de la cohesion des protons-neutrons dans le noyau) le cas le plus important est porté aux variétés de dimension 4 avec une metrique Riemannienne ou Lorentzienne.

c) Regarder l'article de, Andrzej Derdzinski, dont le titre est : "Riemannian manifolds with harmonic curvature", il y a la fonctionnelle de Yang-Mills et pour lui la derivée du tenseur de

courbure donne les points critiques de la fonctionelle de Yang-Mills. En fait il s'agit de la variété, de la metrique et de la connection. C'est la courbure de Riemann qui est un champ de Yang-Mills.

d) Pour ce qui est des champs de Yang-Mills en dimension 4 et la théorie de Seiberg-Witten, apparait la fonctionelle de Yamabe et l'invariant de Yamabe et la courbure scalaire et les metriques conformes, dans des articles de M.Gursky par exemple en dimension 4 :

Si on prend une variété Riemannienne compacte sans bord (M^4, g), de dimension 4 avec champ de Yang-Mills, cela veut dire que le tenseur de Riemann, $Riem = F_{\nabla}$ est un champ de Yang-Mills. Comme la courbure scalaire S_g se déduit du tenseur de Riemann (elle est liée au tenseur de Riemann), alors, S_g est un objet de la physique et l'Equation de la courbure scalaire prescrite, en dimension 4, sur les variétés de Yang-Mills, est liée à la physique puisqu'elle contient S_g. De meme pour la metrique conforme, qui est liée à g, la metrique Riemannienne g est appelé en dimension 4 un instanton.

La théorie de Yang-Mills existe sur des variétés non-compactes ou completes. (non compact, or complete Manifolds with harmonic curvature). Voir Taubes et les articles de Gabor Etesi et Yawei Chu. Exemples : variétés d'Einstein (Einstein manifolds) $n \geq 3$ et les variétés loc.conf.plates de courbure scalaire constante (pour $n \geq 4$, en particulier pour $n = 4$) ou Ricci parallel, en particulier les variétés de courbure sectionelle constante.

Du point de vue de la physique, en dimension 4, on peut considerer les champs de Yang-Mills sur une variété compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs de Yang-Mills. On peut considerer au depart la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs de Yang-Mills. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, obsevation, à partir des données et du champs de Yang-Mills).

Comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la courbure scalaire prescrite V (elle est prescrite, pulsion ou signal ou potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" qui lie V à S_g, S_g est un "champ scalaire de Yang-Mills". L'equation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 et sur une variété de Yang-Mills de dimension 4 est un objet de la physique.

Aussi, c'est ecrit dans l'article de T.H. Parker (Gauge Theories on four dimensional Riemannian manifold, Comm.Math.Physics, 1982), si on considere un terme ("potentiel de Higgs") du type $P(u) = au^4 + mu^2$ avec $u > 0$ la solution et a, m deux fonctions réelles avec $m \leq 0$ possible, l'equation bosonique dans un champs de Yang-Mills devient du type Yamabe (ou de type courbure scalaire prescrite). ($\Delta_g u + (\frac{s_g}{6} + 2m)u = -4au^3$, avec $\Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$, s_g la courbure scalaire). On conclut, voir l'article de T.H. Parker (dans un champ de Yang-Mills, l'equation bosonique, induit (avec le fait qu'on a un champ de Yang-Mills, les lagrangiens s'annulent et la dérivée par rapport à la connexion est nulle), que le résidu est nul et constitue une solution de couplage des champs).(le lagrangien Yang-Mills bosonique, $Y = B_1 + B_2$ avec B_1 la fonctionnelle de Yang-Mills et B_2 la lagrangien bosonique, la loi de la particule : $\dot{Y} = dY = 0 = dB_1 + dB_2 = 0$, si on se place dans un champ de Yang-Mills, alors, $dB_1 = 0$, ce qui implique que $dB_2 = 0$, si de plus, $u > 0$ est solution de l'equation bosonique (cela veut dire que $\frac{\partial B_2}{\partial u} = 0$), ceci implique que $\frac{\partial B_2}{\partial \nabla} = 0$ et le résidu est nul : $\Sigma < \nabla_j u | \rho(e_i) u >= 0$ et donc, les deux equations du systeme de couplage sont vérifiées. Donc l'equation bosonique (du type courbure prescrite) dans un champ de Yang-Mills suffit à determiner le systeme. Ces deux conditions, champs de Yang-Mills et equation bosonique constituent une solution particuliere du systeme.)

On peut aussi considerer chaque lagrangien seul dans n'importe quelle formulation, par exemple ici, celui de Yang-Mills seul et celui bosonique seul. Ici (dans l'article de Parker, T.H) on a le lagrangien de Yang-Mills bosonique.

En dimension 2 : equation de Liouville :

a) Equation de la courbure scalaire prescrite sur la sphere de dimension 2 (vortex equation) ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (vortex equation) ou surface de dimension 2 (vortex equation). Mean-Field-equation.

b)Voir les articles de Crandall-Rabinowitz, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, Chen-Li, pour la provenence de ses equations : Géometrie (courbure de Gauss), Gazs, combustion, astronomie et astrophysique.

c) En dimension 2, aussi, c'est un cas particulier des champs de Yang-Mills, la theorie de Glashow-Weinberg-Salam, modelise les interactions (faibles) electromagnetiques des particules.

C'est la theorie de jauge (theorie de champs) avec un groupe de jauge (groupe de symetries locales) $U(1) \times SU(2)$

voir le livre de G. Tarantello Self-dual Gauge theories.

d) L'equation de Liouville ou de type Liouville apparait aussi dans le phénomène de "cordes cosmiques", un objet de l'univers "cosmic strings" et à ne pas confondre avec la theorie des cordes. Voir l'article de J. Spruck et Yisong Yang (cosmic strings).(On prend une metrique Lorentzienne $ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij}dx^i dx^j$, la metrique g_{ij} est definie sur une surface, M de dimension 2 et apres on peut choisir g_{ij} conforme a une autre metrique, par exemple $g_{ij} = e^u \delta_{ij}$ et on choisit le champ particulier). C'est là, par exemple l'idée générale.

e) En dimension 2 : c'est aussi, la theorie des champs de Liouville en dimension 2. Qui a été etudiée pour des surfaces à courbure négative et plus récemment sur la sphere de dimension 2. (LCFT, Liouville conformal field theory (2+1)).

De meme ici, du point de vue de la physique, de la chimie, astronomie ou la physique quantique, en dimension $n = 2$, on peut considerer des sources, des champs sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou une surface compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considerer au depart l'ouvert ou la surface et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, obsevation, à partir des données et du champs ou des parametres).

Ici aussi, comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la fonction V, (V est la source ou pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" ou emission, qui lie V à la donnée de départ, par exemple S_g (dans le cas d'un ouvert $S_g = 0$), S_g est un "champ scalaire". Il se peut que ce ne soit pas S_g comme pour l'operateur $\Delta + \epsilon(x_1\partial_1 + x_2\partial_2)$, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$.

En dimension $n \geq 3$: Relativité générale ($n = 3$) et Cosmologie quantique ($n \geq 3$) :

Cette idée de partir d'un espace Lorentzien $n + 1$ et de choisir une metrique conforme, sur la variété M, en partant de l'espace temps $M \times (0, \delta)$, se généralise aux dimensions superieures. (Il y a la correspondance, ADS-CFT(Anti-de-Sitter, Conformal field theory) proposée par Juan Maldacena ($\Lambda < 0$, constante cosmologique strictement négative dans l'equation d'Einstein). Les equations d'Einstein classiques et quand la dimension $n \geq 3$ c'est la "quantum-cosmology qui correspond au cas $\Lambda = 0$, equation d'einstein du début, (1915)). On a $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ avec $g_{ij} = u^{4/(n-2)} g_0$, une metrique conforme a celle de départ g_0 sur M.

L'idée générale est la suivante : (On part de la formulation Lorentzienne $(n + 1), M \times (0, \delta)$, d'Einstein en relativité génerale et on introduit sur la variable espace des metriques conformes dans la fonctionelle du champ (ici au lieu de la fonctionelle du champ comme dans la théorie de Yang-Mills, on a l'equation d'Einstein), on a des champs particuliers liés au changement de metriques conformes, tout cela dans le but d'etudier les interactions des particules et des astres (gravitation dûe à la courbure de l'espace temps ou à la formulation en $n + 1$ et les ondes qui sont les effets de la gravitation ou des champs, en particulier gravitationnel, un autre champ est le champ T d'energie-impulsion, peut etre vu comme une donnée, l'interaction est ecrite dans l'equation d'Einstein ci-dessous, gravitation, $Ricci^\gamma, R^\gamma$, et les données ou un autre champ, est le tenseur T). C'est l'adpatation à $(n + 1)$ de la théorie d'Einstein, en relativité générale, qui est en $(3 + 1)$. L'espace Anti-de-Sitter est une solution particuliere des equations d'Einstein, comme l'espace de Minkowski ou la metrique de Schwazrchild, l'inconnu ici est un espace Lorentzien (V, γ) de metrique Lorentzienne γ, qui verifie l'equation d'Einstein $Ricci^\gamma - \frac{1}{2}R^\gamma \gamma = T$, avec $Ricci^\gamma, R^\gamma, T$ respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire et le tenseur d'Energie-impulsion. Dans certains cas, cela revient à resoudre ce qu'on appelle le probleme de Cauchy en relativité.par exemple $T = 0 \Rightarrow Ricci^\gamma = 0$. Un autre cas particulier, on en parlé ci-dessus, est de trouver des solutions du type $V = M \times (0, \delta)$ et $\gamma = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ avec $g = u^{4/(n-2)} g_0$. Resoudre les equations des contraintes pour (V, γ) particuliers avec la méthode conforme de Lichnerowicz. On prend $V = M \times (0, \delta)$ avec $\gamma = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$, on transfome les equations d'Einstein en 2 Equations des contraintes (Probleme de Cauchy, par les relations Gauss-Codazzi), puis on prend $g = u^{4/(n-2)} g_0$ sur M, on transforme les 2 equations des contraintes en un systeme de deux equations elliptiques. Einstein scalar field Lichnerowicz equations. Voir, Hebey, Pollack, Pacard, Choquet-Bruhat, Bartnik.)

Remarque : Pour ce qui est de la théorie de Yang-Mills, on s'interesse à une fonctionelle du champ, on peut se ramener à la dimension 2 et utiliser la methode conforme comme dans Spruck-Yisong (cosmic-strings) ou d'autres théories avec fonctionnelle de champs sur une variété Lorentzinne de dimension 4. ($ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij}dx^i dx^j$) (exemple, Glashow-Weinberg-Salam, combine fonctionnelle de Yang-Mills et theorie conforme en 2 dimensions). Ici dans ADS-CFT ($\Lambda < 0$ ou bien $\Lambda = 0$ et on retrouve les Equations d'Einstein classiques avec $n = 3$ pour la relativité génerale et $n \geq 3$ pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology"), on remplace la fonctionnlle par l'equation d'Einstein. De meme, ici, dans la relativité génerale ($n = 3$) et pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology" ($n \geq 3$), on remplace la fonctionnlle par l'equation d'Einstein.

a) il y a une application et réalisation en physique, en $(3+1)$ et $(4+1)$ et $(5+1)$ et $(6+1)$ de la correspondance de ADS-CFT, de Juan.Maldacena (on voit bien le probleme du bon espace-temps). Et aussi $(2+1)$ (LCFT, Liouville conformal field theory).

La correspondance ADS-CFT correspond a l'equation d'Einstein avec une constante cosmologique $\Lambda < 0$ (Anti-de-Sitter) : $Ricci^{\gamma} - \frac{1}{2}R^{\gamma}g + \Lambda g = T = 0$. Si $\Lambda = 0$, on retrouve l'equation d'Einstein (1915) ecrite plus haut, et les théories en question sont : $n = 3$, la relativité générale et $n \geq 3$ la cosmologie quantique ou "quantum cosmology".

Il y a des auteurs qui font référence à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps avec $\Lambda < 0$. Dans la théorie classique d'Eisntein($\Lambda = 0$), c'est la "quantum cosmology", trouver le bon espace-temps pour $n \geq 3$.

b) Pour ce qui est des equations d'Einstein et methode conforme : ($n \geq 3$ ("quantum-cosmology") et $n = 3$ qui correspond à la théorie de la relativité générale :) Voir les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, dans general relativity and quantum cosmology. Cosmologie quantique pour $n \geq 3$. (il y a des auteurs qui font réference à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps pour $n \geq 3$ avec $\Lambda < 0$. Ici, on a la théorie classique d'Einstein ($n = 3$ relativité générale et "quantum cosmology" pour $n \geq 3$ avec $\Lambda = 0$)).

(Equation d'Einstein classique : $\Lambda = 0$, (1915) cosmologie). Voir le monograph de : E.Hebey, D. Pollack, F. Pacard, Y. Choquet-Bruhat, R. Bartnik : dans la théorie des champs de Klein-Gordon massive le potentiel $V(\Psi) = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$. (les données $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$ peuvent etre choisies librement ainsi que la metrique g_0 et la variété).

Voir aussi les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, la variété Riemanninne (M, g_0) peut etre compacte sans bord ou non compacte. Voir aussi la Thèse de C.Valcu.

On part des equations de contraintes qui derivent des equations d'Einstein et qui sont obtenues par les equations de Gauss-Codazzi (on contracte le tenseur de Riemann dans les equations de Gauss-Codazzi pour avoir le tenseur de Ricci). On contracte le tenseur de Ricci pour faire apparaitre la courbure scalaire et on separe les termes en variables temporelles et spaciales. Puis on utilise une metrique conforme.

Pour ce qui est des solutions des Equations d'Einstein par la méthode conforme de Lichnerowicz-Choquet-Bruhat-York : on a :

i) Si on prend $\Psi = 0$, $\tau \equiv constante \neq 0$, $\sigma = \pi = 0$, alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'equation de Yamabe (dans "le cas négatif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

ii) Si on prend $\Psi \equiv constante \neq 0$, $\tau = 0$, $\sigma = \pi = 0$, alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'equation de Yamabe (dans "le cas positif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

iii) Si on prend $\Psi \not\equiv constante$, $\sigma = \pi = 0$ et $\tau = 0$ alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'equation du type courbure scalaire prescrite avec $h = S_{g_0} - |\nabla\Psi|^2_{g_0} \leq S_{g_0}$ (dans "le cas positif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

De meme ici, du point de vue de la physique, de l'astronomie ou de la cosmologie ou de la cosmologie quantique, en dimension $n = 3$ ou $n \geq 3$, on peut considerer les champs sur une variété compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considerer au depart la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, obsevation, à partir des données et du champs ou des parametres, comme $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$ et (M, g_0)).

Ici aussi, comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la fonction V (du type courbure scalaire prescrite) qui peut etre constante (Yamabe), (V est prescrite (ou Yamabe, $V \equiv constante$)), on peut prendre $V = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$, V est la pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" qui lie V à S_{g_0} ou $S_{g_0} - |\nabla\Psi|^2_{g_0}$, S_{g_0} est un "champ scalaire".

En dimension $n \geq 3$: résultat d'unicité et de rigidité : en Biologie Mathématique :

Interpretation en Biologie Mathématique : la Chimiotaxie (Chemotaxis en anglais), est l'etude du mouvement de certaines cellules (les amibes, amoebae en anglais) dans leur environement, mouvement dû à la liberation de substances chimiques par les amibes. les amibes se deplacent vers les endroits ou la concentration de cette substance chimique est la plus grande et s'agregent, forment des agregats. L'interpretation biologique du resultat d'unicité est que les amibes ne peuvent pas former d'agregats (ne se concentrent pas, un ou plusieurs points de concentrations) quand on a une solution unique et constante au systeme de Keller-Segel. Voir l'article de Lin-Ni-Takagi. Le systeme de Keller-Segel peut se reduire à l'etude d'une seule equation, voir l'article de Lin-Ni-Takagi, Journal of Diff. Equations, 1988. Cette formulation existe sur les variétés compactes sans bord de dimension $n \geq 3$, voir T. Hillen et K.Painter.

Remarque sur les inégalités du type Harnack $\sup\ \inf$ **:** La théorie des cordes (string theory) unifie les théories de Jauge (des champs), des champs conformes, (théorie des champs de Liouville), de Yang-Mills, et la gravitation quantique (Kaluza-Klein, $n+1, n = 3, 4, 5, 6, 9, 10$ ou plus générale $n \geq 3$). Les inégalités du type Harnack apparaissent dans ces trois théories, on peut considerer alors que cette notion est une notion de la théorie des cordes. Corde qui est un 'fil' ou un ensemble de particules.

Remarque 2 : Il y a aussi les D-branes en dimension 2, cordes ouvertes avec condition de Dirichlet.(fait reference a l'equation du type Liouville (equation de mouvement des particules ou de la corde) avec condition de Dirichlet). Pour la theorie conforme des champs de Liouville.

Remarque 3 : En ce qui concerne l'existence de dimensions supplementaires (extra-dimensions) dans les théories du type Kaluza-Klein : ceci est lié a l'existence d'une nouvelle perticule qui est l'axion qui se deplace dans ces dimensions cachées, on peut les detecter ou savoir comment les eliminer avec des outils, des telescopes, voir les articles ou preprint de Horvat, Krcmar, Lakic. Il y a le telescope du CERN, et aussi d'autres appareils, pour essayer de detecter ou eliminer ces particules que sont les axions. C'est dit dans le print de Horvat, Krcmar, Lakic, les dimensions supplementaires $(5+1), (6+1)$ sont liés a l'astrophysique, elles ont des réalisations.

RÉFÉRENCES

[1] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds. arXiv :gr-qc/0506101.

[2] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds. arXiv :gr-qc/0610045.

[3] Choquet-Bruhat.Yvonne, Isenberg.James, York.James. W. Einstein Constraints on Asymptotically Euclidean Manifolds. arXiv :gr-qc/9906095.

[4] Horvat.R, Krcmar.M, Lakic.B. Recent searches for solar axions and large extra dimensions. arXiv :hep-ph/0112224.

[5] Horvat.R, Krcmar.M, Lakic.B. CERN Axion Solar Telescope as a probe of large extra dimensions. arXiv :astro-ph/0312030.

[6] Hillen.T, Painter.K. Global existence for a parabolic chemotaxis model with prevention of overcrowding. Adv. Appl. Math. 26, 280-301, 2001.

[7] Keller. E. F, Segel, L.A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability.J. Theoret. Biol., 26 (1970), pp. 399-415.

[8] Lin. C.S, Ni. W.M, Takagi.I Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. Journ. Diff. Equations, volume 72, no 1, 1988, pp 1-27.

[9] Parker. T.H. Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds. Comm. Math. Phys. 85, 563-602, 1982.

EQUIPE D'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 75005, PARIS, FRANCE.
Email address: samybahoura@yahoo.fr, samybahoura@gmail.com